

# Zur Dualitätstheorie kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume

Autor(en): **Fröhlicher, Alfred / Jarchow, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **47 (1972)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-36368>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Zur Dualitätstheorie kompakt erzeugter und lokalkonvexer Vektorräume<sup>1)</sup>

ALFRED FRÖLICHER und HANS JARCHOW

### Einleitung

Der Dualraum eines lokalkonvexen Raumes lässt sich auf viele Arten topologisieren. Für eine Kategorie lokalkonvexer Räume, die auch nicht-normierbare Räume enthält, ist es jedoch nicht möglich, diese Topologisierung in funktorieller Weise derart vorzunehmen, dass die Evaluationsabbildung stetig wird.

Kompakt erzeugte Vektorräume verhalten sich in dieser Beziehung wesentlich angenehmer. Unter den kompakt erzeugten Topologien auf dem Dualraum eines kompakt erzeugten Vektorraumes  $E$  gibt es eine, welche nicht nur die Evaluation stetig macht, sondern ausserdem durch eine universelle Eigenschaft ausgezeichnet ist. Den mit ihr versehenen Dualraum von  $E$  bezeichnen wir mit  $E^*$ . Aus der erwähnten universellen Eigenschaft folgt, dass auch die kanonische lineare Abbildung  $E \xrightarrow{e} E^{**}$  stetig ist. Aus diesem Grunde erhält man für kompakt erzeugte Vektorräume eine in mancher Hinsicht bessere Dualitätstheorie als für lokalkonvexe Räume.

Die dabei auftretenden Fragen sind zunächst die folgenden: Wann ist die kanonische Abbildung  $E \xrightarrow{e} E^{**}$  injektiv? Wann ist sie bijektiv? Wann ist  $E$  einbettbar, d.h. wann ist die Topologie von  $E$  durch jene von  $E^{**}$  im Sinne der kompakt erzeugten Räume induziert? Und wann ist schliesslich  $e$  ein Homöomorphismus von  $E$  auf  $E^{**}$ ?

Um diese Fragen in §4 beantworten zu können, werden nach einigen einleitenden Bemerkungen (§1) in §2 zunächst Zusammenhänge zwischen kompakt erzeugten und lokalkonvexen Vektorräumen näher untersucht. Dabei zeigt sich insbesondere, dass die beiden betreffenden Kategorien zueinander isomorphe Unterkategorien besitzen, deren Objekte wir aus später ersichtlichen Gründen als  $kc$ -Räume bzw. als  $ck$ -Räume bezeichnen. Die erwähnten Beziehungen erlauben es, für die in §3 beginnenden Untersuchungen über Dualräume Ergebnisse aus der Theorie der lokalkonvexen Räume anzuwenden. In §4 werden nicht nur die bereits angedeuteten Fragen bezüglich der Abbildung  $E \xrightarrow{e} E^{**}$  vollständig beantwortet, sondern es wird ausserdem gezeigt, dass die Klasse der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume sehr schöne Eigenschaften besitzt: Mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bildet sie eine vollständige und covollständige Kategorie, die ein Tensorprodukt besitzt; mit

---

<sup>1)</sup> Diese Arbeit entstand während eines Aufenthaltes des erstgenannten Autors am Forschungsinstitut für Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

allen stetigen Abbildungen als Morphismen erhält man eine kartesisch abgeschlossene Kategorie.

Wie sich zeigen wird, sind die einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume gerade die oben erwähnten  $kc$ -Räume. Da diese umkehrbar eindeutig den  $ck$ -Räumen entsprechen, erhalten wir so eine schon aus diesem Grunde interessante Klasse lokalkonvexer Räume. In §5 leiten wir einige Eigenschaften dieser Räume ab, die sie für die allgemeine Theorie wichtig erscheinen lassen.  $ck$ -Räume können analog zu den bornologischen Räumen definiert werden, und es zeigt sich, dass jeder bornologische Raum ein  $ck$ -Raum ist. Ein Montelraum z.B. ist genau dann vollständig bzw. ein  $ck$ -Raum, wenn sein starker Dualraum ein  $ck$ -Raum bzw. vollständig ist. Die von den bornologischen Räumen her bekannten „unangenehmen“ Erscheinungen bei der Produktbildung treten hier nicht auf: Jedes lokalkonvexe Produkt von  $ck$ -Räumen ist ein  $ck$ -Raum. Insbesondere ist jedes lokalkonvexe Produkt bornologischer Räume ein  $ck$ -Raum.

In §6 geben wir schliesslich einige Beispiele und Gegenbeispiele zur hier entwickelten Theorie.

## § 1. Kompakt erzeugte Räume

Einem beliebigen separierten topologischen Raum  $X$  kann man einen topologischen Raum  $\hat{k}X$  wie folgt zuordnen:  $\hat{k}X$  hat dieselbe unterliegende Menge wie  $X$  und trägt die durch die Inklusionen der kompakten Teilmengen von  $X$  coinduzierte Topologie. Die identische Abbildung  $1: \hat{k}X \rightarrow X$  ist dann stetig, so dass auch  $\hat{k}X$  separiert ist. Da ferner aus der Stetigkeit einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen separierten Räumen immer jene von  $f: \hat{k}X \rightarrow \hat{k}Y$  folgt, erhält man einen Endofunktor

$$\hat{k}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$$

der Kategorie  $\mathbf{H}$  der Hausdorff-Räume. Es gilt  $\hat{k} \circ \hat{k} = \hat{k}$ , weil  $X$  und  $\hat{k}X$  stets dieselben kompakten Teilmengen besitzen.

Ein separierter topologischer Raum  $X$  heisst *kompakt erzeugt* oder ein *k-Raum*, cf. [7], [9], [16], [18], wenn  $X = \hat{k}X$  gilt. Die von den kompakt erzeugten Räumen gebildete volle Unterkategorie von  $\mathbf{H}$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{KE}$ . Der Funktor  $\hat{k}: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$  faktorisiert sich jetzt folgendermassen:

$$\mathbf{H} \xrightarrow{k} \mathbf{KE} \xrightarrow{i} \mathbf{H}.$$

Dabei bezeichnet  $i$  den Inklusionsfunktor. Aus  $\hat{k} \circ \hat{k} = \hat{k}$  ergibt sich  $k \circ i = 1$ , und aus der Stetigkeit der identischen Abbildung  $kX \rightarrow X$  für jedes  $X \in \mathbf{H}$  folgt, dass der Funktor  $k: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{KE}$  zu  $i: \mathbf{KE} \rightarrow \mathbf{H}$  adjungiert ist.  $\mathbf{KE}$  ist also eine sogenannte reflektive Unterkategorie von  $\mathbf{H}$ .

Man schliesst hieraus, dass  $k$  mit Limites und  $i$  mit Colimites kommutiert, und dass die Kategorie  $\mathbf{KE}$  vollständig und covollständig ist. Dabei berechnen sich die Colimites wie in  $\mathbf{H}$ : der in  $\mathbf{H}$  gebildete Colimes von  $k$ -Räumen ist kompakt erzeugt und damit auch Colimes in  $\mathbf{KE}$ . Limites in  $\mathbf{KE}$  erhält man dagegen, indem man auf die entsprechenden, in  $\mathbf{H}$  gebildeten Limites den Funktor  $k$  anwendet. Insbesondere ist das in  $\mathbf{H}$  gebildete Produkt  $Y_1 \times Y_2$  bzw.  $\bigotimes_{i \in I} Y_i$  von  $k$ -Räumen nicht immer kompakt erzeugt. Man erhält aber das  $\mathbf{KE}$ -Produkt  $Y_1 \amalg Y_2$  bzw.  $\prod_{i \in I} Y_i$  gemäss  $Y_1 \amalg Y_2 = k(Y_1 \times Y_2)$  bzw.  $\prod_{i \in I} Y_i = k(\bigotimes_{i \in I} Y_i)$ .

Der wesentliche Vorteil der Kategorie  $\mathbf{KE}$  gegenüber der Kategorie  $\mathbf{H}$  liegt in der kartesischen Abgeschlossenheit von  $\mathbf{KE}$ , cf. [7], [18]. Dies bedeutet, dass es einen Bifunktor

$$\mathcal{C} : \mathbf{KE}^{op} \times \mathbf{KE} \rightarrow \mathbf{KE}$$

mit der Eigenschaft gibt, dass für jedes  $Y \in \mathbf{KE}$  der Funktor  $\mathcal{C}(Y, -)$  zum Funktor  $- \amalg Y$  adjungiert ist. Für  $Z \in \mathbf{KE}$  ist dabei  $\mathcal{C}(Y, Z)$  die Menge  $C(Y, Z)$  aller stetigen Abbildungen von  $Y$  in  $Z$ , versehen mit einer kompakt erzeugten Topologie, so dass für jedes  $X \in \mathbf{KE}$  gilt: Eine Abbildung  $f : X \rightarrow \mathcal{C}(Y, Z)$  ist genau dann stetig, wenn die durch  $\hat{f}(x, y) := f(x)(y)$  definierte Abbildung  $\hat{f} : X \amalg Y \rightarrow Z$  stetig ist.

Der Bifunktor  $\mathcal{C}$  ist hierdurch bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Er lässt sich wie folgt konstruieren:

$$\mathcal{C}(Y, Z) = kC_{co}(Y, Z).$$

Dabei ist  $C_{co}$  der wohlbekanntere Bifunktor, den man erhält, wenn man  $C(Y, Z)$  mit der *kompakt-offenen Topologie* versieht.

Hat man einen Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  von  $\mathbf{KE}$  mit der Eigenschaft, dass eine Abbildung  $g : Z \rightarrow Y$  einer  $k$ -Raumes  $Z$  nach  $Y$  genau dann stetig ist, wenn  $f \circ g : Z \rightarrow X$  stetig ist, so sagt man, die Topologie von  $Y$  sei die durch die Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  *induzierte  $\mathbf{KE}$ -Topologie* ( $Y$  ist dabei die  $Y$  zugrunde liegende Menge.) Ist  $f$  injektiv, so sagt man auch,  $Y$  sei mittels  $f$  ein  *$\mathbf{KE}$ -Teilraum* von  $X$ . Wir bemerken dazu folgendes: Ein topologischer Teilraum  $T$  eines kompakt erzeugten Raumes  $X$  ist i.a. nicht wieder kompakt erzeugt. Wenn allerdings  $T$  in  $X$  abgeschlossen (trivialer Fall) oder offen (cf. [7]) ist, so gilt bereits  $T = kT$ . Gemäss dem folgenden, leicht zu beweisenden Satz existiert für jede injektive Abbildung  $f : M \rightarrow X$  einer Menge  $M$  in einen kompakt erzeugten Raum  $X$  die durch  $f$  auf  $M$  induzierte  $\mathbf{KE}$ -Topologie, und diese wird erhalten, indem man auf die induzierte Topologie den Funktor  $k$  ausübt.

**1.1 SATZ.** *Sind  $X$  und  $Y$  separierte topologische Räume und ist die Topologie von  $Y$  die durch eine Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  induzierte Topologie, so ist die Topologie von  $kY$  die durch  $f : Y \rightarrow kX$  induzierte  $\mathbf{KE}$ -Topologie.*

## § 2. Kompakt erzeugte und lokalkonvexe Vektorräume

Wir betrachten nur Vektorräume über dem festen Körper  $\mathbb{K}$ , wobei  $\mathbb{K}$  entweder den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen oder den Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen bezeichnet. Wir denken uns  $\mathbb{K}$  stets mit der euklidischen Topologie versehen.

Ein *kompakt erzeugter Vektorraum* oder *linearer  $k$ -Raum* (über  $\mathbb{K}$ )  $E$  ist ein mit einer kompakt erzeugten Topologie versehener Vektorraum  $\underline{E}$  (über  $\mathbb{K}$ ), für welchen die algebraischen Operationen  $+ : E \times E \rightarrow E$  und  $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  stetig sind. Die von diesen Räumen und ihren stetigen linearen Abbildungen gebildete Kategorie bezeichnen wir mit **KEV**. Nicht jeder kompakt erzeugte Vektorraum  $E$  ist ein topologischer Vektorraum, weil aus der Stetigkeit von  $+ : E \times E \rightarrow E$  nicht notwendig jene von  $+ : E \times E \rightarrow E$  folgt. Für ein Gegenbeispiel verweisen wir auf [16]. Umgekehrt ist aber auch nicht jeder separierte topologische Vektorraum ein linearer  $k$ -Raum, siehe (6.1) oder [6]. Ist allerdings  $F$  ein separierter topologischer Vektorraum, so ist  $kF$  ein linearer  $k$ -Raum. Wir bekommen so einen ebenfalls mit  $k$  bezeichneten Funktor

$$k: \text{LCV} \rightarrow \text{KEV},$$

wobei wir mit **LCV** die Kategorie der *separierten* lokalkonvexen Vektorräume bezeichnen.

In jedem linearen  $k$ -Raum  $E$  bilden die konvexen Nullumgebungen eine Filterbasis. Der davon erzeugte Filter ist der Nullumgebungsfilter einer wohlbestimmten lokalkonvexen Topologie auf dem  $E$  zugrundeliegenden Vektorraum  $\underline{E}$ . Wir bezeichnen den so erhaltenen lokalkonvexen Raum mit  $cE$ . Eine stetige lineare Abbildung  $l: E_1 \rightarrow E_2$  zwischen linearen  $k$ -Räumen  $E_1$  und  $E_2$  ist auch stetig als Abbildung von  $cE_1$  in  $cE_2$ , so dass wir auf diese Weise einen Funktor

$$c: \text{KEV} \rightarrow \text{LCV}^*$$

erhalten, wobei wir mit **LCV\*** die Kategorie *aller* lokalkonvexen Räume bezeichnen. Für jedes  $E \in \text{KEV}$  ist  $1: E \rightarrow cE$  stetig. Ist ferner  $F \in \text{LCV}^*$ , so ist eine stetige lineare Abbildung von  $E$  in  $F$  auch als Abbildung von  $cE$  in  $F$  stetig.

Für  $E \in \text{KEV}$  ist  $cE$  *nicht* notwendig separiert. Wenn dies aber der Fall ist, nennen wir  $E$  *konvex-separiert*. Die konvex-separierten linearen  $k$ -Räume bilden eine volle Unterkategorie **CSKEV** von **KEV**, und  $c: \text{KEV} \rightarrow \text{LCV}^*$  induziert einen ebenfalls mit  $c$  bezeichneten Funktor

$$c: \text{CSKEV} \rightarrow \text{LCV}.$$

Wir werden häufig den leicht beweisbaren Satz aus [16] benutzen:

2.1 SATZ. *Der Funktor  $c: \mathbf{CSKEV} \rightarrow \mathbf{LVC}$  ist zu dem von  $k$  induzierten Funktor  $k: \mathbf{LCV} \rightarrow \mathbf{CSKEV}$  coadjungiert, und es gelten*

$$c \circ k \circ c = c \quad \text{und} \quad k \circ c \circ k = k.$$

Wir nennen im folgenden einen konvex-separierten linearen  $k$ -Raum  $E$  einen *kc-Raum*, wenn

$$E = kcE$$

gilt. Ein separierter lokalkonvexer Raum  $F$ , für den

$$F = ckF$$

gilt, heisst ein *ck-Raum*. Wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, spielen *kc-Räume* und *ck-Räume* eine wichtige Rolle. Zwischen beiden Raumklassen besteht ein eindeutiger Zusammenhang:

2.2 SATZ. *Mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bilden die kc-Räume und die ck-Räume isomorphe Kategorien.*

*Beweis.* Dies folgt sofort aus (2.1): Die Restriktionen der Funktoren  $c$  und  $k$  liefern den Isomorphismus bzw. dessen Umkehrung.

Solange uns nur stetige lineare Abbildungen interessieren, können wir uns wegen (2.2) auf die Untersuchung der *ck-Räume* beschränken und die erhaltenen Resultate auf die ihnen entsprechenden *kc-Räume* übertragen. Das hat den Vorteil, dass wir die umfangreiche Theorie der lokalkonvexen Räume als Hilfsmittel heranziehen können. Muss man aber, wie zum Beispiel in der Differentialrechnung, auch nicht-lineare Abbildungen betrachten, so weisen die *kc-Räume* gegenüber den *ck-Räumen* Vorteile auf. Die aus den *kc-Räumen* und allen stetigen Abbildungen als Morphismen gebildete Kategorie ist für einen allgemeinen Differentialkalkül sehr geeignet, cf. [16]. Will man analog zu (2.2) zur entsprechenden Kategorie der *ck-Räume* übergehen, so muss man dort als Morphismen alle Abbildungen nehmen, die stetig sind auf Kompakta.

Wie in [16] gezeigt wird, ist die Kategorie **KEV** vollständig und covollständig. Wir bezeichnen Produkte und Coprodukte in **KEV** mit „ $\Pi$ “ bzw. „ $\coprod$ “.

Für eine Familie  $(F_i)_{i \in I}$  in **LCV** gilt nun nicht nur die aus der Adjungiertheit von  $k$  folgende Identität

$$\prod_{i \in I} kF_i = k \times_{i \in I} F_i,$$

sondern auch

**2.3 LEMMA.** Für jede Familie  $(F_i)_{i \in I}$  in LCV gilt  $\coprod_{i \in I} kF_i = k \oplus_{i \in I} F_i$ .

*Beweis.*  $1: kF_i \rightarrow F_i$  ist stetig  $\forall i \in I$ . Also ist  $1: \coprod_{i \in I} kF_i \rightarrow k \oplus_{i \in I} F_i$  stetig. Zu zeigen bleibt, dass die Umkehrung stetig ist auf allen Kompakta. Dies folgt aber leicht, da jede kompakte Teilmenge von  $\oplus_{i \in I} F_i$  in einer endlichen Summe kompakter Teilmengen gewisser  $F_i$  enthalten ist, cf. [15], p. 103.

Für unsere Untersuchungen spielen Vollständigkeitsfragen eine wichtige Rolle. Da aber der Nullumgebungsfilter eines linearen  $k$ -Raumes ausser in speziellen Fällen nicht in der üblichen Weise eine uniforme Struktur erzeugt, arbeiten wir mit Vorteil mit dem zugehörigen lokalkonvexen Raum.

Mit  $\tilde{F}$  oder  $(F)^\sim$  bezeichnen wir die (übliche) Vervollständigung eines lokalkonvexen Raumes  $F$ . Das Vervollständigen ist bekanntlich funktoriell: Jede stetige lineare Abbildung  $l: F_1 \rightarrow F_2$  besitzt genau eine stetige lineare Erweiterung  $\tilde{l}: \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  aus LCV. Auf die Vervollständigung von  $ck$ -Räumen kommen wir in §5 zurück. Hier beweisen wir:

**2.4 SATZ.** Für jeden separierten lokalkonvexen Raum  $F$  ist  $ckF$  in natürlicher Weise ein Unterraum von  $ck(ckF)^\sim$ . Ist  $F$  vollständig, so kann man  $ckF$  mit einem komplementären Unterraum von  $ck(ckF)^\sim$  identifizieren.

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt daraus, dass die kanonische Inklusion  $i: ckF \rightarrow (ckF)^\sim$  auch als Abbildung von  $ckF$  in  $ck(ckF)^\sim$  stetig ist. Sei  $F$  vollständig. Da  $1: ckF \rightarrow F$  stetig ist, ergibt sich die Stetigkeit von  $\tilde{1}: (ckF)^\sim \rightarrow F$  und von  $\tilde{1}: ck(ckF)^\sim \rightarrow ckF$ . Es ist  $\tilde{1}$  eine stetige Retraktion zur Inklusion  $i: ckF \rightarrow ck(ckF)^\sim$ , d.h.  $ckF$  ist komplementär in  $ck(ckF)^\sim$ .

### § 3. Dualräume

Ist  $E$  ein topologischer oder kompakt erzeugter Vektorraum, so bezeichnen wir mit  $LE$  den Vektorraum der stetigen ( $\mathbb{K}$ -wertigen) Linearformen auf  $E$  und mit  $L_{co}E$  den mit der kompakt-offenen Topologie versehenen Raum  $LE$ . Dann ist für jeden kompakt erzeugten Vektorraum  $E$  der Raum  $L_{co}E$  ein Objekt in LCV. Da für jeden  $k$ -Raum  $X$  der Raum  $C_{co}(X, \mathbb{K})$  in kanonischer Weise als ein projektiver Limes von Banach-Räumen dargestellt werden kann, ist  $L_{co}E$  als abgeschlossener Teilraum von  $C_{co}(E, \mathbb{K})$  für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  vollständig.

Für jeden solchen Raum  $E$  setzen wir zur Abkürzung

$$E^* := kL_{co}E.$$

Die Zuordnung  $E \mapsto E^*$  ist natürlich funktoriell, und die Struktur von  $E^*$  ist charakterisiert durch folgende universelle Eigenschaft: Ist  $Z$  ein kompakt erzeugter Raum, so ist eine Abbildung  $f: Z \rightarrow E^*$  genau dann stetig, wenn die durch  $\hat{f}(z, x) :=$

$f(z)(x)$  definierte Abbildung  $\hat{f}: Z \amalg E \rightarrow \mathbb{K}$  stetig ist. In diesem Sinne ist also  $E^*$  der natürliche Dualraum von  $E$  in KEV.

Gemäss obiger Bemerkung gilt:

**3.1 SATZ.** *Für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  ist  $E^*$  ein  $kc$ -Raum von der Form  $E^* = kF$ , wobei  $F$  ein vollständiger lokalkonvexer separierter Raum ist.*

*Beweis.*  $F := L_{co}E$  ist in LCV und vollständig, und es gilt  $E^* = kF$ . Aus (2.1) ergibt sich  $kcE^* = kckF = kF = E^*$ .

Wir benötigen im folgenden häufig

**3.2 SATZ.** *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum  $F$  gilt*

$$L_{co}ckF = L_{co}kF.$$

*Insbesondere ist  $L_{co}ckF$  also vollständig.*

*Beweis.* Wie schon in §2 bemerkt, gilt  $LckF = LkF$ . Weil  $F$  und  $kF$  dieselben kompakten Teilmengen besitzen, gilt dasselbe auch für  $ckF$  und  $kF$ . Es ist also  $L_{co}ckF = L_{co}kF$ . Wir haben aber schon gesehen, dass  $L_{co}kF$  vollständig ist.

Dual dazu gilt:

**3.3 SATZ.** *Ist  $F$  ein vollständiger separierter lokalkonvexer Raum, so ist  $L_{co}F$  ein  $ck$ -Raum.*

*Beweis.* Mit  $L_{\nu}F$  bezeichnen wir den Raum  $LF$ , versehen mit der feinsten Topologie  $\nu$ , welche auf jeder gleichstetigen Teilmenge von  $LF$  mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie zusammenfällt. Man sieht, dass  $L_{\nu}F$  ein kompakt erzeugter Raum ist, cf. [10], §21.8. Weil  $F$  vollständig ist, bilden die konvexen unter den Nullumgebungen von  $L_{\nu}F$  eine Nullumgebungsbasis von  $L_{co}F$ , cf. [10], §21.9. Da die Topologie von  $kL_{co}F$  gröber ist als die von  $L_{\nu}F$ , folgt hieraus  $ckL_{co}F = L_{co}F$ .

Wenn die relativkompakten Teilmengen von  $L_{\nu}F$  mit den gleichstetigen zusammenfallen, ist  $L_{\nu}F$  offenbar sogar ein linearer  $k$ -Raum. Wir wissen aber nicht, ob  $L_{\nu}F$  immer ein linearer  $k$ -Raum ist.

**3.4 KOROLLAR.** *Mit  $F$  ist auch  $L_{co}F$  ein vollständiger  $ck$ -Raum.*

Wir beweisen jetzt den folgenden Darstellungssatz für den zu einem konvex-separierten linearen  $k$ -Raum  $E$  assoziierten lokalkonvexen Raum  $cE$ :

**3.5 SATZ.** *Sei  $E$  ein konvex-separierter linearer  $k$ -Raum. Dann ist die durch die kanonische Injektion  $e: E \rightarrow L_{co}L_{co}E$  auf  $\underline{E}$  induzierte Topologie mit derjenigen von  $cE$  identisch:  $cE$  kann also mit einem linearen Teilraum von  $L_{co}L_{co}E$  identifiziert werden.*

*Beweis.* Die durch  $e(x)(l) := l(x)$  definierte Abbildung  $e: E \rightarrow L_{co}L_{co}E$  ist nach dem Satz von Hahn-Banach, angewendet auf  $cE$ , injektiv. Aus der universellen Eigen-



schaft der in **KE** verwendeten Funktionenraumtopologie folgt die Stetigkeit von  $e: E \rightarrow E^{**} = kL_{co}kL_{co}E$ . Weil  $1: kL_{co}kL_{co}E \rightarrow L_{co}kL_{co}E$  stetig ist und  $L_{co}L_{co}E$  Teilraum von  $L_{co}kL_{co}E$  ist, folgt die Stetigkeit von  $e: E \rightarrow L_{co}L_{co}E$  und damit die von  $e: cE \rightarrow L_{co}L_{co}E$ . Die vermöge  $e$  auf  $\underline{E}$  induzierte Topologie ist also gröber als die von  $cE$ . Um zu zeigen, dass das Umgekehrte auch gilt, betrachten wir eine abgeschlossene, absolut-konvexe Nullumgebung  $U$  in  $cE$ . Dann ist die Polare  $U^\circ := \{l \in LE = LcE \mid |l(x)| \leq 1, \forall x \in U\}$  in  $L_{co}cE$  kompakt, cf. [10], §21.6. Aus der Stetigkeit von  $E \xrightarrow{1} cE$  folgt jene von  $L_{co}cE \xrightarrow{1} L_{co}E$ , also ist  $U^\circ$  auch kompakt in  $L_{co}E$ . Damit ist die in  $LL_{co}E$  gebildete Polare  $V$  von  $U^\circ$  eine Nullumgebung in  $L_{co}L_{co}E$ . Also ist  $U = \bar{e}^1(V)$  (Bipolarensatz!) Nullumgebung bezüglich der induzierten Topologie.

### 3.6 KOROLLAR.

(a) Für jeden  $ck$ -Raum  $F$  ist  $F$  Teilraum von  $L_{co}L_{co}F$ .

(b) Für jeden konvex-separierten linearen  $k$ -Raum  $E$  ist  $kcE$  ein **KE**-Teilraum von  $E^{**}$ .

*Beweis.* Der Beweis von (a) ergibt sich aus der Anwendung von (3.5) auf  $kF$  und aus (3.2). In (b) ist  $cE$  nach (3.5) Teilraum von  $L_{co}L_{co}E$ , und  $L_{co}L_{co}E$  ist Teilraum von  $L_{co}kL_{co}E$ . Die Behauptung folgt damit aus (1.1).

Wir haben allerdings noch kein Beispiel eines konvex-separierten linearen  $k$ -Raumes  $E$ , für den  $E \neq kcE$  gilt.

Wir sagen, ein separierter lokalkonvexer Raum  $F$  habe die *Ascoli-Eigenschaft*, wenn gilt:

$$A \subset LF \text{ gleichstetig} \Leftrightarrow A \subset L_{co}F \text{ relativkompakt.}$$

In diesem Falle gilt offenbar  $kL_{co}F = L_\nu F$ , wobei  $\nu$  wie in (3.3) die feinste Topologie auf  $LF$  ist, welche auf allen gleichstetigen Teilmengen von  $LF$  mit der von der schwachen Topologie induzierten Topologie übereinstimmt.  $L_\nu F$  ist also insbesondere ein linearer  $k$ -Raum.

Weil ein separierter lokalkonvexer Raum  $F$  genau dann die Ascoli-Eigenschaft hat, wenn die Inklusion  $e: F \rightarrow L_{co}L_{co}F$  stetig ist, folgt aus (3.6):

### 3.7 KOROLLAR. Jeder $ck$ -Raum hat die Ascoli-Eigenschaft.

Für einen  $ck$ -Raum  $F$  ist  $L_{co}F$  nach (3.2) ausserdem vollständig. Unter welchen Bedingungen folgt umgekehrt aus dieser und der Ascoli-Eigenschaft die Zugehörigkeit zu den  $ck$ -Räumen? Die Beantwortung dieser Frage wird für uns in §5 nützlich sein; in §4 benötigen wir die Aussagen (3.8)–(3.10) noch nicht. Wir beginnen mit der folgenden Verschärfung des bekannten Satzes von Krein (cf. [10], §24.5):

### 3.8 THEOREM. Sei $K$ eine kompakte Teilmenge des separierten lokalkonvexen

Raumes  $F$ , und seien  $K_1$  bzw.  $K_2$  die abgeschlossene (absolut-) konvexe Hülle von  $K$  in  $F$  bzw. in  $ckF$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $K_1$  ist kompakt in  $F$ .
- (2)  $K_2$  ist kompakt in  $ckF$ .
- (3)  $K_1$  ist  $\tau(\underline{F}, LckF)$ -vollständig<sup>2)</sup>.
- (4)  $K_2$  ist  $\tau(\underline{F}, LckF)$ -vollständig.

*Beweis.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2) ist einfach einzusehen; ebenso, dass in diesem Falle  $K_1 = K_2$  gilt. (2)  $\Leftrightarrow$  (4) ist die Aussage des Satzes von Krein, angewendet auf  $ckF$ . Es gilt (4)  $\Rightarrow$  (3), denn in diesem Falle gilt ja  $K_1 = K_2$ . Wir zeigen noch (3)  $\Rightarrow$  (4):  $K_2$  ist Teilmenge von  $K_1$  und abgeschlossen in  $ckF$ . Als konvexe Menge ist  $K_2$  dann auch  $\tau(\underline{F}, LckF)$ -abgeschlossen und damit  $\tau(\underline{F}, LckF)$ -vollständig.

Die Aussagen von (3.8) gelten insbesondere, wenn  $F$  oder  $ckF$  quasivollständig sind, und das ist der uns interessierende Fall. Wir zeigen:

**3.9 LEMMA.** Sei  $F \in LCV$ , und sei  $F$  oder  $ckF$  quasivollständig. Dann ist  $L_{co}F$  ein dichter Unterraum von  $L_{co}ckF$ .

*Beweis.* Weil  $F$  und  $ckF$  dieselben kompakten Teilmengen haben, bilden (wegen der Quasivollständigkeit) die Polaren  $K^\circ$  der in  $F$  absolutkonvexen kompakten Mengen  $K$  eine Nullumgebungsbasis in  $L_{co}ckF$ . Ist  $\psi \in LckF$ , so ist  $\psi/K$  für jedes unserer  $K$  stetig. Nach dem Approximationslemma, prop. 1, 3. §11 in [8], gibt es ein  $\varphi_K \in LF$  mit  $\varphi_K \in \psi + K^\circ$ .

**3.10 SATZ.** Sei  $F$  ein separierter lokalkonvexer Raum. Ist  $F$  oder  $ckF$  quasivollständig, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $F = ckF$ .
- (2)  $L_{co}F$  ist vollständig, und  $F$  hat die Ascoli-Eigenschaft.

*Beweis.* Zu zeigen ist noch (2)  $\Rightarrow$  (1). Aus der Vollständigkeit von  $L_{co}F$  und (3.9) folgt  $L_{co}F = L_{co}ckF$  und damit  $L_{co}L_{co}F = L_{co}L_{co}ckF$ . Weil  $F$  die Ascoli-Eigenschaft besitzt, erhalten wir mit Hilfe von (3.6) wie behauptet  $F = ckF$ .

Wir kommen nun zu dem folgenden wichtigen

**3.11 THEOREM.** Für jeden konvex-separierten linearen  $k$ -Raum  $E$  ist  $e(E)$  dicht in  $L_{co}kL_{co}E$ .

*Beweis.* Sei  $\psi \in LkL_{co}E$ . Es genügt zu zeigen, dass  $(\psi + W) \cap e(E)$  für jedes  $W$  aus einer Nullumgebungsbasis von  $L_{co}kL_{co}E$  nicht leer ist. Wegen der Vollständigkeit von  $L_{co}E$  genügt es,  $W$  alle Polaren  $A^\circ$  der absolutkonvexen kompakten Teilmengen  $A$  von  $L_{co}E$  durchlaufen zu lassen. Es bezeichne  $L_sE$  den Raum  $LE$  unter der relativ zu  $\underline{E}$  schwachen Topologie. Nach Voraussetzung ist  $\psi$  stetig auf den Kompakta von

<sup>2)</sup>  $\tau(\underline{F}, LckF)$  ist die Mackey-Topologie von  $\underline{F}$  bezüglich  $LckF$ .

$L_{co}E$ . Sei  $A \subset L_{co}E$  absolutkonvex und kompakt. Auf  $A$  stimmen die kompakt-offene und die schwache Topologie überein. Nach dem Approximationslemma, prop. 1, 3. §11 in [8], gibt es ein  $\varphi_A \in LL_s E$  mit  $\varphi_A \in \psi + A^\circ$ . Wegen  $LL_s E \subset e(E)$  folgt  $(\psi + A^\circ) \cap e(E) \neq \emptyset$ .

**3.12 KOROLLAR.** *Sei  $F$  ein  $ck$ -Raum. Dann ist  $e(F)$  dicht in  $L_{co}ckL_{co}F$ . Genau dann ist  $e: F \rightarrow L_{co}ckL_{co}F$  ein Homöomorphismus (auf), wenn  $F$  vollständig ist.*

*Beweis.* Die erste Aussage ergibt sich nach (3.2), wenn man (3.11) auf  $kF$  anwendet. Die zweite erhält man unter zusätzlicher Verwendung von (3.6).

*Bemerkungen.*

(1) Der Beweis von (3.11) kann natürlich auch mit Hilfe des Grothendieckschen Vollständigkeitskriteriums geführt werden, zu dem das erwähnte Approximationslemma eine vorbereitende Aussage ist.

(2) (3.10) findet sich in anderer Schreibweise bereits bei Buchwalter [3]. Die dort untersuchten lokalkonvexen „Kelley-Räume“ fallen unter den in (3.10) genannten Bedingungen mit den  $ck$ -Räumen zusammen.

#### § 4. Bidualräume und Tensorprodukte

Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt wurde, ist für jeden kompakt erzeugten Vektorraum  $E$  die kanonische lineare Abbildung  $e: E \rightarrow E^{**}$  stetig. Auf Grund des Satzes von Hahn-Banach ist sie ferner genau dann injektiv, wenn  $E$  konvex-separiert ist. Ist  $e$  bijektiv, so nennen wir  $E$  *halbreflexiv*. Ist  $E$  mittels  $e$  ein  $\mathbf{KE}$ -Teilraum von  $E^{**}$  (siehe (1.1)), so nennen wir  $E$  *einbettbar*. Ist  $E$  halbreflexiv und einbettbar, sind also  $E$  und  $E^{**}$  vermöge  $e$  homöomorph, so sagen wir,  $E$  sei *reflexiv*. Wir geben in diesem Abschnitt für jede dieser Eigenschaften Bedingungen an, die notwendig und hinreichend sind und zeigen, dass insbesondere die Kategorie der einbettbaren linearen  $k$ -Räume durch schöne Eigenschaften ausgezeichnet ist.

Wir beginnen mit

**4.1 SATZ.** *Für jeden halbreflexiven linearen  $k$ -Raum  $E$  ist  $E^*$  reflexiv.*

*Beweis.* Seien  $e: E \rightarrow E^{**}$  und  $f: E^* \rightarrow E^{***}$  die kanonischen Abbildungen. Weil „ $*$ “ ein Funktor ist, ergibt sich sofort, dass die durch  $e^*(\psi) := \psi \circ e$  definierte Abbildung  $e^*$  von  $E^{***}$  nach  $E^*$  stetig ist. Unmittelbar aus den Definitionen erhält man  $e^* \circ f = 1_{E^*}$ , so dass  $e^*$  surjektiv ist.  $e^*$  ist aber auch injektiv, denn  $e$  war als surjektiv vorausgesetzt.  $e^*$  und  $f$  sind also invers zueinander, und  $f$  ist ein Homöomorphismus.

Es ist unmittelbar klar, dass mit  $E$  auch  $E^*$  reflexiv ist. Ob die Voraussetzung in (4.1) aber wirklich schwächer ist, wissen wir nicht, weil wir kein Beispiel eines halbreflexiven linearen  $k$ -Raumes haben, der nicht reflexiv ist.

4.2 THEOREM. Für jeden konvex-separierten linearen  $k$ -Raum  $E$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $E$  ist halbreflexiv.
- (2)  $cE$  ist vollständig.
- (3)  $e:kcE \rightarrow E^{**}$  ist ein Homöomorphismus.
- (4)  $kcE$  ist reflexiv.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1) erhält man unmittelbar mit Hilfe von (3.5) und (3.11). Setzt man (3) voraus, so folgt aus der Halbreflexivität von  $E$  die Reflexivität von  $E^*$  und  $E^{**}$ , siehe (4.1). Wegen unserer Voraussetzung (3) ist  $kcE$  also reflexiv; damit haben wir (3)  $\Rightarrow$  (4). Aus (4) folgt zunächst die Halbreflexivität von  $kcE$ . Benutzt man (1)  $\Rightarrow$  (2), so hat man die Vollständigkeit von  $ckcE = cE$ . Damit ist auch (4)  $\Rightarrow$  (2) bewiesen.

4.3 THEOREM. Für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $E$  ist einbettbar.
- (2) Es existiert ein  $ck$ -Raum  $G$ , so dass  $E = kG$ .
- (3) Es existiert ein separierter lokalkonvexer Raum  $F$ , so dass  $E = kF$ .
- (4)  $E$  ist ein  $kc$ -Raum.

*Beweis.* (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (1): Dies erhält man unmittelbar mit Hilfe von (2.1) und (3.6).

(1)  $\Rightarrow$  (2): Aus der Injektivität von  $e$  folgt, wie schon erwähnt, die Separiertheit von  $cE$ . Da  $e: cE \rightarrow L_{co}kL_{co}E$  ferner ein Teilraum ist, s. (3.5), ist  $e: kcE \rightarrow kL_{co}kL_{co}E = E^{**}$  ein KE-Teilraum. Aus (1) folgt somit  $E = kcE$ . Setze  $G = cE$ .

Für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  ist  $E^*$  folglich einbettbar. Wegen (2.2) ist ferner die Kategorie der einbettbaren linearen  $k$ -Räume isomorph zur Kategorie der  $ck$ -Räume.

Durch Kombination der äquivalenten Bedingungen in (4.2) und (4.3) bekommt man jetzt eine ganze Reihe von Kriterien für die Reflexivität linearer  $k$ -Räume. Insbesondere hat man:

4.4 THEOREM. Für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $E$  ist reflexiv.
- (2) Es gibt einen vollständigen  $ck$ -Raum  $G$  mit  $E = kG$ .
- (3)  $E$  ist ein halbreflexiver  $kc$ -Raum.
- (4) Es gibt einen halbreflexiven linearen  $k$ -Raum  $E_1$  mit  $E = E_1^*$ .
- (5)  $E$  ist ein  $kc$ -Raum, und  $cE$  ist vollständig.

*Bemerkung.* Die Kategorie der reflexiven linearen  $k$ -Räume ist also isomorph zur Kategorie der vollständigen  $ck$ -Räume, siehe (2.2).

Wir wenden uns jetzt einigen besonderen Eigenschaften der Kategorie EKEV der einbettbaren linearen  $k$ -Räume mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen zu:

4.5 THEOREM. *Die Kategorie EKEV ist vollständig und covollständig.*

*Beweis.* Nach (2.2) müssen wir nur die Vollständigkeit und die Covollständigkeit der Kategorie CK der  $ck$ -Räume zeigen. Aber CK ist eine reflektive Unterkategorie von LCV, denn der Funktor  $ck: LCV \rightarrow CK$  ist ein zum Inklusionsfunktor  $i: CK \rightarrow LCV$  adjungierter Retraktionsfunktor. Aus der bekannten Vollständigkeit und Covollständigkeit von LCV folgt daher jene von CK.

Genauer gilt folgendes: Der Colimes in CK eines Diagramms von  $ck$ -Räumen stimmt mit dem in LCV gebildeten Colimes überein, während man den Limes in CK erhält, indem man auf den in LCV gebildeten Limes den Funktor  $ck$  ausübt. Wie wir allerdings später sehen werden, cf. (5.6), kann man sich beim Spezialfall der Produktbildung die Anwendung von  $ck$  sparen: Die in LCV gebildeten Produkte von  $ck$ -Räumen sind stets wieder  $ck$ -Räume.

Leicht ergibt sich ferner der

4.6 SATZ. *Jeder in KEV gebildete Limes von einbettbaren linearen  $k$ -Räumen ist einbettbar. Jeder lineare KE-Unterraum eines einbettbaren linearen  $k$ -Raumes ist einbettbar.*

Sind  $E_1, \dots, E_n$  und  $E$  kompakt erzeugte Vektorräume, so bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E)$$

den mit der universellen (d.h. durch die Inklusion in den Raum  $\mathcal{C}(E_1 \Pi \dots \Pi E_n, E)$  induzierten) kompakt erzeugten Struktur versehenen Vektorraum  $L(E_1, \dots, E_n; E)$  der stetigen multilinearen Abbildungen von  $E_1 \Pi \dots \Pi E_n$  in  $E$ . Es ist also

$$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E) = kL_{co}(E_1, \dots, E_n; E),$$

wobei der Index „co“ wieder auf die kompakt-offene Topologie hinweisen soll. Es folgt sofort aus der universellen Eigenschaft der Funktionenraumstruktur, dass  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n-1}; \mathcal{L}(E_n; E))$  und  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E)$  in kanonischer Weise homöomorph sind. Insbesondere kann man also immer  $\mathcal{L}(E_1; E_2^*)$  und  $\mathcal{L}(E_2; E_1^*)$  miteinander identifizieren.

Entsprechende Funktoren  $\mathcal{L}$  und kanonische Isomorphismen erhält man auch für die Kategorie EKEV, denn es gilt der

4.7 SATZ. *Ist von den linearen  $k$ -Räumen  $E_1, \dots, E_n, E$  der Raum  $E$  einbettbar, so ist auch  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E)$  einbettbar.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus (4.3) und der Separiertheit von  $L_{co}(E_1, \dots, E_n; E)$ , denn es ist ja  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E) = kL_{co}(E_1, \dots, E_n; E)$ .

Wir beweisen jetzt:

**4.8 THEOREM.** Die Kategorie **EKEV** der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume besitzt bezüglich  $\mathcal{L}$  ein Tensorprodukt  $\otimes$ . Für  $E$  und  $F$  aus **EKEV** ist dabei der  $E \otimes F$  zugrunde liegende Vektorraum  $\underline{E \otimes F}$  das algebraische Tensorprodukt  $\underline{E} \otimes \underline{F}$ , und die Topologie von  $E \otimes F$  ist die zu der natürlichen Injektion  $\bar{e}: E \otimes F \rightarrow \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^*$  gehörende **KE**-Teilraumstruktur. Ferner ist  $\underline{E \otimes F}$  (vermöge  $\bar{e}$ ) dicht in  $L_{\text{co}}\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ .

*Beweis.* Für jedes  $(x, y) \in \underline{E} \times \underline{F}$  erhält man eine durch  $e_{x, y}(b) := b(x, y)$  definierte stetige lineare Abbildung

$$e_{x, y}: \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}.$$

Daraus ergibt sich in natürlicher Weise die Abbildung

$$e: E \Pi F \rightarrow \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^*: (x, y) \mapsto e_{x, y};$$

und es ist unmittelbar klar, dass  $e$  bilinear und stetig ist.

Sei nun

$$t: \underline{E} \times \underline{F} \rightarrow \underline{E} \otimes \underline{F}$$

„das“ algebraische Tensorprodukt. Dann erhält man die durch  $e = \bar{e} \circ t$  charakterisierte lineare Abbildung

$$\bar{e}: \underline{E} \otimes \underline{F} \rightarrow L\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) = \underline{\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^*}$$

Wir zeigen, dass  $\bar{e}$  injektiv ist. Sei dazu  $0 \neq z \in \underline{E} \otimes \underline{F}$ , wobei wir  $z$  schreiben als  $z = \sum_{i=1}^n t(x_i, y_i)$  mit linear unabhängigen  $x_1, \dots, x_n$  aus  $\underline{E}$  und linear unabhängigen  $y_1, \dots, y_n$  aus  $\underline{F}$ . Da  $E$  und  $F$  konvex-separiert sind, existieren nach dem Satz von Hahn-Banach stetige Linearformen  $u: E \rightarrow \mathbb{K}$  und  $v: F \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $u(x_1) = v(y_1) = 1$  und  $u(x_i) = v(y_i) = 0 \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$ . Definiert man  $b \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$  durch  $b(x, y) := u(x) \cdot v(y)$ , so folgt  $(\bar{e}z)(b) = 1$  und damit  $\bar{e}z \neq 0$ .

Wegen der Injektivität von  $\bar{e}$  können wir nach (1.1) den Raum  $\underline{E} \otimes \underline{F}$  mit der **KE**-Teilraumstruktur von  $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^*$  versehen. Der so erhaltene kompakt erzeugte Vektorraum  $E \otimes F$  ist nach (4.6) einbettbar. Aus der Stetigkeit von  $e = \bar{e} \circ t$  folgt die Stetigkeit von  $t: E \Pi F \rightarrow E \otimes F$ .

Um die universelle Eigenschaft nachzuweisen, müssen wir nur zeigen, dass für einen beliebigen einbettbaren linearen  $k$ -Raum  $G$  aus der Stetigkeit einer bilinearen Abbildung  $b: E \Pi F \rightarrow G$  die Stetigkeit der durch  $b = \bar{b} \circ t$  eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $\bar{b}: E \otimes F \rightarrow G$  folgt. Dazu betrachten wir die durch  $\tilde{b}(w) := w \circ b$  definierte Abbildung

$$\tilde{b}: G^* \rightarrow \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}).$$

Offenbar ist  $\tilde{b}$  stetig linear, und damit haben wir die stetig lineare adjungierte Abbildung

$$\tilde{b}^*: \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^* \rightarrow G^{**}.$$

Es ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 E \amalg F & \xrightarrow{b} & G \\
 \uparrow e & \searrow t & \nearrow \tilde{b} \\
 & E \otimes F & \\
 \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})^* & \xrightarrow{\tilde{b}^*} & G^{**} \\
 & \nwarrow \bar{e} & \downarrow e_G
 \end{array}$$

Aus der Definition der betreffenden Abbildungen folgt zunächst  $e_G \circ b = \tilde{b}^* \circ e$ , also  $e_G \circ \tilde{b} \circ t = \tilde{b}^* \circ \bar{e} \circ t$ , und daraus  $e_G \circ \tilde{b} = \tilde{b}^* \circ \bar{e}$ . Da  $\tilde{b}^*$  und  $\bar{e}$  stetig sind, ist  $e_G \circ \tilde{b}$  stetig, und weil  $G$  einbettbar ist, folgt die Stetigkeit von  $\tilde{b}$ .

Die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes  $t: E \amalg F \rightarrow E \otimes F$  impliziert die Adjungiertheit der Funktoren  $- \otimes F$  und  $\mathcal{L}(F; -)$ ,  $F \in \mathbf{EKEV}$ . Daraus folgt

$$\mathcal{L}(E \otimes F; G) \cong \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(F; G)) \cong \mathcal{L}(E, F; G).$$

Für  $G = \mathbb{K}$  hat man insbesondere

$$(E \otimes F)^* \cong \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}).$$

Da nun nach (3.11)  $\underline{E} \otimes \underline{F}$  in  $L_{\text{co}} k L_{\text{co}}(E \otimes F) = L_{\text{co}}(E \otimes F)^*$  dicht liegt, folgt, dass  $\underline{E} \otimes \underline{F}$  in  $L_{\text{co}} \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$  dicht liegt.

Nach [16] besitzt sogar  $\mathbf{KEV}$  ein Tensorprodukt, jedoch fehlt hierfür noch eine analoge explizite Beschreibung.

Bezüglich der *stetigen* Abbildungen als Morphismen bilden die einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume eine Kategorie  $\mathbf{EKEVs}$ . Auch diese Kategorie zeichnet sich durch eine Reihe schöner Eigenschaften aus. Zunächst gilt:

**4.9 SATZ.** *Ist  $E$  ein einbettbarer linearer  $k$ -Raum, so gilt für jeden kompakt erzeugten Raum  $Y: \mathcal{C}(Y, E)$  ist einbettbar. Speziell ist also  $\mathcal{C}(Y, \mathbb{K})$  für jedes  $Y \in \mathbf{KE}$  einbettbar.*

Dies ist wieder eine einfache Konsequenz aus (4.3). Es folgt jedoch aus (4.9), dass  $\mathcal{C}: \mathbf{KE}^{\text{op}} \times \mathbf{KE} \rightarrow \mathbf{KE}$  einen Bifunktor

$$\mathcal{C}: \mathbf{EKEVs}^{\text{op}} \times \mathbf{EKEVs} \rightarrow \mathbf{EKEVs}$$

induziert. Gemäss (4.6) stimmt das Produkt in **EKEVs** mit jenem in **KEV** bzw. **KE** überein. Ferner ist für lineare  $k$ -Räume  $E, F, G$  eine Abbildung  $f: E \rightarrow \mathcal{C}(F, G)$  genau dann stetig, wenn  $\hat{f}: E \amalg F \rightarrow G: (x, y) \mapsto f(x)(y)$  stetig ist. Damit ergibt sich:

**4.10 THEOREM.** *Die Kategorie **EKEVs** der einbettbaren kompakt erzeugten Vektorräume mit den stetigen Abbildungen als Morphismen wird durch den Bifunktor  $\mathcal{C}$  kartesisch abgeschlossen.*

*Bemerkung:* Wäre, wie wir in [5] zunächst angekündigt haben, für jeden separierten, vollständigen lokalkonvexen Raum  $F$  auch  $ckF$  vollständig, so hätten wir den Aussagen (4.5)–(4.10) entsprechende Resultate auch für die Kategorie der reflexiven linearen  $k$ -Räume. Unser Beweis für die Vollständigkeit von  $ckF$  weist indessen eine Lücke auf, so dass diese Ergebnisse vorläufig nicht gesichert sind. Auf der anderen Seite haben wir jedoch auch kein Beispiel eines vollständigen Raumes  $F \in \text{LCV}$ , für den  $ckF$  nicht vollständig ist. Vergleiche hierzu auch die Aussagen (5.7)–(5.10) dieser Arbeit.

Hingegen ergibt sich leicht, dass  $F \in \text{LCV}$  genau dann folgenvollständig ist, wenn  $ckF$  diese Eigenschaft hat. Daher erhält man zu (4.5)–(4.10) analoge Aussagen auf alle Fälle für die Kategorie derjenigen  $kc$ -Räume  $E$ , für welche  $cE$  folgenvollständig ist. Diese Räume bilden, wie U. Seip gezeigt hat, eine für die Belange der Analysis hervorragend geeignete Kategorie. Wir verweisen diesbezüglich auf [16]; dort finden sich auch die Beweise für die erwähnten Aussagen. Was aus unseren Betrachtungen zusätzlich folgt, ist die Einbettbarkeit dieser Räume, sowie (4.12).

Für die Dualräume von Coprodukten und von Produkten kompakt erzeugter Vektorräume gelten die folgenden Sätze:

**4.11 SATZ.** *Für jede Familie  $(E_i)_{i \in I}$  linearer  $k$ -Räume gilt:*

$$\left( \coprod_{i \in I} E_i \right)^* \cong \prod_{i \in I} E_i^*.$$

*Beweis.* Da der Funktor  $\mathbf{KEV} \xrightarrow{*} \mathbf{KEV}^{\text{op}}$  wegen  $\mathcal{L}(E_1; E_2^*) \cong \mathcal{L}(E_2; E_1^*)$  einen Adjungierten, nämlich  $\mathbf{KEV}^{\text{op}} \xrightarrow{*} \mathbf{KEV}$  besitzt, kommutiert er mit Colimites, also mit Coprodukten. Das Coprodukt in  $\mathbf{KEV}^{\text{op}}$  ist aber das Produkt in  $\mathbf{KEV}$ .

Allgemeiner kann man zeigen: Für jeden linearen  $k$ -Raum  $E$  kommutiert der Funktor  $\mathcal{L}(-; E): \mathbf{KEV} \rightarrow \mathbf{KEV}^{\text{op}}$  mit Colimites, cf. Satz 16, p. 7 in [16].

**4.12 SATZ.** *Für jede Familie  $(E_i)_{i \in I}$  einbettbarer kompakt erzeugter Vektorräume gilt:*

$$\left( \prod_{i \in I} E_i \right)^* \cong \coprod_{i \in I} E_i^*.$$



*Beweis.* Wir schreiben  $E_i = kF_i$ , wobei die  $F_i$   $ck$ -Räume sind,  $\forall i \in I$ . In (5.6) werden wir zeigen, dass dann auch  $\bigtimes_{i \in I} F_i$  ein  $ck$ -Raum ist. Insbesondere besitzt also  $\bigtimes_{i \in I} F_i$  die Ascoli-Eigenschaft. Ist daher  $K \subset L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$  relativkompakt, so ist  $K$  in  $L \bigtimes_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} LF_i$  gleichstetig und damit in einer endlichen Summe gleichstetiger Teilmengen gewisser  $LF_i$  „enthalten“. Daraus ergibt sich, dass  $K$  relativkompakt „in“  $\bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i$  ist, d.h.  $\bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i$  und  $L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$  haben „dieselben“ relativkompakten Teilmengen. Es gilt also

$$kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i \cong k \bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i.$$

Aus (2.3) und (3.2) folgt damit

$$\prod_{i \in I} E_i^* = \prod_{i \in I} (kF_i)^* = \prod_{i \in I} kL_{co} F_i = k \bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i \cong kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i.$$

Weil  $\bigtimes_{i \in I} F_i$  ein  $ck$ -Raum ist, erhalten wir

$$\prod_{i \in I} E_i^* \cong kL_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i = kL_{co} k \bigtimes_{i \in I} F_i = kL_{co} \prod_{i \in I} kF_i = \left( \prod_{i \in I} E_i \right)^*.$$

Sind alle  $E_i$  sogar reflexiv, so können wir im Beweis von (4.12) die  $F_i$  sogar vollständig wählen. Dann ist  $\bigtimes_{i \in I} F_i$  ein vollständiger  $ck$ -Raum, so dass wegen  $\prod_{i \in I} E_i = k \bigtimes_{i \in I} F_i$  aus (4.4) folgt:

**4.13 SATZ.** *Jedes KEV-Produkt von reflexiven linearen  $k$ -Räumen ist reflexiv.*

Viele der in der Funktionalanalysis wichtigen Räume sind reflexive lineare  $k$ -Räume. So gilt z.B.:

**4.14 SATZ.** *Ist  $F$  ein Fréchet-Raum, so ist sowohl  $F$  als auch  $L_{co} F$  ein reflexiver kompakt erzeugter Vektorraum.*

*Beweis.* Für  $F$  folgt dies unmittelbar aus (4.4):  $F$  ist vollständig und erfüllt als metrisierbarer Raum  $F = kF$ . Daraus folgt, dass auch  $F^* = kL_{co} F$  ein reflexiver linearer  $k$ -Raum ist. Aus dem Satz von Banach-Dieudonné (cf. [8] oder [10]) folgt aber leicht, dass  $L_{co} F = kL_{co} F$  gilt.

Etwas allgemeiner gilt: Für jeden metrisierbaren lokalkonvexen Raum  $F$  ist  $L_{co} F$  ein reflexiver linearer  $k$ -Raum.

## § 5. Weitere Aussagen über $ck$ -Räume

In diesem Abschnitt leiten wir einige weitere Eigenschaften der  $ck$ -Räume ab, welche sie für die allgemeine Theorie der lokalkonvexen Räume interessant erscheinen lassen.

Ist  $F \in \text{LCV}$ , so können wir  $ckF$  auch beschreiben als denjenigen lokalkonvexen Raum, den wir erhalten, wenn wir den unterliegenden linearen Raum  $\underline{F}$  mit der feinsten lokalkonvexen Topologie versehen, welche dieselben kompakten Teilmengen wie  $F$  liefert. Dies legt die Frage nach Beziehungen zu anderen Klassen lokalkonvexer Räume nahe, die eine analoge Beschreibung gestatten. Wir denken dabei insbesondere an die *bornologischen Räume* und beweisen:

**5.1 SATZ.** *Jeder bornologische Raum ist ein ck-Raum.*

(5.1) ist eine einfache Konsequenz und sogar gleichwertig mit der folgenden Aussage, deren Beweis ein Argument benutzt, welches man z.B. bei Buchwalter [4] findet. Wir führen es der Vollständigkeit halber an.

Mit  $F^x$  bezeichnen wir den zu  $F \in \text{LCV}$  assoziierten *bornologischen Raum*. Eine Nullumgebungsbasis von  $F^x$  wird gebildet von allen absolutkonvexen Teilmengen von  $F$ , welche die beschränkten Mengen in  $F$  absorbieren.

**5.2 SATZ.** *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum  $F$  gilt*

$$F^x = (ckF)^x.$$

*Beweis.* Sei  $U$  eine absolutkonvexe Nullumgebung in  $(ckF)^x$ . Dann absorbiert  $U$  jede beschränkte Menge in  $ckF$  und insbesondere jede relativkompakte Teilmenge von  $F$ . Aber  $U$  absorbiert sogar jede beschränkte Menge in  $F$ . Denn wäre das für eine beschränkte Menge  $A$  in  $F$  nicht der Fall, so gäbe es zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in A$  mit  $x_n \notin n^2 \cdot U$ . Es wäre dann  $(1/n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge in  $F$ , welche als relativkompakte Menge in  $F$  nicht von  $U$  absorbiert würde: Widerspruch.  $U$  ist also eine Nullumgebung in  $F^x$ .

Ein anderer Beweis findet sich in der soeben erschienen Arbeit [20] von H. Porta.

Nicht jeder  $ck$ -Raum ist indessen bornologisch. In (6.2) geben wir ein Beispiel eines vollständigen  $ck$ -Raumes, dessen Topologie nicht die Mackey-Topologie ist. Es gibt weiter vollständige  $ck$ -Räume mit Mackey-Topologie, die nicht tonneliert sind, und es gibt tonnelierte und vollständige  $ck$ -Räume, die nicht bornologisch sind, cf. (6.3).

Aus (5.1) und (5.2) erhält man mit Hilfe von [10], §18.4:

**5.3 KOROLLAR.** *Für jedes  $F \in \text{LCV}$  ist  $L_b F$  Unterraum von  $L_b ckF$ , und  $L_b ckF$  ist vollständig.*

Mit „ $b$ “ beschreiben wir die Topologie der beschränkten Konvergenz. – Eine weitere Folgerung ist

**5.4 KOROLLAR.**  *$F \in \text{LCV}$  ist genau dann ein semi-Montel-Raum (s. [8]), wenn  $ckF$  diese Eigenschaft hat.*

Denn  $F$  und  $ckF$  haben dieselben beschränkten Mengen, und diese sind in  $F$  bzw.  $ckF$  relativkompakt.

Aber selbst in diesem speziellen Fall können  $F^*$  und  $ckF$  verschieden sein, wie wir in (6.2) sehen werden.

Für *Montel-Räume* ergibt sich das folgende Vollständigkeitskriterium:

5.5 THEOREM. *Es seien  $F$  ein Montel-Raum und  $L_b F$  sein starker Dualraum.*

(1)  *$F$  ist genau dann vollständig, wenn  $L_b F$  ein  $ck$ -Raum ist.*

(2)  *$F$  ist genau dann ein  $ck$ -Raum, wenn  $L_b F$  vollständig ist.*

*Beweis.*  $L_b F$  ist ebenfalls ein Montel-Raum. Aus der Reflexivität der Montel-Räume folgt, dass (1) und (2) sogar äquivalente Aussagen sind. Wir beweisen (2):

Aus  $F = ckF$  folgt die Vollständigkeit von  $L_b F$  nach (5.3). Sei umgekehrt  $L_b F$  vollständig. Als Montel-Raum ist  $F$  quasivollständig. Ferner haben wir  $F \cong L_b L_b F = L_{co} L_{co} F$ . Also hat  $F$  die Ascoli-Eigenschaft, und wir bekommen  $F = ckF$  nach (3.10).

Auf Konsequenzen aus (5.5) kommen wir im nächsten Abschnitt zurück.

Jetzt beschäftigen wir uns noch mit „Permanenzeigenschaften“ der  $ck$ -Räume. Für Produkte ist die Situation besser als z.B. bei den bornologischen Räumen:

5.6 SATZ.

(a) *Jeder Colimes in LCV von  $ck$ -Räumen ist wieder ein  $ck$ -Raum. Insbesondere sind also die in LCV gebildeten Quotienten, direkten Summen und induktiven Limites von  $ck$ -Räumen wieder  $ck$ -Räume.*

(b) *Das in LCV gebildete Produkt jeder Familie von  $ck$ -Räumen ist ein  $ck$ -Raum.*  
*Beweis.*

(a) Dies ergibt sich unmittelbar daraus, dass der zugehörige Inklusionsfunktoren einen Adjungierten, nämlich  $ck$ , besitzt.

(b) Ein direkter Beweis für diese Behauptung findet sich in der soeben erschienenen Note [20] von H. Porta. Unter Verwendung eines allgemeinen Satzes von M. de Wilde (cf. Cor. 1.1 in [19]) kann der Beweis etwas eleganter aber auch so geführt werden:

Ist zunächst  $(F_i)_{i \in I}$  eine Familie vollständiger  $ck$ -Räume, so können wir nicht nur  $\bigtimes_{i \in I} L_{co} L_{co} F_i$  und  $L_{co} \bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i$ , sondern auch  $\bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i$  und  $L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$  miteinander identifizieren, cf. z.B. [15], pp. 103–104. Es ist  $\bigtimes_{i \in I} F_i$  vollständig und hat die Ascoli-Eigenschaft wegen  $\bigtimes_{i \in I} F_i \cong \bigtimes_{i \in I} L_{co} L_{co} F_i \cong L_{co} L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i$ . Ferner impliziert die Vollständigkeit aller  $L_{co} F_i$  die Vollständigkeit von  $L_{co} \bigtimes_{i \in I} F_i \cong \bigoplus_{i \in I} L_{co} F_i$ , so dass aus (3.10) die Behauptung  $ck \bigtimes_{i \in I} F_i = \bigtimes_{i \in I} F_i$  folgt. Vergleiche hierzu auch mit [3].

Ist jetzt  $(F_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie von  $ck$ -Räumen, so ist für  $x = (x_i)_{i \in I} \in \bigtimes_{i \in I} F_i$  mit  $x_i \neq 0, \forall i \in I$ , insbesondere  $\bigtimes_{i \in I} [x_i] \cong \mathbb{K}^I$  ein  $ck$ -Raum. Dabei bezeichnen wir den von  $x_i$  in  $F_i$  erzeugten linearen Teilraum mit  $[x_i]$ . Die Voraussetzungen von Cor.

1.1 in [19] sind damit erfüllt, d.h. die Topologie von  $ck \times_{i \in I} F_i$  ist gröber als jene von  $\times_{i \in I} F_i$ ; q.e.d.

Aus (5.6) folgt sofort, dass jedes Produkt in LCV von bornologischen Räumen wenigstens immer ein  $ck$ -Raum ist.

Unter der induzierten Topologie ist ein linearer Unterraum eines  $ck$ -Raumes allerdings nicht notwendig wieder ein  $ck$ -Raum, auch dann nicht, wenn er abgeschlossen ist. Man kann schliesslich jeden separierten lokalkonvexen Raum in ein Produkt von Banach-Räumen, also in einen  $ck$ -Raum einbetten. Konkrete Beispiele werden wir in (6.1) und (6.4) angeben.

Insbesondere ist nicht jeder LCV-Limes von  $ck$ -Räumen wieder ein  $ck$ -Raum.

Offen ist die Frage, ob für jeden separierten lokalkonvexen Raum  $F$  die Beziehung

$$(ckF)^\sim = ck(ckF)^\sim$$

gilt. Eine positive Antwort würde implizieren, dass  $ckF$  für vollständiges  $F \in \text{LCV}$  stets vollständig ist. Vergleiche hierfür die Bemerkung im Anschluss an (4.10) sowie (2.4).

Wir beschäftigen uns jetzt noch kurz mit der oben gestellten sowie einigen verwandten Fragen und beginnen mit

**5.7 SATZ.** *Für jeden separierten lokalkonvexen Raum  $F$  hat  $(ckF)^\sim$  die Ascoli-Eigenschaft, und es gilt  $ckL_{co}ckF = L_{co}(ckF)^\sim$ .*

*Beweis.* Wir identifizieren  $L(ckF)^\sim$  und  $LckF$ . Aus der Stetigkeit der Inklusion  $ckF \rightarrow (ckF)^\sim$  folgt, dass  $L_{co}(ckF)^\sim \xrightarrow{1} L_{co}ckF$  stetig ist. Ist also  $A$  eine relativkompakte Teilmenge in  $L_{co}(ckF)^\sim$ , so auch in  $L_{co}ckF$ . Es folgt, dass  $A$  in  $LckF$  und damit in  $L(ckF)^\sim$  gleichstetig ist, cf. (3.7). Also besitzen  $L_{co}ckF$  und  $L_{co}(ckF)^\sim$  dieselben relativkompakten Teilmengen, nämlich die gleichstetigen. Weil aber nach (3.3)  $L_{co}(ckF)^\sim$  ein  $ck$ -Raum ist, erhalten wir  $L_{co}(ckF)^\sim = ckL_{co}ckF$ .

Zusammen mit (3.10) folgt:

**5.8 KOROLLAR.** *Die Vervollständigung  $\tilde{F}$  eines  $ck$ -Raumes  $F$  ist genau dann ein  $ck$ -Raum, wenn  $L_{co}\tilde{F}$  vollständig ist.*

Dual zu (5.8) gilt:

**5.9 SATZ.** *Sei  $F$  ein vollständiger separierter lokalkonvexer Raum. Genau dann ist  $ckF$  vollständig, wenn  $L_{co}ckF$  ein  $ck$ -Raum ist.*

*Beweis.* Ist  $ckF$  vollständig, so ist  $L_{co}ckF$  ein  $ck$ -Raum nach (3.3). Sei umgekehrt  $L_{co}ckF$  ein  $ck$ -Raum. Dann folgt die Behauptung wegen  $(ckF)^\sim = LckL_{co}ckF = LL_{co}ckF \cong L(L_{co}F)^\sim \cong LL_{co}F \cong \underline{F}$ .

Analog zur Situation bei den bornologischen Räumen (cf. [10], §28) hat man das folgende Kriterium:

5.10 SATZ. Die Vervollständigung  $\tilde{F}$  eines  $ck$ -Raumes  $F$  ist genau dann ein  $ck$ -Raum, wenn folgendes gilt:

$$\forall l \in Lck\tilde{F}: l|_F = 0 \Rightarrow l = 0. \quad (*)$$

*Beweis.* Ist  $F$  ein  $ck$ -Raum, so ist (\*) trivialerweise erfüllt. Es gelte also (\*). Sei  $l' \in LckF$ . Dann ist  $l := l'|_F \in LF$  und besitzt eine wohlbestimmte stetige lineare Erweiterung  $\tilde{l} \in L\tilde{F}$ . Es ist  $l' - \tilde{l} \in Lck\tilde{F}$  und  $(l' - \tilde{l})|_F = 0$ . Wegen (\*) erhalten wir damit  $l' = \tilde{l}$ . Es ist also  $L\tilde{F} = Lck\tilde{F}$ , d.h.  $L_{co}\tilde{F}$  ist wegen (3.2) vollständig. Aus (5.8) folgt  $\tilde{F} = ck\tilde{F}$ .

Wir hätten auch (2.4) benutzen können.

Wie schon erwähnt, fehlt uns ein konkretes Beispiel eines vollständigen Raumes  $F \in LCV$ , für den  $ckF$  nicht vollständig ist. Ebenso fehlt uns ein Beispiel eines  $ck$ -Raumes  $F$ , dessen Vervollständigung  $\tilde{F}$  kein  $ck$ -Raum ist.

## § 6. Beispiele

Für einen separierten lokalkonvexen Raum  $F$  bezeichnen wir mit  $F_0$  den Raum  $\underline{F}$ , versehen mit der feinsten Schwartz-Topologie, welche gröber ist als die Topologie von  $F$ . Die Topologie von  $F_0$  liegt zwischen der Topologie von  $F$  und der schwachen Topologie  $\sigma(F, LF)$ . Insbesondere haben  $F$  und  $F_0$  dieselben beschränkten Mengen. Wir nennen  $F_0$  den zu  $F$  assoziierten Schwartz-Raum. Diese Räume sind zuerst in [14] und [2] näher untersucht worden. Wir wenden die dort erhaltenen Resultate für zwei Spezialfälle an:

6.1. In [10], §31.5, findet sich ein Beispiel eines Fréchet-Montel-Raumes  $F$ , der einen abgeschlossenen linearen Teilraum  $G$  besitzt, so dass der Quotientenraum  $F/G$  kein Fréchet-Montel-Raum mehr ist. Unter Verwendung des Korollars zur Proposition 7 in 3.§15 von [8] sieht man sofort, dass  $F$  kein Schwartz-Raum sein kann;  $F$  und  $F_0$  sind also verschieden. Nach [2] ist  $F_0$  in diesem Fall jedoch vollständig und damit insbesondere ein semi-Montel-Raum, cf. [8]. Da  $F$  ein Montel-Raum ist und da  $F$  und  $F_0$  dieselben beschränkten Mengen besitzen, folgt, dass beide Räume auch dieselben kompakten Mengen haben müssen, dass also  $F = ckF_0$  und sogar  $F = kF_0$  gelten muss. Damit haben wir:

*Ist  $F$  ein Fréchet-Montel-Raum und kein Schwartz-Raum, so ist der zu  $F$  assoziierte Schwartz-Raum  $F_0$  kein  $ck$ -Raum.*

Aber  $F_0$  ist in natürlicher Weise ein abgeschlossener Unterraum eines Produktes von Banach-Räumen, nach (5.6) also eines  $ck$ -Raumes.

6.2. Die Situation ändert sich, wenn wir einen unendlichdimensionalen reflexiven

Banach-Raum  $F$  betrachten. Wie Raïkov in [14] gezeigt hat, gilt für den assoziierten Schwartz-Raum  $F_0$  diesmal

$$F_0 \cong L_{co}L_bF.$$

Als Banach-Raum ist  $L_bF$  ein vollständiger  $ck$ -Raum. Nach (3.4) ist also auch  $F_0$  ein vollständiger  $ck$ -Raum. Weil  $F$  unendlichdimensional ist, gilt  $F \neq F_0$ . Also haben wir:

*Der zu einem unendlichdimensionalen reflexiven Banach-Raum  $F$  assoziierte Schwartz-Raum  $F_0$  ist ein vollständiger  $ck$ -Raum, dessen Topologie nicht die Mackey-Topologie ist.*

$F_0$  ist also insbesondere nicht quasitonneliert und erst recht nicht bornologisch.

6.3. Sei  $\lambda$  ein vollkommener Folgenraum mit  $\alpha$ -Dual  $\lambda^\#$ . Dann ist  $\lambda$  unter seiner Mackey-Topologie  $\tau(\lambda, \lambda^\#)$  vollständig, cf. [10], §30.5, und darstellbar in der Form  $L_{co}F$ , wobei  $F$  den Raum  $\lambda^\#$  unter seiner normalen Topologie bezeichnet, cf. [10], §30.6. Aus §30.1 und §30.5 in [10] folgt, dass  $F$  ebenfalls vollständig ist. Nach (3.3) ist deshalb  $\lambda$  unter  $\tau(\lambda, \lambda^\#)$  ein vollständiger  $ck$ -Raum.

Dieser Raum muss nicht tonneliert sein, cf. [10], §30,7, und wenn er tonneliert ist, braucht er noch nicht bornologisch zu sein; für ein Beispiel verweisen wir auf [11]. In diesem Beispiel ist übrigens  $\lambda$  unter  $\tau(\lambda, \lambda^\#)$  sogar darstellbar als Vervollständigung eines bornologischen Raumes.

*Es gibt also vollständige nicht-tonnelierte  $ck$ -Räume mit Mackey-Topologie, und es gibt vollständige tonnelierte  $ck$ -Räume, die nicht bornologisch sind.*

6.4. Ist  $F$  ein quasivollständiger  $ck$ -Raum, aber nicht vollständig, so ist  $L_{co}F$  kein  $ck$ -Raum.

Die Topologie von  $L_{co}F$  ist in diesem Fall nach dem Satz von Mackey-Arens nämlich gröber als die Mackey-Topologie  $\tau(LF, \underline{F})$ , wir haben also  $\underline{F} \cong LL_{co}F$ . Nach (3.5) und (3.11) ist jedoch  $\underline{\tilde{F}} \cong LckL_{co}F$ , so dass  $L_{co}F$  und  $ckL_{co}F$  nicht einmal denselben Dualraum liefern.

6.5. In [12] und [1] gaben Kōmura und Amemiya Beispiele nichtvollständiger Montel-Räume. Für jeden derartigen Raum  $F$  ist  $L_bF$  nach (5.5) ein *Beispiel eines Montel-Raumes, der kein  $ck$ -Raum ist*. Insbesondere ist  $L_bF$  dann nicht bornologisch, so dass man auf diese Weise zusätzlich zu den bekannten Beispielen in [11], [13], [17] tonnelierte Räume erhält, die nicht bornologisch sind.

Allerdings liefern die nicht-vollständigen Montel-Räume  $F$  in [1] und [12] auch schon solche Beispiele. Nach Konstruktion sind ihre beschränkten Mengen nämlich endlichdimensional, es ist also  $F^x = ckF$ , und daraus folgt, dass  $F$  nicht einmal ein  $ck$ -Raum ist. Also ist auch  $L_bF$  ein unvollständiger Montel-Raum.

## LITERATUR

- [1] AMEMIYA, I. und KŌMURA, Y., *Über nicht-vollständige Montelräume*, Math. Ann. 177 (1968), 273–277.
- [2] BEREZANSKIĬ, I. A., *Inductively reflexive, locally convex spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 182 (1968), 20–22. Engl. Übers. in Soviet Math. Dokl. 9 (1968), 1080–1082.
- [3] BUCHWALTER, H., *Topologies et compactologies*, Publ. Dépt. Math. Lyon 6–2 (1969), 1–74.
- [4] ———, *Espaces ultrabornologiques et b-réflexivité*, Publ. Dépt. Math. Lyon (1971–72).
- [5] FRÖLICHER, A. und JARCHOW, H., *La réflexivité des espaces vectoriels à génération compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 274 (1972), 616–617.
- [6] FRÖLICHER, A. und ROULIN, M., *Topologies faibles et topologies à génération compacte*, Erscheint in Enseign. Math.
- [7] GABRIEL, P. und ZISMAN, M., *Calculus of fractions and homotopy theory* (Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1967).
- [8] HORVÁTH, J., *Topological vector spaces and distributions I* (Reading, Mass., Addison-Wesley 1966).
- [9] KELLEY, J. L., *General topology* (Princeton, van Nostrand 1955).
- [10] KÖTHE, G., *Topologische lineare Räume I*. 2. Aufl. (Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1966).
- [11] KŌMURA, T. und KŌMURA, Y., *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations*, J. Math. Soc. Japan 15 (1963), 319–338.
- [12] KŌMURA, Y., *Some examples on linear topological spaces*, Math. Ann. 153 (1964), 150–162.
- [13] NACHBIN, L., *Topological vector spaces of continuous functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 40 (1954) 471–474.
- [14] RAĪKOV, D. A., *Einige Eigenschaften vollstetiger linearer Operatoren* (russ.), Učen Zap. Moskov Gos. Ped. Inst. im V. I. Lenina, 188 (1962), 171–191.
- [15] ROBERTSON, A. P. und ROBERTSON, W. J., *Topologische Vektorräume*, Mannheim: Bibliographisches Institut 1967. (Uebersetzung).
- [16] SEIP, U., *Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis*, Lecture Notes in Math. 273, 1972.
- [17] SHIROTA, T., *On locally convex vector spaces of continuous functions*, Proc. Jap. Acad. 30 (1954), 294–298.
- [18] STEENROD, N., *A convenient category of topological spaces*, Mich. Math. J. 14 (1967), 133–152.
- [19] DE WILDE, M., *Vector topologies and linear maps on products of topological vector spaces*, Math. Ann. 196 (1972), 117–128.
- [20] PORTA, H., *Compactly determined locally convex topologies*, Math. Ann. 196 (1972), 91–100.

*Prof. Dr. A. Frölicher, Institut de Mathématiques, Université de Genève*

*Prof. Dr. H. Jarchow, Mathematisches Institut, Universität Zürich*

Eingegangen, 31 Mai 1972