Über konvexe Gitterpolygone

Autor(en): **Wills, J.M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **48 (1973)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-37153

Über konvexe Gitterpolygone

J. M. WILLS

Hugo Hadwiger zum 65. Geburtstag gewidmet

$\mathbf{Z}$ sei die Menge der ganzen rationalen Zahlen und $\mathbf{Z}^2$ das zugehörige Zahlengitter in der euklidischen Ebene. Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte aus $\mathbf{Z}^2$ heißt Gitterpolygon. Zu einem Gitterpolygon P seien wie üblich $\dot{P}, P^0, P_\varrho, P_{-\varrho}$ Rand, offener Kern, äußerer und innerer Parallelbereich. Ist $P^0 \neq \emptyset$, so heißt P eigentlich. Weiter seien $V = V(P)$ Flächeninhalt, $U = U(P)$ Umfang und $G = G(P) = \operatorname{card}(P \cap \mathbf{Z}^2)$ Gitterpunktanzahl von P. Analog sind V, U, G für $\dot{P}, P^0, P_\varrho, P_{-\varrho}$ erklärt.

Im Satz und Korollar werden Zusammenhänge zwischen V, U und G aufgestellt. Bei diesen Ergebnissen ist die weitgehend ungelöste Frage interessant, ob und wie sie sich verallgemeinern lassen; z.B. auf höhere Dimensionen, auf beliebige konvexe Körper, auf beliebige Gitter oder auf nichtkonvexe Gitterpolygone bzw. Gitterpolytope. Auf einige dieser Fragen wird vor dem Beweis des Satzes kurz eingegangen.

SATZ. *P sei ein eigentliches Gitterpolygon. Dann gilt*

1) $V(P) = G(P) - \tfrac{1}{2}G(\dot{P}) - 1$ (Picksche Identität)

2) $G(P^0) - G(P^0_{-\varrho}) \leqslant \varrho U(P) \leqslant G(P^0_\varrho) - G(P^0)$ *für* $\varrho \geqslant 0$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} U(P) \leqslant G(P) - G(P_{-1/\sqrt{2}}) \leqslant U(P)$

4) $V(P) + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} U(P) + 1 \leqslant G(P^0_{1/\sqrt{5}}) \leqslant V(P) + \tfrac{1}{2}U(P) + 1$

5) $G(P') + 1 \leqslant G(P)$ *für* $P' = P + s$ *und* $s \notin \mathbf{Z}^2$.

KOROLLAR.

6) $3 \leqslant G(\dot{P}) \leqslant U(P)$

7) $V(P) - \tfrac{1}{2}U(P) + 1 \leqslant G(P^0) \leqslant V(P) - \tfrac{1}{2}$

8) $V(P) + \tfrac{1}{2} \leqslant G(P) \leqslant 2V(P) + 2$ (Blichfeldt)

9) $G(P) \leqslant V(P) + \tfrac{1}{2}U(P) + 1$ (Nosarzewska)

10) *In keiner der Ungleichungen* 2) *bis* 9) *kann* $\leqslant$ *durch* $<$ *ersetzt werden. In* 6) *rechts,* 7) *links und in* 9) *gilt* $=$ *genau dann, wenn P ein achsenparallelles Rechteck ist.*

Beweis des Korollars. 6) links ist trivial; ebenso 6) rechts, da der Abstand zwischen je zwei Gitterpunkten $\geqslant 1$ ist. Gleichheit in 6) rechts gilt offenbar genau dann, wenn P ein achsenparalleles Rechteck ist. 7), 8), 9) folgen direkt aus 1) und 6), wenn man nur beachtet:

$$G(P)-\tfrac{1}{2}G(\dot{P})=G(P^0)+\tfrac{1}{2}G(\dot{P})=\tfrac{1}{2}G(P)+\tfrac{1}{2}G(P^0).$$

10) ist klar für die Ungleichungen in 6) bis 9).

Vor dem Beweis des Satzes einige erklärende und historische Bemerkungen: 1) ist die Picksche Identität; Beweise dazu s. [2], S. 253 oder [7]. 2) bringt eine gewisse Analogie zu

$$V(P)-V(P_{-\varrho})\leqslant \varrho U(P)\leqslant V(P_\varrho)-V(P).$$

3) und 4) sind Verschärfungen von 6) und 9), bei denen folgende für Gitterpolygone (und Gitterpolytope) charakteristische Eigenschaft ausgenutzt wird: Je „dichter" die Gitterpunkte auf dem Rand von P liegen, desto „weniger dicht" liegen sie in der näheren Umgebung des Randes. Weitere Ergebnisse für spezielle ebene konvexe Bereiche s. [8]; für spezielle Gitterpunktanzahlen s. [10] und die dort zitierte Literatur. Über Verallgemeinerungen der Pickschen Identität auf nichtkonvexe Gitterpolygone bzw. auf höhere Dimensionen s. [6] und die dort zitierte Literatur. 9) läßt sich auf nichtkonvexe Gitterpolygone übertragen, wobei für die 1 die Euler-Charakteristik χ eintritt, wie Hadwiger zeigte (unpubl.).

Wegen der Monotonie von U und V gelten die rechten Seiten von 3), 6) und 8) auch für ebene konvexe Bereiche, die ein eigentliches Gitterpolygon enthalten; 9) gilt sogar für beliebige ebene konvexe Bereiche (s. [9]).

Abschließend einiges über Sätze für beliebige konvexe Körper K im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n, $n\geqslant 2$. (Zu den Begriffen s. [3].) Die rechte Seite von 8) ist Spezialfall eines Satzes von Blichfeldt (s. [5], S. 55) für konvexe Körper $K\subset R^n$, die ein eigentliches Gitterpolytop enthalten:

$$G(K)\leqslant n!\,V(K)+n \qquad n\geqslant 2.$$

Der mit vollständiger Induktion nach G (bei festem n) leicht zu beweisende Satz ist wegen des Faktors $n!$ im allgemeinen ziemlich grob. Minkowskis Fundamentalsatz aus der Geometrie der Zahlen, in der Verallgemeinerung durch v. d. Corput (s. [5], S. 44) für zentralsymmetrische $K\subset R^n$ läßt sich in der Form schreiben:

$$2\left[\frac{V(K)}{2^n}\right]+1\leqslant G(K) \qquad n\geqslant 2,$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqslant x$ bedeutet.

Er liefert also eine untere Schranke für $G(K)$ und spezielle, nämlich zentralsymmetrische konvexe Körper. Das Problem, für beliebige konvexe Körper eine untere Schranke für $G(K)$ zu finden, ist 1972 vor allem von Hadwiger (s. [1] und [4]) endgültig gelöst worden:

$$V(K) - \tfrac{1}{2}F(K) < G(K) \qquad n \geqslant 2,$$

(F: Oberfläche, für $n=2$ ist $F=U$ der Umfang).

Das Problem, ob und wie diese Schranke bei Beschränkung auf (eigentliche konvexe) Gitterpolytope $P \subset R^n$ verbessert werden kann, also die Verallgemeinerung von 8) links, bleibt offen. Einiges spricht für die Vermutung

$$V(P) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) F(P) + c(n) \leqslant G(P) \qquad n \geqslant 2,$$

wobei $c(n)$ eine nur von der Dimension abhängige Konstante ist. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Beweis des Satzes. Vorbetrachtung zu 2) bis 4): $\dot{P}$ wird unterteilt in Strecken, deren Endpunkte Gitterpunkte sind, die keine Gitterpunkte im (relativen) Innern haben, und deren linker Endpunkt (von einem inneren Punkt von P aus gesehen) nicht zur jeweiligen Strecke gehört. Sei l die Länge einer solchen Strecke, dann ist $U(P) = \sum l$, wobei $\sum$ hier wie im ganzen Beweis bedeutet, daß über alle soeben definierten Strecken summiert wird.

Wir betrachten eine beliebige Strecke der Länge l. Dann ist $l = \sqrt{p^2 + q^2}$ mit $p \geqslant q \geqslant 0$ ganz und $(p, q) = 1$ (relativ prim) oder $p = 1$, $q = 0$.

Für die folgende Konstruktion sei die Strecke der Einfachheit halber durch eine Bewegung B in die Strecke $\{(x, y)/0 < x \leqslant l, y = 0\}$ überführt. Dann sei zu einem $\varrho > 0$

$$\begin{aligned}
R(\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ 0 < y \leqslant \varrho\}\\
R'(\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ 0 \leqslant y < \varrho\}\\
R(-\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ -\varrho \leqslant y < 0\}\\
R'(-\varrho) &= \{(x, y)/0 < x \leqslant l,\ -\varrho < y \leqslant 0\}.
\end{aligned}$$

Die Bilder von $R(\varrho)$, $R(-\varrho)$, $R'(\varrho)$, $R'(-\varrho)$ bezüglich der Bewegung B^{-1} seien $S(\varrho)$, $S(-\varrho)$, $S'(\varrho)$, $S'(-\varrho)$ und deren positiver Flächeninhalt ist jeweils $l\varrho$. Einfache Überlegungen zeigen:

$$\begin{aligned}
G(S(\varrho)) &= G(S(-\varrho)) = [l\varrho]\\
G(S'(\varrho)) &= G(S'(-\varrho)) = [l\varrho]',
\end{aligned}$$

wobei $[a]$ wie üblich die größte ganze Zahl $\leqslant a$ bedeutet; und $[a]'$ die kleinste ganze Zahl $\geqslant a$. Also

$$[a] < a < [a]', \qquad \text{falls } a \text{ nichtganz}$$

und

$$[a] = a = [a]', \qquad \text{falls } a \text{ ganz}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen zu den einzelnen Ungleichungen in 2) bis 4).

2) Es ist $G(P^0)-G(P^0_{-\varrho})\leqslant\sum[l\varrho]\leqslant\sum l\varrho=\varrho U(P)\leqslant\sum[l\varrho]'\leqslant G(P^0_\varrho)-G(P^0)$.

3) Es ist $G(P)-G(P_{-1/\sqrt{2}})\leqslant\sum[l/\sqrt{2})]$, da sich die $S'(-\varrho)$ an den Ecken von P teilweise überdecken. Andererseits liegt im Abstand <1 von jeder Ecke von P kein weiterer Gitterpunkt. Also $G(P)-G(P_{-1/\sqrt{2}})=\sum[l/\sqrt{2}]'$ und die Behauptung lautet: $\sum l/\sqrt{2}\leqslant\sum[l/\sqrt{2}]'\leqslant\sum l$.

Es genügt zu zeigen $l/\sqrt{2}\leqslant[l/\sqrt{2}]'\leqslant l$.

Die linke Ungleichung gilt, mit Gleichheit im Fall $l=\sqrt{2}$, d.h. $p=q=1$. Ebenso die rechte, mit Gleichheit im Fall $l=1$, also $p=1$, $q=0$.

4) Nach der Pickschen Identität ist $V(P)+1=G(P^0)+\frac{1}{2}G(\dot{P})$ und es bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}U(P)\leqslant G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)-\tfrac{1}{2}G(\dot{P})\leqslant\tfrac{1}{2}U(P).$$

Wegen

$$P^0_{1/\sqrt{5}}\setminus P^0\supset\bigcup_{\text{alle } s'} S'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

ist

$$G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)\geqslant\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'.$$

Wieder liegt im Abstand <1 von jeder Ecke von P kein weiterer Gitterpunkt. Also

$$G(P^0_{1/\sqrt{5}})-G(P^0)=\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'$$

und es bleibt zu zeigen:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\sum l\leqslant\sum\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'-\tfrac{1}{2}\sum 1\leqslant\tfrac{1}{2}\sum l.$$

Es genügt zu zeigen:

$$\frac{l}{2\sqrt{5}}\leqslant\left[\frac{l}{\sqrt{5}}\right]'-\frac{1}{2}\leqslant\frac{l}{2}$$

oder

$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\leqslant 2\left[\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\right]'-1\leqslant\sqrt{p^2+q^2} \tag{1}$$

Wegen

$$\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}} \leqslant \left[\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}}\right]'$$

gilt die linke Ungleichung in (1) und Gleichheit gilt genau dann, wenn $p=2, q=1$.

Die rechte Ungleichung in (1) gilt sicher dann, wenn

$$2\sqrt{\frac{p^2+q^2}{5}} + 1 \leqslant \sqrt{p^2+q^2}$$

ist, also wenn $5+2\sqrt{5} \leqslant \sqrt{p^2+q^2}$ bzw. $90 \leqslant p^2+q^2$ ist.

Bleiben also die Fälle $p^2+q^2<90$ mit $(p, q)=1$ oder $p=1, q=0$ und $0 \leqslant q \leqslant p$. Das sind 24 Fälle, und direktes Ausrechnen ist etwas umständlich.

Wir beachten daher, daß die kritischen Fälle in (1) rechts gerade die sind, in denen $\sqrt{(p^2+q^2)/5}$ nur wenig größer als eine ganze Zahl ist.

Es genügt also, die Ungleichung

$$2\left[\sqrt{\frac{m_r}{5}}\right]' - 1 \leqslant \sqrt{m_r} \tag{2}$$

mit $m_r = \min\{p^2+q^2/5r^2<p^2+q^2<90\}$ bei den zugelassenen p, q zu überprüfen. Wegen $5r^2<90$ sind nur die Fälle $r=0, 1, 2, 3, 4$ möglich.

Einfaches Probieren zeigt:

$$m_0 = 1^2+0^2 = 1 > 5\cdot 0^2, \quad m_1 = 3^2+1^2 > 5\cdot 1^2, \quad m_2 = 4^2+3^2 = 25 > 5\cdot 2^2,$$
$$m_3 = 7^2+1^2 = 50 > 5\cdot 3^2, \quad m_4 = 9^2+1^2 = 82 > 5\cdot 4^2.$$

Die m_r erfüllen die Ungleichung (2) und für m_0 und m_2 liegt sogar Gleichheit vor.

5) Ist s der im Ursprung angetragene Translationsvektor, so können wir o.E. annehmen, daß die durch s repräsentierte Strecke σ außer dem Ursprung keinen weiteren Gitterpunkt enthält; also $G(\sigma)=1$.

Sei $P_\lambda = P+\lambda s$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, also $P_0=P$, $P_1=P'$.

Sei $Q=\bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} P_\lambda$. Q ist ein kompaktes konvexes Polygon, aber kein Gitterpolygon. Wie vorher sei $\dot{P}$ in disjunkte Strecken l zerlegt, die also außer einem Endpunkt keinen Gitterpunkt enthalten.

Sei l_λ die l entsprechende Strecke von P_λ. Für jedes der l sind zwei Fälle möglich:

1) l liegt (von einem Endpunkt eventuell abgesehen) im Innern von Q.

2) l liegt auf dem Rand von Q.

Im 1. Fall sei $L=\bigcup_{0<\lambda\leqslant 1} l_\lambda$. Im 2. Fall sei $L'=\bigcup_{0\leqslant\lambda<1} l_\lambda$.

Die L und L' sind halboffene Parallelogramme (entartet, falls l in Richtung von s liegt).

Mit $\bigcup$ und $\bigcup'$ seien jetzt die Vereinigungen über alle L bzw. über alle L' bezeichnet. Dann ist

$$Q = P \cup (\bigcup L) \cup S = P' \cup (\bigcup' L') \cup S' \tag{3}$$

wobei S und S' Translationen von σ sind; außerdem sind S und S' Randstücke von Q und ihre Endpunkte sind Ecken von P und P'.

Dabei gehöre bei S nur der Endpunkt in P' zu S, und bei S' nur der Endpunkt in P zu S'. Auf diese Art ist Q in (3) auf 2 Arten in zueinander paarweise disjunkte Mengen zerlegt worden.

Beachtet man: $G(S')=1$, $G(S)=0$, so folgt

$$G(Q) = G(P) + \sum G(L) = G(P') + \sum' G(L') + 1 \tag{4}$$

wobei jetzt $\sum$ über alle L und $\sum'$ über alle L' läuft.

Ebenso gilt:

$$V(Q) = V(P) + \sum V(L) = V(P') + \sum' V(L'),$$

also

$$\sum V(L) = \sum' V(L').$$

Elementare Überlegungen zeigen:

$$G(L) = [V(L)] \qquad G(L') = [V(L')]',$$

also

$$\sum G(L) = \sum [V(L)] \leqslant \sum' [V(L')]' = \sum' G(L').$$

Damit in (4) liefert $G(P) \geqslant G(P')+1$, also die Behauptung.

Wie das Beispiel $P = \{(x, y)/|x|+|2y| \leqslant 2\}$, $s=(0, \frac{1}{2})$ zeigt, ist $G(P)=5, G(P')=4$, $|x|+|2y|$ also $G(P')+1=G(P)$.

LITERATUR

[1] Bokowski, Hadwiger, und Wills, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n-dimensionalen euklidischen Raum*, Math. Z. *127* (1972), 363–364.

[2] Coxeter, *Unvergängliche Geometrie*, Birkhäuser, Basel (1963).

[3] Hadwiger, *Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer, Berlin (1957).

[4] Hadwiger, *Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie*, Monatshefte für Math. *76* (1972), 410–418.

[5] Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (1969).

[6] MacDonald, *The volume of a lattice polyhedron*, Proc. Camb. Phil. Soc. *59* (1963), 719–726.

[7] Niven und Zuckerman, *Lattice points and polygonal area*, Amer. Math. Monthly *74*, 2 (1967), 1195–1200.

[8] NIVEN und ZUCKERMAN, *Lattice point coverings by plane figures*, Amer. Math. Monthly *74*, 1 (1967), 353–362.
[9] NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloquium Math. *1* (1948), 305–311.
[10] REICH, S., *Two-dimensional lattices and convex domains*, Mathematics Magazine *43*, 4 (1970), 219–220.

Eingegangen den 11. April 1973.

Corrigenda zu Vol. 48, fasc. 1

Seite	Zeile	anstatt	lies
14	2	negative	negativer
19	6	N	N
26	9	Abschnit	Abschnitt
31	16	re establish	re-establish
33	1	CW Complexes	CW-Complexes
68	6 & 7 v.u.	$\oplus$	$\otimes$
70	1 v.u.	Scand	Scand.
104	7 v.u.	$\rightarrow$	$\leftarrow$
110	8	$\mapsto$	$\rightarrow$
119	6	disc $\|z\| < 1\}$	disc $\{\|z\| < 1\}$
55	füge hinzu:		

Note added in proof: Proposition 3.7 no longer has a proof so 3.8 is only a conjecture.