Über den ersten Eigenwert des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen

HEINZ HUBER (Basel)

1. Einleitung

1.1. Es sei M_g die Menge der kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $g \geqslant 2$. Auf jeder Fläche $\mathscr{F} \in M_g$ gibt es genau eine Riemannsche Metrik mit konstanter Krümmung -1, welche mit der konformen Struktur von $\mathscr{F}$ verträglich ist. Es sei $\Delta_{\mathscr{F}}$ der Laplace-Beltrami-Operator bezüglich dieser Metrik und $\lambda_1(\mathscr{F})$ der kleinste positive Eigenwert von $\Delta_{\mathscr{F}}$. (Das Spektrum von $\Delta_{\mathscr{F}}$ ist diskret; $\lambda_0 = 0$ ist ein einfacher Eigenwert, alle übrigen Eigenwerte sind positiv [1]). In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden:

(A) $\Lambda_1(g) = \sup\{\lambda_1(\mathscr{F}) \mid \mathscr{F} \in M_g\} < \infty$.

(B) $\overline{\lim\limits_{g \to \infty}}\, \Lambda_1(g) \leqslant \frac{1}{4}$.

1.2. Wir führen jetzt den Beweis von A und B auf zwei Hilfssätze zurück.

Die Differentialgleichung

$$(x^2-1)\,F''(x) + 2xF'(x) + \mu F(x) = 0, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

besitzt genau eine Lösung

$$F_\mu \in C^2[1,\infty), \quad F_\mu(1) = 1. \tag{2}$$

Für $\mu > \frac{1}{4}$ besitzt F_μ Nullstellen in $[1,\infty)$. (Siehe 3.1). Es sei $a(\mu) > 1$ die kleinste dieser Nullstellen und

$$q(\mu) = \left(\int_1^{a(\mu)} F_\mu\,dx\right)^2 \Big/ \int_1^{a(\mu)} F_\mu^2\,dx. \tag{3}$$

Wir werden zeigen:

LEMMA 1. *Für $\mu > \frac{1}{4}$, $\mathscr{F} \in M_g$, $g \geqslant 2$ gilt:*

$$\mu \geqslant \lambda_1(\mathscr{F})\left(1 - \frac{q(\mu)}{2(g-1)}\right).$$

LEMMA 2. *Für* $\mu>2$ *gilt:* $q(\mu)\leqslant 6\mu/(\mu-2)^2$.

Wegen Lemma 2 gibt es eine Zahl $\mu_0>2$ derart, dass

$$1-\frac{q(\mu_0)}{2(g-1)}\geqslant\tfrac{1}{2}\quad\forall g\geqslant 2.$$

Dann folgt aber aus Lemma 1:

$$\lambda_1(\mathscr{F})\leqslant 2\mu_0\quad\forall\mathscr{F}\in M_g,\quad g\geqslant 2.$$

Damit ist A bewiesen. Wegen

$$1-\frac{q(\mu)}{2(g-1)}>0\quad\forall g>1+\frac{q(\mu)}{2},\quad\mu>\tfrac{1}{4}$$

folgt aus Lemma 1:

$$\Lambda_1(g)\leqslant\frac{\mu}{1-\dfrac{q(\mu)}{2(g-1)}}\quad\forall g>1+\frac{q(\mu)}{2},\quad\mu>\tfrac{1}{4}.$$

Daraus ergibt sich: $\overline{\lim}_{g\to\infty}\Lambda_1(g)\leqslant\tfrac{1}{4}$.

2. Beweis von Lemma 1

2.1. Wir betrachten ein festes $\mu>\tfrac{1}{4}$, schreiben F, a für F_μ, $a(\mu)$ und definieren:

$$f=\begin{cases}F^{1+\varepsilon} & \text{in}\quad[1,a]\\ 0 & \text{in}\quad[a,\infty),\quad 0<\varepsilon<1.\end{cases}\tag{4}$$

Dann gilt:

$$f\in C^1[1,\infty),\tag{5}$$

f'' ist stetig in $[1,\infty)$ mit Ausnahme von a. An dieser Stelle ist aber $f''(x)=$ $=O(|x-a|^{-(1-\varepsilon)})$ und somit gilt:

$$f''\in\mathscr{L}^1[1,\infty).\tag{6}$$

Daher kann man mit dem Glättungsverfahren von Friedrichs eine Folge $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$f_n\in C^\infty[1,\infty),\quad f_n=0\quad\text{in}\quad[2a,\infty),\tag{7}$$

$$f_n\to f, f_n'\to f'\quad\text{gleichmässig in }[1,\infty),\tag{8}$$

$$\int_1^\infty|f_n''-f''|\,dx\to 0.\tag{9}$$

Definieren wir

$$L=(x^2-1)\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}, \tag{10}$$

so gilt:

$$L(f)\in\mathscr{L}^1[1,\infty), \tag{11}$$

$$\int_1^\infty |L(f_n)-L(f)|\,dx\to 0. \tag{12}$$

Aus (4) und der Differentialgleichung (1) ergibt sich leicht:

$$L(f)+(1+\varepsilon)\,\mu f\geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1,\infty). \tag{13}$$

2.2. Mit Hilfe von f, f_n definieren wir gewisse Funktionen in der hyperbolischen Ebene. Als Modell dieser Ebene wählen wir den Einheitskreis

$$H=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$$

versehen mit der Riemannschen Metrik

$$ds^2=4\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2},$$

welche die Krümmung -1 besitzt. Für die hyperbolische Distanz $\varrho(0,z)$ ergibt sich dann:

$$\operatorname{Cos}\varrho(0,z)=\frac{1+|z|^2}{1-|z|^2}. \tag{14}$$

Führen wir im Nullpunkt geodätische Polarkoordinaten

$$\varrho=\varrho(0,z), \qquad \psi=\arg z$$

ein, so wird

$$ds^2=d\varrho^2+\operatorname{Sin}^2\varrho\,d\psi^2.$$

Daher erhält man für das Flächenelement und den Laplace-Beltrami-Operator:

$$d\omega=\operatorname{Sin}\varrho\,d\varrho\,d\psi \tag{15}$$

$$-\Delta=\frac{1}{\operatorname{Sin}\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\operatorname{Sin}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)+\frac{1}{\operatorname{Sin}^2\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}. \tag{16}$$

Jetzt definieren wir

$$\vartheta(z)=f(\operatorname{Cos}\varrho(0,z)), \quad \vartheta_n(z)=f_n(\operatorname{Cos}\varrho(0,z)). \tag{17}$$

Da $\operatorname{Cos}\varrho$ wegen (14) eine C^∞-Funktion auf H ist, so folgt jetzt aus den in 2.1 aufgezählten Eigenschaften von f, f_n und aus (15), (16):

$$\vartheta \in C_0^1(H), \quad \vartheta \in C^2(H-\gamma), \quad \gamma = \left\{ z \;\middle|\; |z| = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{1/2} \right\}, \tag{18}$$

$$\Delta\vartheta = -(Lf)(\operatorname{Cos}\varrho) \in \mathscr{L}^1(H), \tag{19}$$

$$\Delta\vartheta \leqslant (1+\varepsilon)\,\mu\vartheta \quad \text{in} \quad H-\gamma, \tag{20}$$

$$\vartheta_n \in C_0^\infty(H), \tag{21}$$

$$\vartheta_n \to \vartheta \quad \text{gleichmässig auf } H, \tag{22}$$

$$\int_H |\Delta\vartheta_n - \Delta\vartheta| \, d\omega \to 0, \tag{23}$$

$$\int_H \vartheta \, d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon} \, dx. \tag{24}$$

2.3. Es sei jetzt $\mathscr{F} \in M_g$, $g \geqslant 2$. Dann wird H zur universellen Ueberlagerungsfläche von $\mathscr{F}$ durch eine konforme Projektion $\Pi: H \to \mathscr{F}$. Mit dieser Projektion können wir die Differentialgeometrie von H auf $\mathscr{F}$ verpflanzen. Der Einfachheit halber bezeichnen wir den Laplace-Operator und das Flächenelement auf $\mathscr{F}$ wieder mit Δ und $d\omega$. Die zur Projektion Π gehörige Deckgruppe Γ hat folgende Eigenschaften:

(I) Die Elemente $T \in \Gamma$ sind Isometrien von H. Verstehen wir unter $T\vartheta$ die Funktion $z \to \vartheta(T(z))$, so gilt daher

$$\Delta T = T\Delta \quad \forall T \in \Gamma.$$

(II) Γ wirkt stark diskontinuierlich auf H: Sind K_1, K_2 Kompakta in H, so ist die Menge

$$\{T \in \Gamma \mid T(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

endlich.

(III) Γ besitzt einen kompakten Fundamentalbereich $A \subset H$, und es gilt:

$$\int_A d\omega = \int_{\mathscr{F}} d\omega = 4\pi(g-1). \tag{25}$$

Da ϑ, ϑ_n kompakten Support in H besitzen, können wir nun wegen (II) definieren:

$$\Theta = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta, \quad \Theta_n = \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta_n. \tag{26}$$

Diese Funktionen sind offensichtlich automorph bezüglich der Deckgruppe Γ. Daher gibt es auf $\mathscr{F}$ eindeutige Funktionen φ, φ_n derart, dass

$$\varphi\circ\Pi=\Theta, \quad \varphi_n\circ\Pi=\Theta_n. \tag{27}$$

Aus (27), (26) und (18)–(23) ergibt sich nun:

$$\varphi\in C^1(\mathscr{F}), \qquad \varphi\in C^2(\mathscr{F}-\Pi(\gamma)), \tag{28}$$

($\Pi(\gamma)$ ist eine geschlossene Kurve auf $\mathscr{F}$, welche endlich viele mehrfache Punkte besitzen kann),

$$\Delta\varphi\leqslant(1+\varepsilon)\,\mu\varphi \quad \text{auf} \quad \mathscr{F}-\Pi(\gamma), \tag{29}$$

$$\Delta\varphi\in\mathscr{L}^1(\mathscr{F}), \tag{30}$$

$$\varphi_n\in C^\infty(\mathscr{F}), \tag{31}$$

$$\varphi_n\to\varphi \quad \text{gleichmässig auf} \quad \mathscr{F} \tag{32}$$

$$\int\limits_{\mathscr{F}} |\Delta\varphi_n-\Delta\varphi|\,d\omega\to 0. \tag{33}$$

Das beruht alles, wie leicht einzusehen, auf den Eigenschaften (I)–(III) von Γ und auf der Tatsache, dass ϑ, ϑ_n kompakten Support in H besitzen. Aus (32), (33) ergibt sich noch

$$\int\limits_{\mathscr{F}} \varphi_n\,\Delta\varphi_n\,d\omega\to\int\limits_{\mathscr{F}}\varphi\,\Delta\varphi\,d\omega, \tag{34}$$

denn:

$$\left|\int\limits_{\mathscr{F}}\varphi_n\,\Delta\varphi_n\,d\omega-\int\limits_{\mathscr{F}}\varphi\,\Delta\varphi\,d\omega\right|=\left|\int\limits_{\mathscr{F}}\varphi_n(\Delta\varphi_n-\Delta\varphi)\,d\omega+\int\limits_{\mathscr{F}}\Delta\varphi\,(\varphi_n-\varphi)\,d\omega\right|$$
$$\leqslant\|\Delta\varphi_n-\Delta\varphi\|_1\cdot\sup_{\mathscr{F}}|\varphi_n|+\|\Delta\varphi\|_1\cdot\sup_{\mathscr{F}}|\varphi_n-\varphi|.$$

2.4. Für den Beweis von Lemma 1 ist es von grosser Bedeutung, dass man die Integrale über $\mathscr{F}$ von φ und φ^2 recht explizit berechnen bezw. abschätzen kann:

$$\int\limits_{\mathscr{F}}\varphi\,d\omega=\int\limits_{A}\Theta\,d\omega=\sum_{T\in\Gamma}\int\limits_{A}T\vartheta\,d\omega$$
$$=\sum_{T\in\Gamma}\int\limits_{T(A)}\vartheta\,d\omega=\int\limits_{H}\vartheta\,d\omega.$$

Somit erhalten wir wegen (24)

$$\int_{\mathscr{F}} \varphi\, d\omega = 2\pi \int_1^a F^{1+\varepsilon}\, dx \tag{35}$$

Es wird im folgenden sehr wichtig sein, dass der Wert dieses Integrals unabhängig ist von der Wahl der Fläche $\mathscr{F} \in M_g$. Das Integral von φ^2 ist dagegen von $\mathscr{F}$ abhängig; man kann aber eine von $\mathscr{F}$ unabhängige untere Schranke angeben: Wegen $\vartheta \geqslant 0$ gilt nämlich

$$\Theta^2 = \Big(\sum_{T \in \Gamma} T\vartheta\Big)^2 = \sum_{S,\, T \in \Gamma} (S\vartheta)(T\vartheta) \geqslant \sum_{T \in \Gamma} T\vartheta^2 .$$

Daraus folgt nun wie oben:

$$\int_{\mathscr{F}} \varphi^2\, d\omega \geqslant 2\pi \int_1^a F^{2(1+\varepsilon)}\, dx . \tag{36}$$

2.5. Der Eigenwert $\lambda_1(\mathscr{F})$ kann bekanntlich durch eine Extremaleigenschaft charakterisiert werden (siehe z.B. [1]):

$$\int_{\mathscr{F}} \psi\, \Delta\psi\, d\omega \geqslant \lambda_1(\mathscr{F}) \int_{\mathscr{F}} \psi^2\, d\omega \tag{37}$$

$$\forall \psi \in C^\infty(\mathscr{F}), \quad \int_{\mathscr{F}} \psi\, d\omega = 0 \tag{38}$$

Wegen (31) und (25) erfüllt

$$\psi = \varphi_n - \alpha_n, \quad \alpha_n = \frac{1}{4\pi(g-1)} \int_{\mathscr{F}} \varphi_n\, d\omega$$

die Voraussetzungen (38). Somit folgt aus (37) wegen $\int_{\mathscr{F}} \Delta\varphi_n\, d\omega = 0$:

$$\int_{\mathscr{F}} \varphi_n\, \Delta\varphi_n\, d\omega \geqslant \lambda_1(\mathscr{F}) \left(\int_{\mathscr{F}} \varphi_n^2\, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left(\int_{\mathscr{F}} \varphi_n\, d\omega \right)^2 \right).$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus wegen (32) und (34):

$$\int_{\mathscr{F}} \varphi\, \Delta\varphi\, d\omega \geqslant \lambda_1(\mathscr{F}) \left(\int_{\mathscr{F}} \varphi^2\, d\omega - \frac{1}{4\pi(g-1)} \left(\int_{\mathscr{F}} \varphi\, d\omega \right)^2 \right). \tag{39}$$

Wegen $\varphi \geqslant 0$ und (29) gilt aber

$$(1+\varepsilon)\,\mu \int_{\mathscr{F}} \varphi^2\, d\omega \geqslant \int_{\mathscr{F}} \varphi\, \Delta\varphi\, d\omega .$$

Somit folgt aus (39):

$$(1+\varepsilon)\,\mu \geqslant \lambda_1(\mathscr{F}) \left[1 - \frac{1}{4\pi(g-1)} \frac{\left(\int_{\mathscr{F}} \varphi\, d\omega\right)^2}{\int_{\mathscr{F}} \varphi^2\, d\omega} \right]$$

Daraus und aus (35), (36) ergibt sich:

$$(1+\varepsilon)\,\mu \geqslant \lambda_1(\mathscr{F}) \left[1 - \frac{1}{2(g-1)} \frac{\left(\int_1^a F^{1+\varepsilon}\, dx\right)^2}{\int_1^a F^{2(1+\varepsilon)}\, dx} \right].$$

Jetzt können wir noch ε gegen 0 gehen lassen und haben damit Lemma 1 bewiesen.

3. Beweis von Lemma 2

3.1. F_μ ist eine Legendresche Funktion erster Art. Man sieht das sofort, wenn man die Differentialgleichung (1) in der Legendreschen Normalform schreibt:

$$(1-x^2)\,F'' - 2xF' + \nu(\nu+1)\,F = 0$$
$$\nu = -\tfrac{1}{2} + i\varkappa, \quad \varkappa = (\mu - \tfrac{1}{4})^{1/2} > 0 \quad \text{für} \quad \mu > \tfrac{1}{4}.$$

Die einzige Lösung $F \in C^2[1,\infty)$ mit $F(1)=1$ ist bekanntlich die Legendresche Funktion erster Art P_ν:

$$F_\mu = P_\nu . \tag{40}$$

Aus der Darstellung (38) in [2] pag. 208 ergibt sich leicht:

$$F_\mu(x) = c x^{-1/2} \left(\cos(\varkappa \log(2x) + \alpha) + O(x^{-2})\right), \quad x \to +\infty,$$
$$c = \left(2 \frac{\operatorname{Tg} \pi\varkappa}{\pi\varkappa}\right)^{1/2}, \quad \alpha = \arg \frac{\Gamma(i\varkappa)}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\varkappa)}, \quad \mu > \tfrac{1}{4}.$$

Daraus folgt, dass F_μ für $\mu > \frac{1}{4}$ Nullstellen in $[1,\infty)$ besitzt. (Aus der Integraldarstellung (122) in [2] pag. 272 ergibt sich, dass F_μ für $0 < \mu \leqslant \frac{1}{4}$ keine Nullstellen in $[1,\infty)$ besitzt).

3.2. Wir betrachten nun ein festes $\mu > \frac{1}{4}$ und schreiben wieder F, a für F_μ, $a(\mu)$. Wir haben dann

$$F(1)=1, \quad F(a)=0, \quad F>0 \quad \text{in} \quad [1, a), \quad a>1. \tag{41}$$

Aus der Differentialgleichung (1) berechnet man sofort:

$$F'(1) = -\frac{\mu}{2} \tag{42}$$

$$F''(1) = \tfrac{1}{8}\mu(\mu+2) \tag{43}$$

$$F''(a) = -\frac{2a}{a^2-1} F'(a). \tag{44}$$

Aus (1) und (41) folgt

$$\frac{d}{dx}(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a)$$

und daher

$$(x^2-1)F' < 0 \quad \text{in} \quad (1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen (42):

$$F' < 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \tag{45}$$

3.3. Wir zeigen jetzt:

$$F'' \geqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, a]. \tag{46}$$

Zunächst folgt aus (43)–(45):

$$F''(1) > 0, \quad F''(a) > 0.$$

Gäbe es nun $x_0 \in (1, a)$ mit $F''(x_0) < 0$, so gäbe es x_1, x_2 derart, dass

$$\begin{gathered} 1 < x_1 < x_0 < x_2 < a, \\ F''(x_1) = F''(x_2) = 0, \\ F'' < 0 \quad \text{in} \quad (x_1, x_2). \end{gathered} \tag{47}$$

Dann gäbe es aber

$$\xi \in (x_1, x_2) \tag{48}$$

mit $F'''(\xi)=0$. Aus der Differentialgleichung (1) folgt:

$$4\xi F''(\xi) = -(\mu+2) F'(\xi).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist wegen (47), (48) negativ, die rechte Seite aber positiv wegen (45). Damit ist (46) bewiesen.

3.4. Aus (42) und (46) ergibt sich

$$F'(x) \geqslant -\frac{\mu}{2} \quad \text{in} \quad [1, a]$$

und somit wegen $F(1)=1$:

$$F(x) \geqslant 1-\frac{\mu}{2}(x-1) \quad \text{in} \quad [1, a]. \tag{49}$$

Daraus ergibt sich für $x=a$:

$$1+\frac{2}{\mu} \leqslant a.$$

Da die rechte Seite der Ungleichung (49) im Teilintervall $[1, 1+2/\mu]$ nicht negativ ist, so folgt aus (49):

$$\int_1^a F^2\,dx \geqslant \int_1^{1+2/\mu} F^2\,dx \geqslant \int_1^{1+2/\mu} \left(1-\frac{\mu}{2}(x-1)\right)^2 dx = \frac{2}{3\mu}. \tag{50}$$

Aus (1) und (46) folgt

$$2xF' + \mu F \leqslant 0 \quad \text{in} \quad [1, a].$$

Daraus ergibt sich wegen $F(1)=1$:

$$F(x) \leqslant x^{-\mu/2} \quad \text{in} \quad [1, a].$$

Somit wird

$$\int_1^a F\,dx \leqslant \int_1^a x^{-\mu/2}\,dx < \int_1^\infty x^{-\mu/2}\,dx = \frac{2}{\mu-2} \quad \text{für} \quad \mu>2.$$

Daraus und aus (50) folgt Lemma 2.

LITERATUR

[1] Berger, M., Gauduchon, P., und Mazet, E., *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics 194 (Springer Verlag 1971).

[2] Hobson, E. W., *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics* (Cambridge University Press 1931).

Eingegangen 21. Januar 1974