Comment. Math. Helvetici *50* (1975) 219–232 Birkhäuser Verlag, Basel

Ueber die minimale Dimension der assoziierten Primideale der Komplettion eines lokalen Integritätsbereiches

MARKUS BRODMANN

Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, über die Grösse $\delta^*(R)=\min\{\dim(R^*/\mathfrak{p}^*)\mid \mathfrak{p}^* \in \mathrm{Ass}(R^*)\}$ einige Aussagen zu machen, wo R ein lokaler Integritätsbereich mit dem Maximalideal $\mathfrak{m}$ und R^* seine $\mathfrak{m}$-adische Komplettion ist. Dabei bedeute lokal oder halblokal immer auch, dass der Ring noethersch ist. Setzen wir $\Delta^*(R)=\dim(R)-\delta^*(R)$, so ist $\Delta^*(R)=0$ mit der Ungemischtheit von R identisch. (Zum Begriff der Ungemischtheit s. [2, pg. 82, 125], [3])

Wir werden zeigen, dass Δ^* beim Uebergang von R zu einer R-Lokalität R' nicht zunimmt, und damit ein Resultat von Nagata verallgemeinern, wonach die Ungemischtheit bei einem solchen Uebergang erhalten bleibt.

Weiter wird auf die offene Frage, ob die Ungemischtheit bei Restklassenbildung erhalten bleibt, eine Teilantwort gegeben. Es wird nämlich gezeigt, dass es unter allen Primidealen $\mathfrak{p}$ vom Rang 1 höchstens endlich viele gibt, für welche $\Delta^*(R/\mathfrak{p})>\Delta^*(R)$.

Ueberdies wird der Begriff der Quasi-R-Folge eingeführt, eine Verallgemeinerung der R-Folgen (s. [1, Pg. 95]) und $\delta^*(R)$, analog zu depth (R), als Maximum der Längen aller Quasi-R-Folgen mit Elementen aus $\mathfrak{m}$ charakterisiert.

Da die Quasi-R-Folgen Parametersysteme sind, zeigt sich hier die Möglichkeit, $\delta^*(R)$ ohne direkte Verwendung analytischer Eigenschaften zu bestimmen.

Von grundlegender Bedeutung für die Beweise der genannten Resultate sind die in Abschnitt 2 eingeführten D-Operatoren. Ist nämlich $\mathfrak{S}(R^*)$ die Menge aller Primideale von R^*, die zu einem durch einen Nichtnullteiler erzeugten Ideal von R^* gehören, so folgt aus der in (4.7) bewiesenen Endlichkeit von $D(R^*)$ sofort, dass in $\mathfrak{S}(R^*)$ alle bis auf eventuell endlich viele Primideale eine Dimension $\geqslant \delta^*(R)-1$ haben. (Insbesondere heisst das auch, dass es in der Komplettion eines lokalen, ungemischten Integritätsbereiches und deshalb insbesondere auch in R selbst nur endlich viele Primideale gibt, die als Eingebettete Primdivisoren eines durch ein $r\in R-(0)$ erzeugten Ideals auftreten.)

Aus der genannten Endlichkeit folgt nun mit der R-Flachheit von R^* leicht, dass es höchstens endlich viele zu Hauptidealen von R gehörige Primideale $\mathfrak{p}$ gibt, für welche $\delta^*(R/\mathfrak{p})<\delta^*(R)-1$. Daraus ergibt sich insbesondere, dass für höchstens endlich viele $\mathfrak{p}$ vom Rang 1 $\Delta^*(R/\mathfrak{p})>\Delta^*(R)$. Die Endlichkeit von $D(R^*)$ bewirkt aber auch insbesondere, dass wir im Quotientenkörper von R eine endliche, ganze Erweiterung derart finden, dass in ihr alle zu Hauptidealen gehörigen Primideale eine Dimension $\geqslant \delta^*(R)-1$ haben. Mit Hilfe solcher endlicher Erweiterungen werden nun die Quasi-R-Folgen konstruiert. Insbesondere zeigen wir, dass es in jedem Ideal $\mathfrak{a}$ der Dimension d eine Quasi-R-Folge der Länge $\delta^*(R)-d$ gibt. (5.4).

Mit diesem Ergebnis erhalten wir nun $\Delta^*(R)\geqslant\Delta^*(R_\mathfrak{p})$. Der Fall einer beliebigen R-Lokalität wird schliesslich in Abschnitt 6 behandelt, ebenfalls unter Zuhilfenahme der Endlichkeit von $D(R^*)$.

1. Die Grössen $\delta_R(M)$ und $\Delta_R(M)$

Mit R, R',... etc. seien immer kommutative Ringe mit Einselement 1_R, $1_{R'}$,..., etc. bezeichnet. Alle Moduln seien unitär. Ist M ein R-Modul, so stehe $\mathrm{NT}_R(M)$ für die Menge aller Nullteiler von R bezüglich M, $\mathrm{NNT}_R(M)$ für die Menge der Nichtnullteiler. Anstelle von $\mathrm{NT}_R(R)$ resp. $\mathrm{NNT}_R(R)$ schreiben wir kurz $\mathrm{NT}(R)$ resp. $\mathrm{NNT}(R)$. $Q_R(M)$ stehe für den totalen Quotientenmodul $M_{\mathrm{NNT}_R(M)}$ von M, $Q(R)$ für $Q_R(R)$. Ist $R\subseteq R'$, so bezeichnen wir mit $\mathrm{der}_{R'}(R)$ den ganzen Abschluss von R in R'. Für $\mathrm{der}_{Q(R)}(R)$ schreiben wir kurz $\mathrm{der}(R)$. Mit $\mathrm{Rad}(R)$ sei das Jacobsonradikal von R gemeint. Ist R halblokal, so steht R^* für die $\mathrm{Rad}(R)$-adische Komplettion von R. Im Uebrigen werden die Notationen von [1] verwendet.

(1.1) DEFINITION. Sei R noethersch und M ein endlicher R-Modul. Dann setzen wir $\delta_R(M)=\min\{\dim(R/\mathfrak{p})\mid \mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)\}$, $\Delta_R(M)=\dim_R(M)-\delta_R(M)$. Für $\delta_R(R)$ schreiben wir $\delta(R)$, für $\Delta_R(R)$ $\Delta(R)$. Ist R halblokal, so kürzen wir weiter ab: $\delta_{R^*}(M\otimes_R R^*)=\delta_R^*(M)$, $\Delta_{R^*}(M\otimes_R R^*)=\Delta_R^*(M)$, $\delta(R^*)=\delta^*(R)$, $\Delta(R^*)=\Delta^*(R)$.

(1.2) LEMMA. *Ist R noethersch und sind M und N endliche R-Moduln, so gilt:*

a) $0\leqslant\delta_R(M)\leqslant\dim_R(M)$.

b) $\delta_R(M)>0\Leftrightarrow$ *kein* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)$ *ist ein Maximalideal.*

c) *Ist R halblokal, so ist* $\delta_R(M)>0$ *sogar mit* $\mathrm{Rad}(R)\cap\mathrm{NNT}_R(M)\neq\emptyset$ *gleichbedeutend.*

d) $a\in\mathrm{Rad}(R)\cap\mathrm{NNT}_R(M)\Rightarrow\delta_R(M/aM)<\delta_R(M)$.

e) $\mathrm{NNT}_R(M)\subseteq\mathrm{NNT}_R(N)\Rightarrow\delta_R(M)\leqslant\delta_R(N)$.

f) *Ist* $\mathfrak{a}\subseteq R$ *ein Ideal mit* $\dim(R/\mathfrak{a})<\delta_R(M)$, *so gilt* $\mathfrak{a}\cap\mathrm{NNT}_R(M)\neq\emptyset$.

Beweis. a) und b) sind trivial. c), e) und f) folgen sofort aus $\mathrm{NT}_R(M)==\bigcup\mathrm{Ass}_R(M)$. d) folgt daraus, dass jeder echte minimale Primdivisor $\mathfrak{p}$ von $aR+\mathfrak{q}$ ($\mathfrak{q}\in\mathrm{Ass}_R(M)$) zu $\mathrm{Ass}_R(M/aM)$ gehört ([1, pg. 99]).

(1.3) LEMMA. *Ist R noethersch und R' eine endliche, ganze Erweiterung von R, so gilt:*

a) $\delta_R(R')=\delta(R')$, $\Delta_R(R')=\Delta(R')$.

b) $\delta(R)\geqslant\delta(R')$, $\Delta(R)\leqslant\Delta(R')$.

c) *Ist R' torsionfrei über R, so gilt in* b) *Gleichheit.*

d) *Ist R ein halblokaler Integritätsbereich und R' torsionsfrei über R, so folgt $\delta^*(R)=\delta^*(R')$, $\Delta^*(R)=\Delta^*(R')$.*

Beweis. a) Wegen $R\subseteq R'$ gilt $\mathrm{NT}_R(R')=R\cap\mathrm{NT}(R')$, also $\bigcup \mathrm{Ass}_R(R')= =\bigcup\,\{\mathfrak{p}'\cap R \mid \mathfrak{p}'\in\mathrm{Ass}(R')\}$, und daraus folgt mit dem Going-up-Theorem für ganze Erweiterungen sofort die Behauptung.

b) folgt mit (1.2) e) aus $\mathrm{NNT}_R(R')\subseteq\mathrm{NNT}(R)$, c) weil im Falle der Torsionfreiheit in dieser Inklusion das Gleichheitszeichen steht.

d) folgt aus der Tatsache, dass R'^* eine endliche, ganze, torsionsfreie Erweiterung von R^* ist (s. [2, (17.11), (17.8), (18.3)]).

(1.4) LEMMA. *Ist R halblokal, so gilt:*

a) $\delta^*(R)=\min\{\delta^*(R_{\mathfrak{m}})\}$, $\Delta^*(R)\geqslant\max\{\Delta^*(R_{\mathfrak{m}})\}$, *wo* $\mathfrak{m}$ *die Maximalideale von R durchläuft.*

b) $\delta^*(R)=\min\{\delta^*(R/\mathfrak{p})\}$, *wo* $\mathfrak{p}$ $\mathrm{Ass}(R)$ *durchläuft.*

Beweis. a) ergibt sich sofort aus $R^*=\prod R^*_{\mathfrak{m}}$ (s. [2, pg. 56]).

b) folgt aus $(R/\mathfrak{p})^*=R^*/\mathfrak{p}R^*$ (s. [2, (17.9)]) und weil, wegen der R-Flachheit von R^*, gilt $\mathrm{Ass}(R^*)=\bigcup \mathrm{Ass}_{R^*}(R^*/\mathfrak{p}R^*)$.

2. D-Operatoren

(2.1) DEFINITION. Ist M ein R-Modul, $S\subseteq\mathrm{NNT}_R(M)$ multiplikativ abgeschlossen und $\mathfrak{J}$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge von Idealen aus R, so setzen wir:

$$D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)=\bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}}(M:\mathfrak{a})_{M_S}.$$

Für $D^{\mathfrak{J}}_{R,\mathrm{NNT}_R(M)}(M)$ schreiben wir $D^{\mathfrak{J}}_R(M)$, für $D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(R)$ $D^{\mathfrak{J}}_S(R)$, und $D^{\mathfrak{J}}_R(R)$ bezeichnen wir mit $D^{\mathfrak{J}}(R)$.

(2.2) LEMMA. a) *$D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)$ ist ein R-Untermodul von M_S.*

b) *Ist R' eine R-Algebra, so ist $D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(R')$ eine R-Unteralgebra von R'_S.*

c) $\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{J}'$, $S\subseteq S'\Rightarrow D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)\subseteq D^{\mathfrak{J}'}_{R,S'}(M)$.

d) *Ist $D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)/M$ ein endlicher R-Modul, so gibt es ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{a}\subseteq\mathrm{ann}_R(D^{\mathfrak{J}}_{R,S}\times(M)/M)$.*

e) *Sind alle* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}$ *endlich erzeugt, so gilt* $D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M))=D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)$.

Beweis. a)–c) sind aus der Definition sofort klar.

d) Sei $D=D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(M)=M+d_1R+\cdots+d_sR$, $\mathfrak{a}_1\in\mathfrak{J}$, $d_i\mathfrak{a}_i\in M$ $(i=1,\ldots,s)$, und sei $\mathfrak{a}=\prod\mathfrak{a}_i$. Dann gilt $\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{a}D\subseteq M$.

e) Sei $d\in D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(D)$, $\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}$, $d\mathfrak{a}\subseteq D$, $\mathfrak{a}=\sum_{i=1}^r a_iR$. Dann gibt es Ideale $\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_r\in J$ derart, dass $da_i\mathfrak{a}_i\subseteq M$, und es folgt $d\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\ldots\mathfrak{a}_r\subseteq M$. Weil $\mathfrak{J}$ multiplikativ abgeschlossen ist, folgt daraus die Behauptung.

Ist $\mathfrak{J}=\{\mathfrak{a}\subseteq R \text{ } Ideal \mid \dim(R/\mathfrak{a})<n\}$, so schreiben wir $D^{(n)}_{R,S}(M)$ für $D^{\mathfrak{J}}_{R,S}(H)$. Dabei sei $\dim_R((0))=-1$ gesetzt.

(2.3) LEMMA. *Sei R noethersch, M ein endlicher R-Modul,* $S\subseteq\mathrm{NNT}_R(M)$ *multiplikativ abgeschlossen,* $n\geqslant 0$ *und* $D=D^{(n)}_{R,S}(M)$. *Dann gilt:*

a) $M=D\Leftrightarrow$ *für alle* $a\in S$ *gilt* $\delta_R(M/aM)\geqslant n$.

b) *D endlicher R-Modul* $\Rightarrow$ *für alle* $a\in S$ *gilt* $\delta_R(D/aD)\geqslant n$.

c) *Ist D' ein endlicher R-Modul mit* $M\subseteq D'\subseteq M_S$, *und gilt für alle* $a\in S$ $\delta_R(D'/aD')\geqslant n$, *so folgt* $D\subseteq D'$.

Beweis. a) „$\Rightarrow$“ Sei $a\in S$, $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M/aM)$ und $m\in M-aM$ mit $\mathfrak{p}m\subseteq aM$. Dann folgt $(m/a)\in(M:\mathfrak{p})_{M_S}$. Wäre $\dim(R/\mathfrak{p})<n$, so würde daraus folgen $(m/a)\in D=M$.

„$\Leftarrow$“ Sei $a\in S$, $m\in M$, $(m/a)\in D$. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\dim(R/\mathfrak{a})<n$ und $\mathfrak{a}(m/a)\subseteq M$, also $\mathfrak{a}m\subseteq aM$. Wäre $(m/a)\notin M$, also $m\notin aM$, so wäre auch $\mathfrak{a}\subseteq\mathrm{NT}_R\times(M/aM)$, und nach (1.2) f) würde folgen $n>\dim(R/\mathfrak{a})\geqslant\delta_R(M/aM)$.

b) Nach (2.2) e) ist $D^{(n)}_{R,S}(D)=D$, und die Behauptung folgt aus a).

c) Nach a) ist $D^{(n)}_{R,S}(D')=D'$ und somit $D\subseteq D^{(n)}_{R,S}(D')=D'$.

(2.4) DEFINITION. Sei R noethersch und M ein endlicher R-Modul. Sei $S\subseteq\mathrm{NNT}_R(M)$. Dann setzen wir $\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(M)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R)\mid\exists s\in S \text{ mit } \mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M/sM)$ und $\dim(R/\mathfrak{p})<n\}$. Ist $S=\mathrm{NNT}_R(M)$, so schreiben wir $\mathfrak{P}^{(n)}_R(M)$ für $\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(M)$. Für $\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(R)$ schreiben wir $\mathfrak{P}^{(n)}_S(R)$. Im Fall $S=\mathrm{NNT}(R)$ schreiben wir dafür kurz $\mathfrak{P}^{(n)}(R)$.

(2.5) LEMMA. *Ist R noethersch, M ein endlicher R-Modul und* $S\subseteq\mathrm{NNT}_R(M)$ *multiplikativ abgeschlossen, so gilt:*

$D^{(n)}_{R,S}(M)$ *ist ein endlicher R-Modul* $\Rightarrow$ $\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(M)$ *ist endlich.*

Beweis. Sei $\mathfrak{P}_i=\{\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(M)\mid\dim(R/\mathfrak{p})=i\}$. Dann folgt $\mathfrak{P}^{(n)}_{R,S}(M)=\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathfrak{P}_i$, und es genügt, die Endlichkeit der $\mathfrak{P}_i$ nachzuweisen.

Nach (2.2) c) ist $D^{(i+1)}_{R,S}(M)\subseteq D^{(n)}_{R,S}(M)$, also ein endlicher R-Modul. Sei $\mathfrak{a}=\mathrm{ann}_R(D^{(i+1)}_{R,S}(M)/M)$. Nach (2.2) d) ist $\dim(R/\mathfrak{a})\leqslant i$. Ist nun $\mathfrak{p}\in\mathfrak{P}_i$, so gibt es ein $s\in S$ derart, dass $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M/sM)$, und mit einem geeigneten $m\in M$ gilt $\mathfrak{p}=(sM:m)_R$, also $\mathfrak{p}=(M:(m/s))_R$. Daraus folgt $(m/s)R\subseteq(M:\mathfrak{p})_{M_S}\subseteq D^{(i+1)}_{R,S}(M)$, und somit $\mathfrak{p}=\mathrm{ann}_R((m/s)R/M)\supseteq\mathfrak{a}$. Wegen $\dim(R/\mathfrak{p})=i$ folgt daraus, dass $\mathfrak{p}$ ein minimaler

Primdivisor von $\mathfrak{a}$ ist. Weil R noethersch ist, besitzt $\mathfrak{a}$ aber nur endlich viele Primdivisoren, und $\mathfrak{P}_i$ ist endlich.

Wir wollen nun speziell den Fall $S=\mathrm{NNT}_R(M)$ ins Auge fassen, d.h. uns dem Operator $D_R^{(n)}$ zuwenden.

(2.6) LEMMA. *Ist R noethersch, M ein endlicher R-Modul und $\delta_R(M)>0$, so folgt aus der Tatsache, dass $D_R^{(n)}(M)$ ein endlicher R-Modul ist, dass $n<\delta_R(M)$.*

Beweis. Wegen $M\subseteq D=D_R^{(n)}(M)\subseteq Q_R(M)$ ist $\delta_R(M)=\delta_R(D)$, und wir können o.B.d.A. annehmen $M=D$, also, nach (2.2) a), dass $\delta_R(M/aM)\geqslant n$ für alle $a\in\mathrm{NNT}_R\times(M)$. Sei nun $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_R(M)$ und $\dim(R/\mathfrak{p})=\delta_R(M)$ und $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{p}$ umfassendes Maximalideal von R. Nach (1.2) b) finden wir dann ein $a\in\mathfrak{m}\cap\mathrm{NNT}_R(M)$ und, wegen $aR+\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$, ist, nach [1, pg. 99], jeder minimale Primdivisor $\mathfrak{q}$ von $aR+\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Ass}_R(M/aM)$. Somit wird $\delta_R(M)=\dim(R/\mathfrak{p})>\dim(R/\mathfrak{q})\geqslant\delta_R(M/aM)$.

Ueber das Verhalten von $D^{(n)}$ bei Ringwechsel wollen wir die folgenden Ergebnisse festhalten.

(2.7) LEMMA. a) $D_{R/\mathrm{ann}_R(M)}^{(n)}(M)=D_R^{(n)}(M)$.

b) *Sei R' eine ganze Erweiterung von R, M' ein R'-Modul und n so gewählt, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a}\subseteq R$ mit $\dim(R/\mathfrak{a})<n$ gilt $\mathrm{NNT}_R(M')\cap\mathfrak{a}\neq\emptyset$. Dann gilt $D_R^{(n)}(M')==D_{R'}^{(n)}(M')$.*

c) *Sei R noethersch, R' eine endliche, ganze Erweiterung von R, M' ein endlicher R'-Modul und $n<\delta_R(M')$. Dann ist $D_R^{(n)}(M')=D_{R'}^{(n)}(M')$.*

Beweis. a) folgt sofort aus $Q_R(M)=Q_{R/\mathrm{ann}_R(M)}(M)$ und $(M:\mathfrak{a}+\mathrm{ann}_R(M))_{Q_R(M)}=(M:\mathfrak{a})_{Q_R(M)}$.

b) Wegen $R\subseteq R'$ ist $\mathrm{NNT}_R(M')=\mathrm{NNT}_{R'}(M')\cap R$, also $Q_R(M')\subseteq Q_{R'}(M')$. Wegen der Ganzheit von R' über R folgt weiter $\dim(R/\mathfrak{a})=\dim(R'/\mathfrak{a}R')$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R, und wir erhalten $D_R^{(n)}(M')\subseteq D_{R'}^{(n)}(M')$. Sei nun $m'\in M'$, $s'\in\mathrm{NNT}_{R'}(M')$ derart, dass $(m'/s')\in D_{R'}^{(n)}(M')$. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}'\subseteq R'$ mit $\dim(R'/\mathfrak{a}')<n$ und $\mathfrak{a}'(m'/s')\subseteq M'$, also $(\mathfrak{a}'\cap R)\,(m'/s')\subseteq M'$. Wieder wegen der Ganzheit von R' über R ist $\dim(R'/\mathfrak{a}')=\dim(R/\mathfrak{a}'\cap R)<n$, und nach Voraussetzung finden wir ein $a\in(\mathfrak{a}'\cap R)\cap\mathrm{NNT}_R(M')$. Daraus folgt nun $a(m'/s')=m''\in M'$, also $(m'/s')=(m''/a)\in D_R^{(n)}(M')$.

c) folgt aus b) sofort mit (1.2) f).

Im Falle $R=M$ wollen wir angeben:

(2.8) LEMMA. *Sei R noethersch und $\delta(R)>0$. Dann ist $D^{(n)}(R)$ genau dann ein endlicher R-Modul, wenn es in $Q(R)$ eine endliche, ganze Erweiterung R' von R gibt mit $\delta(R'/a'R')\geqslant n$ für alle $a'\in\mathrm{NNT}(R')$.*

Beweis. „$\Rightarrow$". Ist $D^{(n)}(R)=R'$ endlich, so ist nach (2.6) und (1.3) a) $n<\delta_R(R')=$

$=\delta(R')$, und nach (2.7) c) und (2.2) e) folgt $R'=D_R^{(n)}(R')=D^{(n)}(R')$. Die Behauptung ergibt sich daraus mit (2.3) a).

„$\Leftarrow$" Ist umgekehrt $\delta(R'/a'R')\geqslant n$ für alle $a'\in \mathrm{NNT}(R')$, so ist $D^{(n)}(R')=R'$ ((2.3) a)). Andrerseits ist nach (1.3) c) $\delta(R)=\delta(R')>0$, und nach (2.6) folgt $\delta(R)>n$. Daraus folgt nun mit (2.7) c) $D^{(n)}(R)\subseteq D_R^{(n)}(R')=D^{(n)}(R')=R'$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $D^{(\delta^*(R)-1)}(R^*)$ ein endlicher R^*-Modul ist, falls R ein lokaler Integritätsbereich ist. Zuvor werden wir jedoch noch einige Begriffe bereitstellen.

3. Charakterische Moduln

(3.1) DEFINITION. Einen R-Modul M nennen wir charakterisch über R, wenn für alle Maximalideale $\mathfrak{m}$ von R gilt $\chi(R/\mathfrak{m})\, 1_R\in \mathrm{ann}_R(M)\cup \mathrm{NNT}_R(M)$. (Dabei sei $\chi(k)$ die Charakteristik des Körpers k.) Ist R über sich selbst charakterisch, so nennen wir R charakterisch.

(3.2) LEMMA. *Sei M ein charakterischer R-Modul. Dann gilt:*

a) *Ist N ein R-Modul mit $\mathrm{ann}_R(M)\subseteq \mathrm{ann}_R(N)$ und $\mathrm{NNT}_R(M)\subseteq \mathrm{NNT}_R(N)$, so ist auch N über R charakterisch.*

b) *M ist charakterisch über $R/\mathrm{ann}_R(M)$.*

c) *Ist R' eine R-flache R-Algebra, so ist $M\otimes_R R'$ über R' charakterisch.*

d) *Ist $a\in \mathrm{NNT}_R(M)$ und $a\in \mathrm{NNT}_R(M/\chi(R/\mathfrak{m})\, M)$ für alle Maximalideale $\mathfrak{m}$ von R, so ist M/aM über R charakterisch.*

Beweis. a) und b) sind trivial.

c) Sei $\mathfrak{m}'$ ein Maximalideal von R', $p=\chi(R'/\mathfrak{m}')$. Ist $p=0$, so ist nichts zu zeigen. Ist $p\neq 0$, so wählen wir ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R mit $\mathfrak{m}'\cap R\subseteq \mathfrak{m}$. Dann gilt $p1_{R'}\in \mathfrak{m}'$, also $p1_R\in \mathfrak{m}$, und es folgt $p=\chi(R/\mathfrak{m})$. Daraus ergibt sich $p1_R\in \mathrm{ann}_R(M)\cup \mathrm{NNT}_R(M)$, also, wegen der R-Flachheit von R', $p1_{R'}\in \mathrm{ann}_{R'}(M\otimes_R R')\cup \mathrm{NNT}_{R'}\times(M\otimes_R R')$.

d) Ist a Einheit, so ist $M/aM=(0)$, und wir sind fertig. Andernfalls wählen wir ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R. Ist $s=\chi(R/\mathfrak{m})\, 1_R\in \mathrm{ann}_R(M)$, sind wir fertig. Ist dies nicht der Fall, so gilt $s\in \mathrm{NNT}_R(M)$. Dann folgt aus $a\in \mathrm{NNT}_R(M/sM)$ aber, dass $s\in \mathrm{NNT}_R \times (M/aM)$.

Ueber charakterische Ringe sei noch angeführt

(3.3) LEMMA. a) *Jeder Integritätsbereich ist charakterisch.*

b) *Ist $R\subseteq R'$ und gilt für all Ideale $\mathfrak{a}\neq R$ von R $\mathfrak{a}R'\neq R'$ und ist weiter R' charakterisch, so ist es auch R.*

c) *Ist R charakterisch und R' eine torsionsfreie R-Algebra, so ist R' charakterisch.*

d) *Ist* $(R, \mathfrak{m})$ *lokal, komplett und charakterisch, so gibt es in* R *einen lokalen, kompletten und regulären Ring* S, *über dem* R *endlich und ganz ist.*

Beweis. a) ist trivial.

b) Sei $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von R und $\mathfrak{m}'$ eines von R' mit $\mathfrak{m}R' \subseteq \mathfrak{m}'$. Dann ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R$, also $\chi(R'/\mathfrak{m}') = \chi(R/\mathfrak{m})$, und es folgt $\chi(R/\mathfrak{m})\, 1_R \in (0) \cup \mathrm{NNT}(R)$.

c) beweist sich ähnlich wie (3.2) c).

d) Nach dem Struktursatz von Cohen gibt es in R einen kompletten, lokalen Ring I mit dem Maximalideal $\chi(R/\mathfrak{m})\, I$ derart, dass $R = I[[x_1, \ldots, x_r]]$, wo $x_1, \ldots, x_r$ $\mathfrak{m}$ erzeugen. Da $\chi(R/\mathfrak{m})\, 1_R = a \in (0) \cup \mathrm{NNT}(R)$, finden wir ein vollständiges Parametersystem $y_1, \ldots, y_d$ von R derart, dass $a = y_1$, falls $a \neq 0$. Dann ist $S = I[[y_1, \ldots, y_d]]$ ein lokaler, kompletter Ring mit dem Maximalideal $\mathfrak{n} = \sum y_i S$. Weil $y_1, \ldots, y_d$ ein vollständiges Parametersystem bilden, ist offenbar $R/\mathfrak{n}R$ ein endlicher S-Modul. Nach [2, (30.6)] ist dann auch R ein endlicher S-Modul, und somit endlich und ganz über S. Daraus folgt insbesondere $\dim(S) = \dim(R) = d$. Also ist S regulär.

Bemerkung. Der Beweis von (3.3) d) ist eine fast wörtliche Verallgemeinerung des Beweises von [2, (31.6)].

4. D-Endlichkeit

Wir interessieren uns nun dafür, wann $D_R^{(n)}(M)$ für möglichst viele n ein endlicher R-Modul ist. Nach (2.6) ist dies für $\delta_R(M) > 0$ genau dann der Fall, wenn $D_R^{(\delta_R(M)-1)}$ $\times(M)$ endlich ist. Deshalb definieren wir:

(4.1) DEFINITION. Sei R noethersch, M ein endlicher R-Modul. Ist $\delta_R(M) > 0$ so setzen wir $D_R(M) = D_R^{(\delta_R(M)-1)}(M)$. Für $D_R(R)$ schreiben wir $D(R)$. Wir nennen M D-endlich über R, falls $\delta_R(M) = 0$, oder falls $\delta_R(M) > 0$ und $D_R(M)$ ein endlicher R-Modul ist. Ist R über sich selbst D-endlich, so nennen wir R kurz D-endlich.

(4.2) LEMMA. *Sei* R *noethersch und* M *ein endlicher* R*-Modul. Dann gilt:*

a) $N \subseteq M$, $\mathrm{NNT}_R(N) = \mathrm{NNT}_R(M)$ *und* M *D-endlich* $\Rightarrow N$ *D-endlich.*

b) $\delta_R(M) \leqslant 1 \Rightarrow M$ *D-endlich über* R.

c) M *D-endlich über* $R \Rightarrow M$ *D-endlich über* $R/\mathrm{ann}_R(M)$.

d) *Ist* R' *eine endliche, ganze Erweiterung von* R, *so folgt:* R' *D-endlich über* $R \Rightarrow R'$ *D-endlich über sich selbst.*

e) *Ist* $\delta(R) > 0$, *so ist* R *genau dann D-endlich, wenn es in* $Q(R)$ *eine endliche, ganze Erweiterung* R' *von* R *gibt, für welche* $\delta(R'/a'R') \geqslant \delta(R') - 1$, *für alle* $a' \in \mathrm{NNT}(R')$.

f) *Ist* $R' \subseteq Q(R)$ *eine endliche, ganze Erweiterung von* R, *so ist* R' *genau dann D-endlich, wenn* R *es ist.*

g) *Ist* R *halblokal und* $M \otimes R^*$ *D-endlich, so ist* $D_R^{(\delta^*_R(M)-1)}(M)$ *ein endlicher* R*-Modul.*

Beweis. a) folgt aus $\delta_R(M)=\delta_R(N)$, b) aus $D_R^{(0)}(M)=M$, und c) ergibt sich aus (2.7) a).

d) Nach (1.3) a) ist $\delta_R(R')=\delta(R')$. Nach (2.7) c) folgt das Gewünschte.

e) ist klar aus (2.8).

f) „$\Rightarrow$“. Nach (1.3) ist $\delta(R)=\delta(R')=\delta_R(R')$, und aus (4.2) b) und e) folgt aus der D-Endlichkeit von R' jene von R. „$\Leftarrow$“. Ist $\delta(R)\leqslant 1$, so folgt die D-Endlichkeit von R' mit (4.2) b). Ist $\delta(R)>0$, so ist $D(R)=\bigcup (R:\mathfrak{a})_{Q(R)}$ ein endlicher R-Modul, wo $\mathfrak{a}$ die Ideale von R mit $\dim(R/\mathfrak{a})<\delta(R)-1$ durchläuft. Andrerseits finden wir ein $s\in \mathrm{NNT}(R)$ mit $sR'\subseteq R$, und es folgt $sD_R(R')=s\bigcup(R':\mathfrak{a})_{Q(R)}=$ $=\bigcup s(R':\mathfrak{a})_{Q(R)}=\bigcup (sR':\mathfrak{a})_{Q(R)}\subseteq\bigcup (R:\mathfrak{a})_{Q(R)}$, und es ist $D_R(R')=D(R')$ ein endlicher R-Modul.

g) Sei $\mathfrak{J}=\{\mathfrak{a}\subseteq R \text{ Ideal} \mid \dim(R/\mathfrak{a})<\delta^*(M)-1\}$. Unter Beachtung von $\dim(R/\mathfrak{a})$ $=\dim(R^*/\mathfrak{a}R^*)$ folgt dann $D=D_R^{(\delta^*{}_R(M)-1)}(M)\subseteq\bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{J}}(M\otimes_R R^*:\mathfrak{a}R^*)_{Q_R(M\otimes_R R^*)}$ $\subseteq D(R^*)$, und DR^* ist ein endlicher R^*-Untermodul von $Q_R\,(M\otimes_R R^*)$. Somit gibt es ein $s\in\mathrm{NNT}_R(M)$ mit $sD\subseteq(M\otimes_R R^*)\cap Q_R(M)=M$, wobei die Gleichheit aus der Treuflachheit von R^* über R folgt.

(4.3) LEMMA. *Sind $R_1,\dots,R_n$ noethersch und D-endlich, so ist es auch $R_1\times\cdots\times R_n$.*

Beweis. Sofort aus $\delta(R_1\times\cdots\times R_n)=\min\delta(R_i)$ und $\mathrm{der}(R_1\times\cdots\times R_n)=\mathrm{der}(R_1)\times\cdots\times\mathrm{der}(R_n)$ mit (4.2) a) und d).

(4.4) LEMMA. *Sei R noethersch und M ein endlicher R-Modul. Sei N ein Untermodul von M mit* $\mathrm{NNT}_R(M)\subseteq\mathrm{NNT}_R(M/N)$ *und seien N und M/N D-endlich über R. Dann ist M D-endlich.*

Beweis. Sei $S=\mathrm{NNT}_R(M)$. Nach (4.2) a) können wir annehmen $\delta_R(M)>0$. Nach (1.2) e) folgt nun, dass $\delta_R(N)$, $\delta_R(M/N)\geqslant\delta_R(M)>0$, und daraus sehen wir, dass $D_R(N)=D_R^{(\delta_R(N)-1)}(N)$ und $D_R(M/N)=D_R^{(\delta_R(M/N)-1)}$ endliche R-Moduln sind. Nach (2.2) c) sind dann erst recht $D_{R,S}^{(\delta_R(M)-1)}(N)$ und $D_{R,S}^{(\delta_R(M)-1)}(M/N)$ endliche R-Moduln. Wir finden also Elemente $s,t\in S$ derart, dass $s(N:\mathfrak{a})_{N_S}\subseteq N$, $t(M/N:\mathfrak{a})_{(M/N)_S}$ $\subseteq M/N$, also $t(M:\mathfrak{a})_{M_S}\subseteq M+N_S$ für alle Ideale $\mathfrak{a}\subseteq R$ mit $\dim(R/\mathfrak{a})<\delta_R(M)-1$. Ist nun $x\in D_R(M)$, so finden wir ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\dim(R/\mathfrak{a})<\delta_R(M)-1$ derart, dass $x\in(M:\mathfrak{a})_{M_S}$, und es folgt $tx=m+(n/u)$ mit geeigneten $m\in M$, $n\in N$ und $u\in S$. Weiter gilt $\mathfrak{a}(n/u)=\mathfrak{a}(tx-m)\subseteq\mathfrak{a}tx+\mathfrak{a}m\subseteq M\cap N_S$. Wegen $S\subseteq\mathrm{NNT}_R(M/N)$ ist aber $M\cap N_S=N$. So folgt schliesslich $stx=sm+s(n/u)\in M$, und wir sehen dass $st\,D_R(M)$ $\subseteq M$.

(4.5) *Ist R noethersch, M ein endlicher R-Modul und $R/\mathfrak{a}$ D-endlich für alle Ideale $\mathfrak{a}$ von R mit* $\mathrm{ann}_R(M)\subseteq\mathfrak{a}$ *und* $\mathrm{NNT}_R(M)\subseteq\mathrm{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$, *so ist M über R D-endlich.*

Beweis. Sei wieder $S = \mathrm{NNT}_R(M)$. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der minimalen Länge $h(M)$ aller R-Erzeugendensysteme von M. Ist $h(M)=1$, so ist die Behauptung wegen $M \simeq R/\mathrm{ann}(R)$ richtig.

Sei also der Satz richtig für alle R-Moduln N mit $h(N) \leqslant n$ und sei $M = N + mR$, $N = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\mathrm{ann}_R(N) \subseteq \mathfrak{a}$ und $\mathrm{NNT}_R(N) \subseteq \mathrm{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$, so folgt $\mathrm{ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{a}$ und $\mathrm{NNT}_R(M) \subseteq \mathrm{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$; nach Voraussetzung ist also $R/\mathfrak{a}$ D-endlich. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit N D-endlich über R.

Sei nun $\mathfrak{a} = \mathrm{ann}_R(M/N)$. Nun finden wir bekanntlich ein $s \in S$ derart, dass $\mathrm{NNT}_R(R/(\mathfrak{a}:s)_R) \subseteq S$. Setzen wir $\hat{M} = N + smR$, so folgt $\mathrm{ann}_R(\hat{M}/N) = (N:smR)_R = (\mathfrak{a}:s)_R = \mathfrak{b} \supseteq \mathrm{ann}_R(M)$, und nach Voraussetzung ist $R/\mathfrak{b}$, also auch $\hat{M}/N$, D-endlich über R. Nach (4.4) ist dann $\hat{M}$ über R D-endlich. Wegen $\mathrm{NNT}_R(sM) = \mathrm{NNT}_R(\hat{M})$, $sM \subseteq M$ folgt daraus mit (4.2) a) die Behauptung.

(4.6) KOROLLAR. *Ist R ein D-endlicher, noetherscher Integritätsbereich, so ist jeder endliche, torsionfreie R-Modul über R D-endlich. Insbesondere ist jeder endliche, torsionsfreie Modul über einem lokalen, regulären Ring D-endlich.*

Beweis. Wegen $\mathrm{NT}_R(M) = (0)$ ist nach (4.5) die D-Endlichkeit von R für jene von M hinreichend. Ist R regulär und lokal, so gilt bekanntlich $\delta(R/aR) = \delta(R) - 1 = \dim(R) - 1$ für alle $a \in R - (0)$, und nach (2.2) a) ist R D-endlich.

(4.7) SATZ. *Ist $(R, \mathfrak{m})$ lokal und komplett, und ist M ein endlicher, charakterischer R-Modul, so ist M über R D-endlich.*

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen $\delta_R(M) > 0$. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R mit $\mathrm{ann}_R(M) \subseteq \mathfrak{a}$ und $\mathrm{NNT}_R(M) \subseteq \mathrm{NNT}_R(R/\mathfrak{a})$. Nach (4.5) haben wir die D-endlichkeit von $R/\mathfrak{a}$ nachzuweisen. Da $R/\mathfrak{a}$ nach (3.2) charakterisch ist, heisst das, dass wir $M = R$ annehmen dürfen. Nach (3.3) d) finden wir einen lokalen, regulären, kompletten Ring S, über dem R eine endliche, ganze Erweiterung ist. Nach (4.2) d) genügt es demnach, die D-Endlichkeit von R über S nachzuweisen. Dies soll durch vollständige Induktion nach $\Delta(R)$ geschehen.

Ist $\Delta(R) = 0$, so ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ $\dim(R/\mathfrak{p}) = \dim(R) = \dim(S)$, und weil R ganz und S ein Integritätsbereich ist, folgt $\mathfrak{p} \cap S = (0)$. Somit ist $\mathrm{NT}_S(R) = S \cap \mathrm{NT}(R) = S \cap \bigcup \mathrm{Ass}(R) = (0)$, also R über S torsionfrei, mithin nach (4.6) D-endlich.

Sei nun $\Delta(R) > 0$. Nach (4.5) haben wir zu zeigen, dass $\bar{S} = S/\mathfrak{b}$ D-endlich ist für jedes Ideal $\mathfrak{b}$ von S mit $\mathrm{NNT}_S(R) \subseteq \mathrm{NNT}_S(\bar{S})$. Ist $\mathfrak{b} = (0)$, also $\bar{S} = S$, so folgt dies aus (4.6). Sei also $\mathfrak{b} \neq (0)$. Dann folgt $\dim(\bar{S}) < \dim(S)$. Wegen $\mathrm{NNT}_S(R) \subseteq \mathrm{NNT}_S(\bar{S})$ folgt mit (1.3) aber auch $\delta(\bar{S}) = \delta_S(\bar{S}) \geqslant \delta_S(R) = \delta(R)$, und wir erhalten $\Delta(\bar{S}) = \dim(\bar{S}) - \delta(\bar{S}) < \dim(S) - \delta(R) = \dim(R) - \delta(R) = \Delta(R)$. Sei nun $\mathfrak{n}$ das Maximalideal von S. Dann gilt $\mathfrak{n} = S \cap \mathfrak{m}$, also $\chi(R/\mathfrak{m}) = \chi(S/\mathfrak{n})$. Daraus entnimmt man $\chi(S/\mathfrak{n})\, 1_S = \chi(R/\mathfrak{m})\, 1_S \in (0) \cup \mathrm{NNT}_S(\bar{S})$, also dass $\bar{S}$ charakterisch ist. Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun die D-Endlichkeit von $\bar{S}$.

(4.8) KOROLLAR. *Sei R lokal und M ein endlicher, charakterischer R-Modul. Dann sind* $\mathfrak{P}_{R^*}^{(\delta_R(M)-1)}(M \otimes_R R^*)$ *und* $\mathfrak{P}_R^{(\delta^*_R(M)-1)}(M)$ *endlich.*

Beweis. Sofort aus (3.2) c) (4.7), (2.5) und (4.2) g).

Nun wollen wir das Bewiesene auf lokale Integritätsbereiche anwenden. Dazu setzen wir $\mathfrak{R}(R)=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R) \mid \Delta^*(R/\mathfrak{p})>\Delta^*(R)\}$, $\mathfrak{S}(R)=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R) \mid \exists a\in\operatorname{NNT}(R) \times$ *mit* $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(R/aR)\}$, wo R ein halblokaler Ring ist.

(4.9) KOROLLAR. *Sei R ein lokaler Integritätsbereich. Dann gibt es nur endlich viele* $\mathfrak{p}\in\mathfrak{S}(R)$ *mit* $\delta^*(R/\mathfrak{p})<\delta^*(R)-1$. *Insbesondere ist also* $\mathfrak{R}(R)\cap\mathfrak{S}(R)$ *endlich, und es gibt in* $\mathfrak{R}(R)$ *nur endlich viele* $\mathfrak{p}$ *vom Rang* 1. *Ist* $\delta^*(R)>0$, *so gibt es in* $Q(R)$ *eine endliche ganze Erweiterung* R' *von* R, *für welche* $\delta(R'/a'R')\geqslant\delta^*(R')-1$ *für alle* $a'\in R'-(0)$.

Beweis. Man wende (4.8) an, unter Beachtung von $\operatorname{Ass}_{R^*}(R^*/aR^*)=\bigcup \operatorname{Ass}_{R^*} \times (R^*/\mathfrak{p}R^*)$ $(\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}_R(R/aR))$ und $R^*/aR^*=(R/aR)^*$.

5. Quasi-M-Folgen

(5.1) DEFINITION. Sei M ein R-Modul und $x_1,\dots,x_r\in R$. $(x_1,\dots,x_r)$ heisse eine Quasi-M-Folge (bezüglich R) genau dann wenn:

1) $x_1\in\operatorname{NNT}_R(M)$.

2) Falls $r>1$ ein R-Untermodul N von $Q_R(M)$ derart existiert, dass $M\subseteq N$, mit einem geeigneten $s\in\operatorname{NNT}_R(M)$ gilt $sN\subseteq M$, und weiter $(x_2,\dots,x_r)$ eine Quasi-N/x_1N-Folge ist.

Insbesondere ist zu beachten, dass man im Fall, wo R noethersch und M endlich ist über R, einfach verlangen kann, dass $H\subseteq N\subseteq Q_R(M)$ und N endlich erzeugt ist.

Setzt man in (5.1) $N=M$, so erhält man den Begriff der M-Folge (s. [1, pg. 99 ff.]). Insbesondere gilt also:

(5.2) LEMMA. *Jede M-Folge ist auch Quasi-M-Folge.*

(5.3) LEMMA. *Sei M ein R-Modul und* $x_1,\dots,x_r$ *eine Quasi-M-Folge bezüglich R. Dann gilt:*

a) *Ist* $\hat{R}$ *eine flache R-Algebra und* $\hat{x}_i$ *das kanonische Bild von* x_i *in* $\hat{R}$, *so ist* $\hat{x}_i,\dots,\hat{x}_r$ *eine Quasi-*$M\otimes_R\hat{R}$*-Folge bezüglich* $\hat{R}$.

b) *Ist R noethersch und M endlich erzeugt über R, und liegen weiter alle* x_i *in* $\operatorname{Rad}(R)$, *so folgt* $r\leqslant\delta_R(M)$.

c) *Ist R überdies halblokal, so folgt sogar* $r\leqslant\delta_R^*(M)$.

d) *Ist R insbesondere lokal, so folgt* $\operatorname{depth}_R(M)\leqslant\delta_R^*(M)$.

Beweis. a) Wegen der Flachheit von $\hat{R}$ ist $\hat{x}_i\in\operatorname{NNT}_{\hat{R}}(M\otimes_R\hat{R})$. Sei nun N und s wie in (5.1) gewählt. Dann folgt aus der Flachheit von $\hat{R}$, dass $M\otimes_R\hat{R}\subseteq N\otimes_R\hat{R} \subseteq Q_{\hat{R}}(M\otimes_R\hat{R})$, $\hat{s}(N\otimes_R\hat{R})\subseteq M\otimes_R\hat{R}$, $\hat{s}\in\operatorname{NNT}_{\hat{R}}(M\otimes_R\hat{R})$. Nach Induktion können wir schliesslich annehmen, es sei $(\hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_r)$ eine Quasi-$(N/x_1) \otimes_R \hat{R}$-, also eine Quasi-$(N \otimes_R \hat{R}/\hat{x}_1 N \otimes_R \hat{R})$-Folge.

b) Für $r=1$ folgt die Behauptung sofort mit (1.2). Sei/also $r>1$ und N wie oben gewählt. Nach Induktion ist dann $\delta_R(N/x_1N) \geqslant r-1$, und nach (1.2) d) folgt $\delta_R(N) \geqslant r$, waraus mit (1.2) e) das Gewünschte folgt.

c) Nach (5.3) a) ist $x_1, \ldots, x_r$ eine Quasi-$M \otimes_R R^*$-Folge bezüglich R^*, und die Behauptung folgt mit (5.3) b).

d) folgt sofort aus (5.2) und (5.3) c).

(5.3) c) besagt, dass $\delta_R^*(M)$ im Fall, wo $(R, \mathfrak{m})$ lokal ist, mindestens gleich dem Maximum der Längen aller Quasi-M-Folgen aus $\mathfrak{m}$ ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass sogar die Gleichheit gilt, falls M über R charakterisch ist. Wir zeigen sogar noch mehr, nämlich:

(5.4) SATZ. *Sei* $(R, \mathfrak{m})$ *lokal,* M *ein endlicher, charakterischer* R*-Modul mit* $\delta_R^*(M) = \delta$ *und sei* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* R *mit* $\dim(R/\mathfrak{a}) = d$. *Dann finden wir* $x_1, \ldots, x_{\delta-d} \in \mathfrak{a}$ *derart, dass* $(x_1, \ldots, x_{\delta-d})$ *eine Quasi-*M*-Folge bilden.*

Beweis. (Induktion nach $\delta-d$) „$\delta-d=0$": trivial. „$\delta-d=1$". Wegen $d<\delta_R(M)$ finden wir nach (1.2) f) ein $x_1 \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{NNT}_R(M)$.

„$\delta-d>1$". Nach (4.7), (4.2) g) und (3.2) a) ist $D=D_R^{(\delta-1)}(M)$ ein endlicher, charakterischer R-Modul. Weiter ist $M \otimes_R R^* \subseteq D \otimes_R R^* \subseteq Q_{R^*}(M)$, also, nach (1.2) e), $\delta_R^*(D) = \delta$. Sei $S = \mathrm{NNT}_R(M)\, (= \mathrm{NNT}_R(D))$. Dann ist, nach (4.8) a), $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{p}^* \cap R \mid \mathfrak{p}^* \in \mathfrak{P}_{R^*, S}^{(\delta-1)}(D \otimes_R R^*)\}$ endlich. Weiter gehört, wegen der R-Flachheit von R^*, jedes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$ zu einem $\mathrm{Ass}_R(D/aD)$, wo $a \in S$ geeignet gewählt ist. Somit ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cup \mathrm{Ass}_R(D) \cup \mathrm{Ass}_R(D/\chi(R/\mathfrak{m})\,D)$ endlich, und nach (2.2) ist für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{Q}$ $\dim(R/\mathfrak{p}) \geqslant \delta-1$. Deshalb finden wir ein $x_1 \in \mathfrak{a} - \bigcup \mathfrak{Q}$. Wegen $x_1 \notin \bigcup \mathfrak{P}$ folgt dann mit (1.2) d) $\delta_R^*(D/x_1D) = \delta-1$. Wegen $x_1 \notin \bigcup \mathrm{Ass}_R(D/\chi(R/\mathfrak{m})\,D)$ ist D/x_1D nach (3.2) d) charakterisch über R. Somit finden wir nach Induktionsvoraussetzung $x_2, \ldots, x_{\delta-d} \in \mathfrak{a}$, die eine Quasi-$D/x_1D$-Folge bilden, und wir sehen, dass $(x_1, \ldots, x_{\delta-d})$ eine Quasi-M-Folge ist.

(5.5) KOROLLAR. *Ist* $(R, \mathfrak{m})$ *lokal und* M *ein endlicher, charakterischer* R*-Modul, so ist* $\delta^*(M)$ *gleich dem Maximum der Längen aller Quasi-*M*-Folgen mit Elementen aus* $\mathfrak{m}$.

Beweis. Sofort aus (5.3) c) und (5.4) mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$.

(5.6) KOROLLAR. *Ist* $(R, \mathfrak{m})$ *lokal,* M *ein endlicher, charakterischer* R*-Modul und* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, *so gilt* $\delta_{R_\mathfrak{p}}^*(M_\mathfrak{p}) \geqslant \delta_R^*(M) - \dim(R/\mathfrak{p})$.

Beweis. Nach (5.4) finden wir $x_1, \ldots, x_{\delta^*_R(M)-\dim(R/\mathfrak{p})} \in \mathfrak{p}$, die eine Quasi-$M$-Folge bilden bezüglich R. Nach (5.3) a) sind die kanonischen Bilder dieser x_i eine Quasi-$M_\mathfrak{p}$-Folge bezüglich $R_\mathfrak{p}$, und mit (5.3) c) folgt die Behauptung.

(5.7) KOROLLAR. *Ist R ein lokaler Integritätsbereich und* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, *so gilt* $\Delta^*(R_\mathfrak{p}) \leqslant \Delta^*(R)$.

6. Lokalitäten

Wir wollen zum Schluss das Resultat (5.7) auf den Fall verallgemeinern, wo anstelle von $R_\mathfrak{p}$ irgendeine R-Lokalität R' steht. D.h. es soll angenommen werden $R' = \hat{R}_\mathfrak{p}$, wo $R[a_1, \ldots, a_n] = \hat{R}$ ein Integritätsbereich ist und wo $\hat{\mathfrak{p}}$ zu $\mathrm{Spec}(\hat{R})$ gehört. In dieser Situation wollen wir zeigen, dass $\Delta^*(R') \leqslant \Delta^*(R)$. Durch Induktion nach n und unter Anwendung von (5.7) sieht man leicht, dass man sich auf den Fall beschränken kann, wo $\hat{R} = R[a]$ und $\hat{\mathfrak{p}}$ ein Maximalideal von $\hat{R}$ ist, das über dem Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R liegt.

Ist a transzendent über R, so finden wir ein monisches Polynom $f \in R[a]$ derart, dass $\hat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}R[a] + fR[a]$. Dann ist $\hat{R}/f\hat{R}$ eine endliche, ganze, freie Erweiterung von R, und nach (1.3) d) ist $\delta^*(\hat{R}/f\hat{R}) = \delta^*(R)$. Andrerseits ist R'/fR' eine Lokalisierung von $\hat{R}/f\hat{R}$ nach einem Maximalideal, und nach (1.4) a) folgt $\delta^*(R'/fR') \geqslant \delta^*(R)$. Mit (1.2) d) ergibt sich nun $\delta^*(R') \geqslant \delta^*(R) + 1$, woraus, wegen $\dim(R') = \dim(R) + 1$, das Gewünschte folgt.

Sei nun a über algebraisch. Dann genügt es zu zeigen, dass $\delta^*(R') \geqslant \delta^*(R)$. Ist a zunächst ganz über R, so folgt dies sofort aus (1.3) d) und (1.4) a). Ist a nicht ganz, so ist es klar, dass wir ein $s \in R - (0)$ derart finden, dass sa über R ganz ist. Nach dem oben Bemerkten gilt dann $\delta^*(R'') \geqslant \delta^*(R)$, wo $R'' = R[sa]_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = R[as] \cap \hat{\mathfrak{p}}$. Weil aber $a \in Q(R'')$ heisst das, dass wir annehmen können, es sei $a \in Q(R)$. Wir beweisen nun das Gewünschte durch Induktion nach $\delta^*(R')$. Für $\delta^*(R') = 0$ folgt $\delta^*(R) = 0$ aus der Tatsache, dass dann $\mathfrak{m} = (0)$. Sei also $\delta^*(R') > 0$. Dann ist, nach dem soeben Bemerkten, $\delta^*(R) > 0$, und nach (4.9) finden wir in $Q(R)$ eine endliche, ganze Erweiterung D von R mit $\delta(D/dD) \geqslant \delta^*(D) - 1$, für alle $d \in D - (0)$. Mit (1.3) d) und (1.4) a) sieht man nun leicht, dass man anstelle von R irgendeine Lokalisierung von D nach einem Maximalideal wählen kann. D.h. wir können schliesslich annehmen, es gelte $\delta(R/sR) \geqslant \delta^*(R) - 1$ für alle $s \in R - (0)$. Sei nun X eine Unbestimmte. Dann können wir schreiben $\hat{R} = R[X]/\mathfrak{q}$, wo $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R[X])$ minimaler Primdivisor eines geeigneten Polynoms $f \in R[X] - (0)$ ist. Weiter finden wir ein Maximalideal $\mathfrak{n}$ von $R[X]$ derart, dass $\mathfrak{n}/\mathfrak{q} = \hat{\mathfrak{p}}$ und $\mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$.

Ist nun $\delta^*(R) > 1$, so ist, nach unserer Annahme über R, die Tiefe $\mathrm{depth}(R)$ von $R > 1$, also folgt $\mathrm{depth}(R[X]_\mathfrak{n}) > 2$. Daraus folgt $\mathrm{depth}(R[X]_\mathfrak{n}/fR[X]_\mathfrak{n}) > 1$, und nach (5.2) d) und (1.4) b) ist $\delta^*(R') > 1$. Insbesondere ist damit der Fall $\delta^*(R') = 1$ behandelt. Sei also $\delta^*(R') > 1$. Dann finden wir eine endliche, ganze Erweiterung R'' von R in $Q(R)$ derart, dass $\delta(R''/a''R'') \geqslant \delta^*(R'') - 1$ für alle $a'' \in R'' - (0)$. Sei $\mathfrak{m}'$ das Maximalideal von R' und $S = R' - \mathfrak{m}'$. Dann finden wir ein $u \in R - (0)$ derart, dass $\hat{R} \subseteq R[1/u]$ und $R'' \subseteq R[1/u]_S$, also $R''[1/u] = R[1/u]_S$. Nun betrachten wir die Menge

$\mathfrak{P}''=\{\mathfrak{p}''\in\mathfrak{S}(R'')\mid u\notin\mathfrak{p}'',\ \delta^*(R''/\mathfrak{p}'')<\delta^*(R'')\}$. Diese Menge ist offenbar unendlich, denn ist $r''\in\mathrm{Rad}(R'')\cap\mathrm{NNT}_{R''}(R''/uR'')$ beliebig gewählt, so folgt, wegen $\delta^*(R''/r''R'')<\delta^*(R'')$, mit (1.4) b) sofort, dass ein $\mathfrak{p}''\in\mathrm{Ass}_{R''}(R''/r''R'')$ zu $\mathfrak{P}''$ gehört. Sei nun $\mathfrak{p}''\in\mathfrak{P}''$; dann ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}''\cap R\neq(0)$, $\exists b\in\mathfrak{p}-(0)$ und nach [2, (12.6)] ist $\mathfrak{p}''\in\mathrm{Ass}_{R''}(R''/bR'')$. Wegen $u\notin\mathfrak{p}''$ und $S\cap\mathfrak{p}''=\emptyset$ folgt schliesslich, dass $\mathfrak{p}''R''[1/u]\subseteq\mathrm{Ass}(R[1/u]_S/bR[1/u]_S)$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}''R''[1/u]\cap R\in\mathrm{Ass}_R(R/bR)$, mithin, dass $\mathfrak{p}\in\mathfrak{S}(R)$. Da nun nach (4.9) die Menge der $\mathfrak{p}\in\mathfrak{S}(R)$ mit $\delta^*(R/\mathfrak{p})<\delta^*(R)-1$ endlich ist, folgt aus der Unendlichkeit von $\mathfrak{P}''$ leicht, dass es in $\mathfrak{P}''$ ein $\mathfrak{p}''$ derart gibt, dass $\delta^*(R/\mathfrak{p})\geqslant\delta^*(R)-1$, wo $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}''\cap R$ gesetzt ist. Setzen wir schliesslich $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}''\cap R$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung, dass $\delta^*(R/\mathfrak{p})\leqslant\delta^*(R'/\mathfrak{p}')$. So erhalten wir schliesslich mit (1.3) d) dass $\delta^*(R)-1\leqslant\delta^*(R/\mathfrak{p})\leqslant\delta^*(R'/\mathfrak{p}')=\delta^*(R''/\mathfrak{p}'')\leqslant\delta^*(R'')-1=\delta^*(R')-1$, und daraus folgt das Gewünschte.

Somit ist gezeigt:

(6.1) SATZ. *Ist R ein lokaler Integritätsbereich und R' eine R-Lokalität, so ist* $\Delta^*(R')\leqslant\Delta^*(R)$.

Insbesondere folgt nun auch:

(6.2) KOROLLAR. *Sei R halblokal, $a\in Q(R)$, $\hat{R}=R[a]$, $\hat{\mathfrak{m}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{m}}_n$ endlich viele Maximalideale von $\hat{R}$ derart, dass $\hat{\mathfrak{m}}_i\cap R$ ein Maximalideal von R ist für $i=1,\dots,n$, und sei $\hat{S}=\hat{R}-\bigcup\hat{\mathfrak{m}}_i$. Dann gilt $\delta^*(\hat{R}_{\hat{S}})\geqslant\delta^*(R)$.*

Beweis. Nach (1.4) ist sofort klar, dass wir uns auf den Fall beschränken können, wo $(R,\mathfrak{m})$ lokal und $n=1$ ist. Sei $\hat{\mathfrak{m}}_1=\mathfrak{m}$, $\hat{R}_{\hat{\mathfrak{m}}}=R'$. Nach (1.4) finden wir ein $\mathfrak{p}'\in\mathrm{Ass}(R')$ derart, dass $\delta^*(R')=\delta^*(R'/\mathfrak{p}')$. Es gibt somit ein $\hat{\mathfrak{p}}\in\mathrm{Ass}(\hat{R})$ mit $\mathfrak{p}'=\hat{\mathfrak{p}}R'$, $\hat{\mathfrak{p}}\subseteq\mathfrak{m}$. Setzen wir $\hat{\mathfrak{p}}\cap R=\mathfrak{p}$ so folgt, wegen $a\in Q(R)$, und weil nun deshalb insbesondere auch $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)$, dass $\hat{R}/\hat{\mathfrak{p}}$ eine einfache Erweiterung von $R/\mathfrak{p}$ in $Q(R/\mathfrak{p})$ ist, und dass $\hat{m}/\hat{\mathfrak{p}}\cap R/\mathfrak{p}=\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. Nach dem zu (6.1) Bewiesenen ist somit $\delta^*(R/\mathfrak{p})\leqslant\delta^*(R'/\mathfrak{p}')$. Da, nach (1.4), $\delta^*(R)\leqslant\delta^*(R/\mathfrak{p})$, sind wir fertig.

Bemerkung: Die vorliegende Arbeit enthält die wichtigsten Resultate der Dissertation des Verfassers, welche in den Jahren 1972–73 unter der Anleitung von Herrn Prof. Habicht in Basel entstanden ist, dem an dieser Stelle für seine Unterstützung gedankt sei.

Die Resultate (4.8) und (4.9) wurden im Fall $\Delta^*(R)=0$, $M=R$, mit anderen Methoden auch von L. J. Ratliff jr. gefunden. (s. [4])

LITERATUR

[1] MATSUMURA, H., *Commutative algebra*, Nagoya (1969), Math. Lecture Note Series, W. A. Benjamin, New York, 1970.

[2] NAGATA, M., *Local rings*, Kyoto (1960), Interscience Publishers, New York, 1960.

[3] NAGATA, M., *On the chain problem of prime ideals*, Nagoya Math. J. *10* (1956).
[4] RATLIFF, L. J., *Three theorems on embedded prime divisors of principal ideals*, Pac. J. of Math. *49* (1973).

Mathematisches Institut Basel

Eingegangen den 5. September 1974