Über ein Problem von Reiter und ein Problem von Derighetti zur Eigenschaft P... lokalkompakter Gruppen

Autor(en): **Rindler, Harald**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **48 (1973)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37168

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Über ein Problem von Reiter und ein Problem von Derighetti zur Eigenschaft P_1 lokalkompakter Gruppen[1])

Von HARALD RINDLER

Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit linkem Haarmaß dx. Wir setzen für $f \in L^1(G)$, $x, y \in G$ $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$ $R_y f(x) = f(xy^{-1})$ $\Delta_G(y^{-1})$ (Δ_G = linker Haarmodul von G). Sei H eine abgeschlossene normale Untergruppe von G. Wir setzen $T_H f(\dot{x}) = \int_H f(xy)\, dy_3$ $f \in L^1(G)$, $\dot{x} = \pi_H(x) \in G/_H$ (dy = linkes Haarmaß von H). T_H ist eine lineare Abbildung von $L^1(G)$ *auf* $L^1(G/_H)$, $\|T_H\| \leqslant 1$ (siehe [3] Ch. 3, §4.4). Den Kern der Abbildung bezeichnen wir wie üblich mit $J^1(G, H)$. Ein Teilraum $E \subseteq L^1(G)$ heißt H-rechtsinvariant, wenn mit $f \in E$ und $y \in H$ auch $R_y f \in E$ gilt.

1. Reiter hat in [3], Ch. 8, §4.6 gezeigt, daß, falls H die Eigenschaft P_1 hat, das Bild jedes abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraumes unter der Abbildung T_H ein abgeschlossener Teilraum von $L^1(G/_H)$ ist. (Es wurde dort ein allgemeineres Resultat für nicht notwendig normale Untergruppen bewiesen.) Ist $G/_H$ endlich, dann ist $L^1(G/_H)$ endlichdimensional und daher jeder Teilraum abgeschlossen. Ist die Quotientengruppe $G/_H$ unendlich können wir auch die Unkehrung des obigen Resultates zeigen. Für Spezialfälle hat dies bereits B. Johnson gezeigt [1]; wir können seine Methode verallgemeinern.

Ich möchte H. Reiter, der einen ersten Entwurf dieser Arbeit kritisch gelesen hat, für wertvolle Anregungen herzlich danken.

THEOREM 1. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe, H eine abgeschlossene normale Untergruppe, $G/_H$ unendlich, dann hat H die Eigenschaft P_1 genau dann wenn das Bild jedes abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraumes von $L_1(G)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^1(G/_H)$ ist.*

Zum Beweis genügt es folgendes zu zeigen: Hat H die Eigenschaft P_1 nicht, dann gibt es einen abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraum E, sodaß $T_H E$ nicht abgeschlossen ist. Wir benötigen zunächst folgendes

LEMMA 1. *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe, die die Eigenschaft P_1 nicht hat, dann gibt es Elemente $y_1, y_2, \ldots y_N \in H$, sodaß für alle $f \in L^1(G)$ mit $\int f = 1$ für $h_i = L_{y_i} f - f$ eine nur von f abhängige Konstante $C_f > 0$ existiert mit:* $\max_i \|Rh_i -$

[1]) Darüber trug der Autor bei einem mathematischen Kongreß über das Thema „Analyse Harmonique et Représentations Unitaires" in Les Plans sur Bex – Schweiz am 26.3.1973 vor.

$-h_i\|_1 \geqslant C_f$ *für alle* $R \in \mathscr{R}_H^0$

$$(\mathscr{R}_H^0 = \{R : R = \sum_n c_n R_{y'_n},\ c_n \in \mathbf{C},\ \sum c_n = 0,\ y'_n \in H\}).$$

Wir führen den Beweis indirekt. (Die Beweismethode ist im wesentlichen dieselbe wie in [2], Lemma.)

Angenommen für jede endliche Menge $\{y_1, y_2, \ldots y_N\} \subseteq H$ gibt es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ einen Operator $R \in \mathscr{R}_H^0$ mit

$$\|Rh_i - h_i\|_1 < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad h_i = L_{y_i} f - f \tag{1}$$

Es gilt: $R(L_{y_i}x - f) - (L_{y_i}f - f) = Ly_i\ Rf - Rf - (L_{y_i}f - f) = L_{y_i}(Rf - f) - (Rf - f)$, da R und L_{y_i} vertauschen.

Setzt man $s = |Rf - f|/\|Rf - f\|_1$, und beachtet man, daß $\|Rf - f\|_1 \geqslant |\int (Rf - f)| = |\int (\Sigma_n c_n - 1)\cdot f| = |\int f| = 1$ gilt erhält man wegen (1)

$$s \geqslant 0, \quad \int s = 1, \quad \|L_{y_i}s - s\|_1 = \frac{1}{\|Rf - f\|_1} \|L_{y_i}|Rf - f| - |Rf - f|\|_1$$
$$\leqslant \|L_{y_i}(Rf - f) - (Rf - f)\|_1 < \varepsilon \quad (1 \leqslant i \leqslant N) \tag{2}$$

(2) besagt nun, daß (G, H) die Eigenschaft $P_*(G, H)$ hat; daher hat H die Eigenschaft P_1 im Widerspruch zur Voraussetzung. (siehe [4] §3, Definition und Proposition 1).

LEMMA 2. *Die normale Untergruppe H besitze die Eigenschaft P_1 nicht und GH sei unendlich. Seien $h_1, h_2, \ldots h_N$ wie in Lemma* 1. *Dann gibt es zu jeder offene H-invarianten Menge $X \subseteq G$, die (mindestens) N verschiedenen Restklassen* (mod H) *enthält, ein $\psi \in J^1(G, H)$ mit* $\mathrm{Tr}\psi \subseteq X$ *und* $\inf_{R \in \mathscr{R}_H^0} \|R\psi - \psi\|_1 \geqslant 1$. ($\mathrm{Tr}\psi$ = *Träger von* ψ).

Beweis. Wir können eine offene Umgebung U von $\{e\}$ mit $UH = U$ und Elemente $a_1, a_2, \ldots a_N \in G$ (N wie in Lemma 1) so wählen, daß gilt:

$$a_i \cdot U \subseteq X \quad 1 \leqslant i \leqslant N \quad a_i U \cap a_j U = \emptyset \quad i \neq j$$

(Die Existenz von U und $\{a_1, \ldots a_N\}$ erkennt man unmittelbar, wenn man von der offenen Menge $\pi_H(X)$ in der Quotientengruppe ausgeht.)

Sei $f \in L^1(G)$ mit $\mathrm{Tr}f \subseteq U$ und $\int f = 1$ (dies ist möglich, da U positives Maß hat). Es gilt $\mathrm{Tr}h_i = \mathrm{Tr}(L_{y_i}f - f) \subseteq y_i\ \mathrm{Tr}f \cup \mathrm{Tr}f \subseteq HU \cup U = U$ (man beachte, daß $y_i \in H$ und $HU = UH$ gilt, hier geht die Normalität von H wesentlich ein.) Sei $\varphi_i = L_{a_i}h_i$ und $\psi = \Sigma_i \varphi_i$. Es gilt dann natürlich $\psi \in J^1(G, H)$, weil das für h_i und daher auch für φ_i gilt. ([3], Ch.3, §6.4, §5.3; man beachte, daß man auch hier auf die Normalität

von H nicht verzichten kann.) Es gilt $\mathrm{Tr}\varphi_i = \mathrm{Tr}L_{a_i}h_i = a_i \cdot \mathrm{Tr}h_i \subseteq a_i U$ und daher $\mathrm{Tr}\psi \subseteq \bigcup_i a_i U \subseteq X$, außerdem gilt für $i \neq j$ $\mathrm{Tr}\varphi_i \cap \mathrm{Tr}\varphi_j = \emptyset$.

Sei $R \in \mathscr{R}_H^0$, dann gilt $\mathrm{Tr}R\varphi_i \subseteq a_i U$, da $UH = U$ und $\mathrm{Tr}R\varphi_i \cap \mathrm{Tr}R\varphi_j = \emptyset$ $i \neq j$. Daraus folgt für $R \in \mathscr{R}_H^0$

$$\|R\psi - \psi\|_1 = \|\sum_i (R\varphi_i - \varphi_i)\|_1 = \sum_i \|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 \geqslant \max_i \|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 \geqslant C_f > 0.$$

(Beachte: $\|R\varphi_i - \varphi_i\|_1 = \|RL_{a_i}h_i - L_{a_i}h_i\|_1 = \|L_{a_i}(Rh_i - h_i)\|_1 = \|Rh_i - h_i\|_1$!)

Schließlich kann man o.B.d.A. voraussetzen, daß $C_f = 1$ ist (andernfalls ersetze man ψ durch $1/C_f \cdot \psi$).

Wir können nun Theorem 1 beweisen.

Da $G/_H$ unendlich ist gibt es offene paarweise disjunkte Mengen $Y_n \subseteq G/_H$, $n \in \mathbf{Z}$, die jeweils mindestens N Elemente enthalten. Sei $X_n = \pi_H^{-1}(Y_n)$, es gilt dann $X_n H = HX_n = X_n$. Auf Grund von Lemma 2 gibt es $\psi_n (n \geqslant 1)$, mit

$$\psi_n \in J^1(G, H), \quad \mathrm{Tr}\psi_n \subseteq X_n \quad \text{und} \quad \inf_{R \in \mathscr{R}^0{}_H} \|R\psi_n - \psi_n\|_1 \geqslant 1$$

Für $n \geqslant 1$ sei ψ_{-n} gewählt mit:

$$\mathrm{Tr}\psi_{-n} \subseteq X_{-n} \quad \text{und} \quad \|T_H \psi_{-n}\|_1 = \frac{1}{n} \tag{4}$$

Sei $f_n = \psi_n + \psi_{-n}$ und E_n der von den f_n aufgespannte abgeschlossene H-rechtsinvariante Teilraum von $L^1(G)$. Die Banachsche direkte Summe der Teilräume E_n stimmt mit dem von allen f_n aufgespannten abgeschlossenen H-rechtsinvarianten Teilraum E überein.

$$g \in E \quad g = \sum_n g_n, \quad g_n \in E_n \quad \text{und} \quad \|g\|_1 = \sum_n \|g_n\|_1 \tag{5}$$

Sei nämlich $R_1, R_2 \in \mathscr{R}_H^0$ beliebig, $n \neq m$, $n, m \in \mathbf{N}$, dann gilt:

$$\mathrm{Tr}R_1 f_n \subseteq (\mathrm{Tr}f_n) \cdot H \subseteq X_n H = X_n$$

und daher

$$\mathrm{Tr}R_1 f_n \cap \mathrm{Tr}R_2 f_m \subseteq X_n \cap X_m = \emptyset;$$

daraus folgt (5) unmittelbar.

Wir behaupten nun

$$J^1(G, H) \cap E_n = \{Rf_n, R \in \mathscr{R}_H^0\}^-$$

(Abschluß in der Normtopologie) (6)

Beweis[2]). Die Relation „$\supseteq$" ist unmittelbar klar. ($T_H R f = \Sigma\, c_k T_H f$). Sei umgekehrt $g \in J^1(G, H) \cap E_n$.

Da $g \in E_n$, gibt es einen Operator $R_1 = \Sigma\, c_k R_{y_k}$, $c_k \in \mathbf{C}$, mit

$$\|R_1 f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2n\,\|f_n\|_1} \leqslant \varepsilon/2$$

weiters gilt:

$$\frac{\varepsilon}{2n\,\|f_n\|_1} > \|R_1 f_n - g\|_1 \geqslant \|T_H(R_1 f_n - g)\|_1 = \|T_H(R_1 f_n - g)\|_1$$
$$+ \|T_H g\|_1 \geqslant \|T_H R_1 f_n\|_1 = |\sum c_k|\,\|T_H f_n\|_1 = |\sum c_k| \cdot \frac{1}{n}$$

also ist

$$|\sum c_k| < \frac{\varepsilon}{2\,\|f_n\|_1}.$$

Sei $R = R_1 - \Sigma_k\, c_k \cdot R_e$, dann ist $R \in \mathscr{R}_H^0$ und $\|Rf_n - R_1 f_n\|_1 \leqslant |\,\Sigma\, c_k|\,\|f_n\|_1 < \varepsilon/2$ und man erhält $\|Rf_n - g\|_1 < \varepsilon$, $R \in \mathscr{R}_H^0$ und (6) ist gezeigt.

$T_H E \simeq E/[E \cap J^1(G, H)]$ ist ein Banachraum bezüglich der Quotientennorm, die wir mit $\|\ \|'$ bezeichnen.

Es gilt natürlich $\|f'\|' \geqslant \|f'\|_{1, G/H}$ für alle $f' \in T_H E$. Ist $T_H E$ abgeschlossen in $L^1(G/_H)$, dann ist $T_H E$ auch bezüglich der Norm $\|\ \|_{1, G/H}$ ein Banachraum. Bekanntlich gilt dann

$$\|f'\|_{1, G/H} \geqslant C\,\|f'\|' \quad (C > 0).$$

Wir zeigen aber

$$d(f_n, E \cap J^1(G, H)) \geqslant 1 \quad \text{und} \quad \|T_H f_n\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{7}$$

($d(f_n, E \cap J^1(G,H))$ sei der Abstand von f von $E \cap J^1(G, H)$).
Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} & d(f_n, E \cap J^1(G, H)) \\ & \quad = d(f_n, E_n \cap J^1(G, H)) \quad \text{(dies folgt aus (5))} \\ & \quad \geqslant d(\psi_n, E_n \cap J^1(G, H)) \quad (\operatorname{Tr} R\psi_n \cap \operatorname{Tr} R\psi_{-n} \subseteq X_n \cap X_{-n} = \emptyset) \\ & \quad = \inf\{\|R\psi_n - \psi_n\|_1, R \in \mathscr{R}_H^0\} \geqslant 1 \quad ((3) + (6)) \end{aligned}$$

---

[2]) Aus der Relation $E_n = \{\lambda f_n + Rf_n, R \in \mathscr{R}^0{}_H, \lambda \text{ komplex}\}^-$ folgt Relation (6) nicht unmittelbar.

Damit ist die erste Relation in (7) gezeigt;

$$\|T_H f_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

wie bereits früher gezeigt wurde.

Es gilt daher $\|T_H f_n\|' \geqslant 1$ und $\|T_H f_n\|_{1, G/H} \to 0$, die Normen $\| \ \|'$ und $\| \ \|_{1, G/H}$ sind daher nicht vergleichbar und $T_H E$ ist nicht abgeschlossen, womit Theorem 1 vollständig bewiesen ist.

2. Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G; $\mathscr{L}_H$, $\mathscr{R}_H$ die konvexe Hülle der Operatoren L_y, $R_y (y \in H)$ resp.

Ist H eine normale P_1-Untergruppe dann gilt

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \|T_H f\| = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1$$

(siehe [4], §2, (*) (7), (8)), insbesondere sind beide Infima gleich.

Derighetti stellte in einem Brief an Reiter die Frage nach der Umkehrung. Ist H nicht normal dann gilt noch

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \|T_{H,q} f^*\| \quad \text{und} \quad \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 = \|T_{H,q} f\| \ (f^*(x) = f(x^{-1}) \Delta_G(x^{-1}))$$

(siehe [4], §2, (4) und (6)). Weiters gilt $D_H \check{L}^1(G) \neq D_H L^1(G)$ ([4], §2, Proposition 1). Daher ist $J^1(G, H) = D_H \check{L}^1(G) \neq D_H L^1(G) = J^1(G, H)^*$ ([4], §1, (33), (34)) und es gibt ein $f \in L^1(G)$ mit $0 = T_{H,q} f \neq T_{H,q} f^*$; für dieses f stimmen die beiden Infima daher nicht überein.

Wir können jedoch folgendes zeigen:

THEOREM 2. *Eine abgeschlossene normale Untergruppe H hat die Eigenschaft P_1 genau dann wenn für alle $f \in L^1(G)$, $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1$ gilt.*

Beweis. Wir brauchen nur mehr eine Richtung zu zeigen und benötigen zunächst folgendes

LEMMA 3. *Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G, H habe nicht die Eigenschaft P_1, dann gibt es ein $f \in L^1(G)$, $f = L_y g - g$, $g \in L^1(G)$, $y \in H$, sodaß. $\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 > 0$ gilt.* (Das Resultat ist eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses in [3], Ch. 8, §4.5.)

Wir führen den Beweis indirekt: Angenommen es gelte:

$$\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|R(L_y g - g)\|_1 = 0 \quad \text{für alle} \quad g \in L^1(G), \quad y \in H. \tag{8}$$

Aus (8) folgt

Sei $f_i = L_{y_i} g_i - g_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, N eine beliebige natürliche Zahl, $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es $R \in \mathscr{R}_H$ mit $\|Rf_i\|_1 < \varepsilon$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (9)

Beweis durch Induktion. Für $N = 1$ ist (9) gleichbedeutend mit (8). Schluß von $N-1$ auf N: Laut Induktionsvoraussetzung gibt es $R_1 \in \mathscr{R}_H$ mit $\|R_1 f_i\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant N-1$; $R_1 f_N = R_1 (L_{y_N} g_N - g_N) = L_{y_N}(R_1 g_N) - R_1 g_N (RL_y = L_y R)$. Wegen (8) gibt es daher ein R_2 mit $\|R_2 (R_1 f_N)\|_1 < \varepsilon$.

Sei $R = R_2 R_1$ dann ist $R \in \mathscr{R}_H$ und $\|Rf_i\|_1 = \|R_2 (R_1 f_i)\|_1 \leqslant \|R_1 f_i\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant N-1$, R erfüllt daher die Bedingungen in (9).

Behauptung. $(9) \Rightarrow P_1(H)$.

Sei $g \geqslant 0 \int g = 1$, $y_1, y_2, \ldots y_N \in H$, $N \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$ beliebig, wegen (9) gibt es $R \in \mathscr{R}_H$ mit $\|R(L_{y_i} g - g)\|_1 < \varepsilon$ $1 \leqslant i \leqslant N$.

Sei $s = Rg$, dann gilt $s \geqslant 0, \int s = 1$ und $\|L_{y_i} s - s\|_1 < \varepsilon, 1 \leqslant i \leqslant N$, denn $\|L_{y_i} s - s\|_1$ $= \|L_{y_i} Rg - Rg\|_1 = R(L_{y_i} g - g)\|_1 < \varepsilon$

Wir erhalten daher $(8) \Rightarrow (9) \Rightarrow P_*(G, H) \Rightarrow P_1(H)$ ([4], §3 Proposition 1) im Widerspruch zur Voraussetzung und Lemma 3 ist bewiesen. Damit können wir nun Theorem 2 leicht beweisen.

Hat H nicht die Eigenschaft P_1, dann gibt es ein $g \in L^1(G)$, $y \in H$, sodaß für $f = L_y g - g$, $\inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf\|_1 > 0$. Wir zeigen $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, sei N eine natürliche Zahl mit $N > (2\|g\|/\varepsilon)1$, sei $L = 1/N \sum_{n=0}^{N-1} L_y n$, dann gilt $Lf =$ $= 1/N \sum_0^{N-1} L_{y^N}(L_y g - g) = 1/N(L_{y^N} g - g)$ und $\|Lf \cdot_1 \leqslant 1/N \cdot (\|L_{y^N} g\|_1 + \|g\|_1) =$ $= 2/N\|g\|_1 < \varepsilon$.

Damit ist Theorem 2 gezeigt.

Bemerkung. Aus der Relation $L_y f^* = (R_{y^{-1}} f)^*$ folgt für jede abgeschlossene Untergruppe H

$$\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{R \in \mathscr{R}_H} \|Rf^*\|_1$$

Beachtet man, daß in einer Richtung im Beweis von Theorem 2 die Normalität von H gar nicht eingeht erhält man folgende leichte Verschärfung von Theorem 2: $\inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf\|_1 = \inf_{L \in \mathscr{L}_H} \|Lf^*\|_1$ für alle $f \in L^1(G)$ dann und nur dann, wenn H normal ist und die Eigenschaft P_1 hat. (Ist H nicht normal ist Lemma 3 stets richtig.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] JOHNSON, B. E., *Some examples in harmonic analysis.* (To appear in Studia Mathematica (1973).)
[2] REITER, H., *Sur certains idéaux dans $L^1(G)$*, C. R. Acad. Sci. Paris, *267*, (1968), A 882–885.
[3] ——, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Oxford, at the Clarendon Press (1968).
[4] ——, *L^1-algebras and Segal algebras*, Lecture notes in mathematics, *231*, Springer, Berlin (1971).

Mathematisches Institut der Universität Wien.
Strudlhofgasse 4
A-1090 Wien

Eingegangen den 7. Mai 1973.