

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 46 (1971)

Artikel: Relationen auf komplexen Räumen
Autor: Kaup, Burchard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35505>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Relationen auf komplexen Räumen

BURCHARD KAUP¹⁾

Einleitung

Gegeben sei eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $h: X \rightarrow Y$ (alle in dieser Arbeit betrachteten komplexen Räume seien reduzierte komplexe Räume im Sinne von [3]). Ist h endlich, so ist X genau dann Steinsch, wenn Y Steinsch ist. (Vgl. [14, Satz 8 e)] und [11, Seite 64 ff].) Da die holomorph-konvexen Räume in enger Beziehung zu den Steinschen Räumen stehen (nach einem Satz von Remmert-Cartan ([12], [2, Seite 9]) ist ein komplexer Raum genau dann holomorph-konvex, wenn er sich eigentlich und holomorph in einen Steinschen Raum abbilden lässt) kann man fragen, ob ein analoges Resultat (h sei dabei nicht notwendig endlich) für holomorph-konvexe Räume gültig ist. Eine Richtung ist trivial: ist h eigentlich und Y holomorph-konvex, dann ist auch X holomorph-konvex. Es bleibt also die Frage: wann ist mit X auch Y holomorph-konvex?

In [14] beweisen Remmert und Stein:

(1) *Sind die komplexen Räume X und Y normal, ist h eigentlich und endlich und bildet h jede Komponente von X auf eine Komponente von Y ab, dann ist mit X auch Y holomorph-konvex.*

Implizit wird in (1) vorausgesetzt, dass X und Y dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz genügen und dass h offen ist. Es gilt nun (vgl. (4.8)):

(2) *Ist $h: X \rightarrow Y$ eigentlich, offen und surjektiv, genügen X und Y dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz und ist X holomorph-konvex, dann ist auch Y holomorph-konvex.*

Ist h nicht offen oder genügt Y nicht dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz, dann ist Y i.A. nicht mehr holomorph-konvex, wie die Beispiele 1, 2, 4 in § 5 zeigen. Es kann sogar passieren, dass h bijektiv ist und dass X holomorph-konvex ist, Y dagegen nicht (Beispiel 1).

Dem Beweis von (2) liegt folgende Idee zugrunde: ist X holomorph-konvex, $h: X \rightarrow Y$ holomorph, eigentlich und surjektiv, dann bildet man zu $h: X \rightarrow Y$ und

¹⁾ Die Anfertigung dieser Arbeit wurde gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds.

$p: X \rightarrow \tilde{X}$ ($\tilde{X}$ sei die Remmert'sche Reduktion von X , vgl. [12], [2]) das Pushoutdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow r \\ \tilde{X} & \xrightarrow{s} & P \end{array} \quad (*)$$

in der Kategorie der geringten Räume (vgl. [8]). Dann gilt:

(3) Y holomorph-konvex $\Leftrightarrow P$ ist komplexer Raum und r (oder s) ist eigentlich.

Man beweist nun (2), indem man zeigt, dass (unter den Voraussetzungen von (2) und mit den Bezeichnungen von (*)) P Quotient von $\tilde{X}$ nach einer eigentlichen endlichen offenen analytischen Äquivalenzrelation ist (eine Äquivalenzrelation heisst analytisch, wenn ihr Graph eine analytische Menge ist), und dass $\tilde{X}$ dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz genügt. Ein Satz von Holmann ([6, Satz 10]) liefert dann, dass P ein komplexer Raum ist; dann ist Y holomorph-konvex wegen (3).

Ein wesentliches Teilresultat zum Beweis von (2) mittels (3) ist also der Nachweis, dass s auf $\tilde{X}$ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation erzeugt. Es erweist sich als zweckmässig, dazu sofort die folgende allgemeine Frage zu stellen:

gegeben sei eine symmetrische, reflexive, analytische Teilmenge R von $X \times X$, die Projektion $p_R: R \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, sei eigentlich. (Wir werden R dann kurz eine eigentliche analytische Relation auf X nennen; vgl. § 1). Unter welchen Voraussetzungen ist dann die von R auf X erzeugte Äquivalenzrelation R^∞ (zur Definition von R^∞ vgl. § 1) eigentlich und analytisch?

Das Hauptergebnis dieser Arbeit lautet (vgl. (2.1)):

(4) SATZ. R sei eine eigentliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X , R^∞ sei die von R erzeugte Äquivalenzrelation. X' sei die grösste offene R^∞ -saturierte Teilmenge von X mit der Eigenschaft, dass die Beschränkung von R^∞ auf X' eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf X' ist. Dann ist $A := X - X'$ analytisch in X , es ist $A = R^\infty(TR)$ (zur Definition von TR siehe § 1). Ist R offene Relation (d.h. die Abbildung p_R ist offen), dann ist $A = TR$; ist R endliche Relation (d.h. die Fasern der Abbildung p_R sind endlich), dann ist $A = R^\infty(\overline{T^0 R})$, wobei $T^0 R = \{x \in X; \text{die } R^\infty\text{-Äquivalenzklasse von } x \text{ hat unendlichviele Elemente}\}$.

Als Korollar ergibt sich sofort:

(5) R sei eine eigentliche endliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X . Sind alle Äquivalenzklassen von R^∞ endlich, dann ist R^∞ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation.

Beispiel 5 in § 5 zeigt, dass man (R sei eine eigentliche, endliche Relation) allein aus der Endlichkeit von R^∞ nicht auf die Eigentlichkeit von R^∞ schliessen kann; man braucht dafür zusätzliche Informationen über R , z.B. dass R analytisch ist.

Aus (5) und dem bereits erwähnten Satz von Holmann aus [6] ergibt sich die folgende Existenzaussage für Pushouts zu holomorphen Abbildungen (vgl. (4.3)):

(6) $p: X \rightarrow Y, q: X \rightarrow Z$ seien offene eigentliche endliche holomorphe Abbildungen, $r: Y \rightarrow P, s: Z \rightarrow P$ sei der zu p und q in der Kategorie der geringsten Räume gebildete Pushout. Genügen die komplexen Räume X, Y und Z dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz und sind alle Fasern von r (oder s) endlich, dann ist P komplexer Raum und die Abbildungen r und s sind eigentlich, offen und holomorph.

Beispiel 3 in § 5 zeigt, dass in (6) die Voraussetzung „ X, Y und Z genügt dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz“ nicht überflüssig ist.

In § 1 werden Relationen definiert und elementare Eigenschaften von Relationen nachgewiesen. § 2 enthält das Hauptergebnis über eigentliche analytische Relationen und einige direkte Folgerungen daraus. § 3 enthält den Beweis des Hauptsatzes aus § 2, § 4 enthält die oben angedeuteten Überlegungen über holomorph-konvexe Räume, § 5 enthält einige abgrenzende Beispiele.

§ 1. Vorbereitungen

Alle auftretenden topologischen Räume seien lokalkompakt, insbesondere also hausdorffsch. Alle auftretenden komplexen Räume seien reduzierte komplexe Räume im Sinne von [3], alle analytischen Teilmengen seien abgeschlossene Teilmengen. Es sei $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Es sei X eine Menge. Mit $p, q: X \times X \rightarrow X$ bezeichnen wir die kanonischen Projektionen auf die erste bzw. zweite Komponente. Für $R \subset X \times X$ seien p_R bzw. q_R die Beschränkungen von p bzw. q auf R . Unter einer Relation auf X verstehen wir eine reflexive, symmetrische Teilmenge R von $X \times X$, d.h. es gilt

- a) $x \in X \Rightarrow (x, x) \in R$.
- b) $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

Ist R eine Relation auf $X, M \subset X$, dann sei $R(M) := q_R(p_R^{-1}(M)) = p_R(q_R^{-1}(M))$. R erzeugt also eine kanonische Abbildung (die wir wieder mit R bezeichnen) $R: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ (=Potenzmenge von X), $x \mapsto R(x)$, mit

- a') $x \in R(x)$ für $x \in X$.
- b') $x \in R(y) \Rightarrow y \in R(x)$.

Für $M \subset X$ ist $R(M) = \bigcup_{x \in M} R(x)$.—Erfüllt umgekehrt $R: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ die Bedingungen a') und b'), dann ist $\bigcup_{x \in X} \{x\} \times R(x)$ eine Relation auf X , die wieder mit R bezeichnet

werde. Wir interpretieren manchmal eine Relation als Teilmenge von $X \times X$, manchmal als Abbildung von X nach $\mathfrak{P}(X)$.

Es sei X ein (lokalkompakter) topologischer Raum, R eine Relation auf X . R heisst *eigentliche* bzw. *offene* bzw. *endliche Relation*, wenn $p_R: R \rightarrow X$ (und damit auch q_R) eigentlich bzw. offen bzw. endlich ist; dabei heisse eine Abbildung *endlich*, wenn alle ihre Fasern endliche Mengen sind. Ist X ein komplexer Raum, dann heisst eine Relation R auf X *analytisch*, wenn R eine analytische Teilmenge von $X \times X$ ist.

Es sei R eine Relation auf der Menge X . Dann definieren wir induktiv Relationen R^n für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ folgendermassen: $R^0(x) := \{x\}$. $R^{n+1}(x) := R(R^n(x))$. – Ein geordnetes $(n+1)$ -Tupel $(x_0, \dots, x_n)$ von Elementen aus X heisse *R -Folge*, wenn $(x_{i-1}, x_i) \in R$ für $i = 1, \dots, n$.

(1.1) Es sei R eine Relation auf dem (lokalkompakten) topologischen Raum X .

a) $R^n(x) = \{y \in X; \text{es gibt eine } R\text{-Folge } (x_0, \dots, x_n) \text{ mit } x_0 = x, x_n = y\}$.

b) R eigentlich $\Leftrightarrow (K \subset X, K \text{ kompakt} \Rightarrow R(K) \text{ kompakt})$.

R offen $\Leftrightarrow (U \text{ offen in } X \Rightarrow R(U) \text{ offen in } X)$.

R eigentlich $\Rightarrow R = \bar{R} \subset X \times X$.

R eigentlich $\Rightarrow R^n$ eigentlich für $n \in \mathbb{N}$.

R offen $\Rightarrow R^n$ offen für $n \in \mathbb{N}$.

c) X sei ein komplexer Raum, R analytisch und eigentlich. Dann sind alle Relationen $R^n, n \in \mathbb{N}$, eigentlich und analytisch. Ist A analytisch in X , dann ist auch $R(A)$ analytisch in X .

Beweis. a) ist klar.

ad b). Ist R eigentlich, K kompakt, dann ist $R(K) = q_R(p_R^{-1}(K))$ kompakt. – Ist umgekehrt $R(K)$ für jedes kompakte K wieder kompakt, dann ist p_R eigentlich, denn für kompaktes K in X ist $p_R^{-1}(K)$ als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Teilmenge $K \times R(K)$ wieder kompakt. – Ist p_R offen und U offen in X , dann ist $R(U) = p_R(q_R^{-1}(U))$ offen in X . Ist umgekehrt $R(U)$ offen für offenes U , dann ist p_R offen: sei dazu $(x, y) \in R$, V eine offene Umgebung von x , U eine offene Umgebung von y , dann ist $x \in V \cap R(U) \subset p_R((V \times U) \cap R)$; also ist p_R offen in jedem Punkt $(x, y) \in R$. – Dass $R = \bar{R} \subset X \times X$, falls R eigentlich ist, folgt sofort daraus, dass für kompaktes K, K' in X auch $(K \times K') \cap R$ kompakt ist. – Dass mit R auch R^n eigentlich bzw. offen ist, folgt sofort durch Induktion über n , da $R^{n+1}(K) = R(R^n(K))$ für $K \subset X$.

ad c). Induktion über n . $n=0, 1$ ist trivial. Sei bereits R^{n-1} als eigentlich und analytisch nachgewiesen. Die Abbildung $h: (R, q_R) \times_X (R^{n-1}, p_{R^{n-1}}) \rightarrow X \times X$, definiert durch $((x, y), (y, z)) \mapsto (x, z)$, ist holomorph mit $\text{Im } h = R^n$. h ist eigentlich: ist $K \times K'$ kompakt in $X \times X$, dann ist $h^{-1}(K \times K')$ enthalten in der nach Induktionsvoraussetzung kompakten Menge $K \times R(K) \times R^{n-1}(K') \times K'$; aus dem Remmert'schen Abbildungssatz [13, Satz 23] folgt also, dass R^n analytisch in $X \times X$ ist. Aus dem gleichen Satz folgt, dass $R(A)$ analytisch ist, wenn A analytisch ist.

Es sei wieder R eine Relation auf der Menge X . Dann ist die Relation R^∞ mit $R^\infty(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(x)$ eine Äquivalenzrelation auf X ; sie ist die von R auf X erzeugte Äquivalenzrelation. Für $x \in X$ sei $\tau_R(x) := \min \{n; R^n(x) = R^{n+1}(x)\}$; falls $R^n(x) \neq R^{n+1}(x)$ für alle n , sei $\tau_R(x) := \infty$.

(1.2) Für $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent: a) $\tau_R(x) \leq n$. b) $R^n(x) = R^{n+1}(x)$. c) $R^n(x) = R^\infty(x)$.

Es sei wieder X ein topologischer Raum, R eine Relation auf X . Dann sei

$$\begin{aligned} T_n^0 R &:= \{x \in X; \tau_R(x) > n\}, & T_n R &:= \overline{T_n^0 R}, \\ T^0 R &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n^0 R, & TR &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n R. \end{aligned}$$

(1.3) a) $x \in T^0 R \Leftrightarrow \tau_R(x) = \infty$.

b) $x \in TR \Leftrightarrow \tau_R$ ist in keiner Umgebung von x beschränkt.

Beweis von b). x liegt genau dann in $T_n R$, wenn es zu jeder Umgebung U von x $y \in U$ mit $\tau_R(y) > n$ gibt. $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n R$ besagt also genau, dass es zu jeder Umgebung U von x und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $y \in U$ mit $\tau_R(y) > n$ gibt, d.h. τ_R ist in jeder Umgebung von x unbeschränkt.

(1.4) Es sei R eine Relation auf dem topologischen Raum X . Dann gilt:

a) R offen $\Rightarrow R^\infty$ offen.

Ist $TR = \emptyset$, dann gilt:

b) R eigentlich $\Rightarrow R^\infty$ eigentlich.

c) R eigentlich, analytisch $\Rightarrow R^\infty$ eigentlich, analytisch.

Beweis. Ad b). Sei K kompakt in X , dann ist τ_R beschränkt auf K , etwa $\tau_R(x) \leq N$ für $x \in K$. Dann ist $R^\infty(K) = \bigcup_{x \in K} R^\infty(x) = \bigcup_{x \in K} R^N(x) = R^N(K)$ kompakt wegen (1.1)

Ad c). Wegen b) ist R^∞ eigentlich. Es sei $(x, y) \in R^\infty$ gegeben, U sei eine offene relativkompakte R^∞ -saturierte Umgebung von x , dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $R^\infty \cap (U \times U) = R^n \cap (U \times U) \ni (x, y)$. Da R^∞ abgeschlossen in $X \times X$ ist und R^n analytisch ist, ist auch R^∞ analytisch in $X \times X$.

Abschliessend notieren wir noch

(1.5) R sei eigentliche offene Relation auf dem topologischen Raum X . Dann ist $T_n^0 R$ offen in X für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Zu $x \in T_n^0 R$ gibt es (da $R^n = \bar{R}^n \subset X \times X$) ein $y \in X$ und Umgebungen U von x , V von y in X derart, dass $(x, y) \in R^{n+1}$, $(U \times V) \cap R^n = \emptyset$. Da R^{n+1} offene Relation ist, ist $p((U \times V) \cap R^{n+1}) \subset T_n^0 R$ eine Umgebung von x in X .

§ 2. Formulierung der Ergebnisse

(2.1) HAUPTSATZ. *R sei eine eigentliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X , R^∞ die von R erzeugte Äquivalenzrelation.*

a) *Es gibt eine grösste offene R^∞ -saturierte Teilmenge X' von X derart, dass die Beschränkung von R^∞ auf X' eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf X' ist. TR und $R^\infty(TR)$ sind analytische Teilmengen von X , $R^\infty(TR)$ ist das Komplement von X' in X .*

b) *Ist R offen, dann ist $R^\infty(TR) = TR = \overline{T^0 R}$.*

c) *Ist R endlich, dann ist $TR = \overline{T^0 R}$; ausserhalb von $R^\infty(TR)$ ist R^∞ eine endliche Äquivalenzrelation.*

Bevor wir (2.1) im nächsten Paragraphen beweisen, sollen aus (2.1) einige Folgerungen gezogen werden.

(2.2) SATZ. *R sei eigentliche offene analytische Relation auf dem komplexen Raum X und es sei $T^0 R = \emptyset$ (d.h. $\tau_R(x) < \infty$ für alle $x \in X$). Dann ist die von R erzeugte Äquivalenzrelation R^∞ offen, analytisch und eigentlich.*

Beweis. Wegen (2.1) b) ist $R^\infty(TR) = TR = \overline{T^0 R} = \emptyset$, also folgt (2.2) aus (2.1) a).

(2.3) SATZ. *R sei eigentliche endliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X , die Äquivalenzrelation R^∞ sei endlich (d.h. $R^\infty(x)$ ist eine endliche Menge für alle $x \in X$). Dann ist R^∞ eine eigentliche endliche analytische Äquivalenzrelation.*

Beweis. Da R^∞ endlich ist, gibt es zu jedem $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $R^{n(x)}(x) = R^\infty(x)$, also ist $\tau_R(x) < \infty$ für $x \in X$, also $T^0 R = \emptyset$; wegen (2.1) c) ist also $R^\infty(TR) = \emptyset$, (2.3) folgt aus (2.1) a).

(2.4) SATZ. *R sei analytische (und damit eigentliche) Relation auf dem kompakten komplexen Raum X . Ist R offen oder endlich, so gilt: R^∞ analytisch $\Leftrightarrow T^0 R = \emptyset$.*

Beweis. „ $\Leftarrow$ “ folgt sofort aus (2.2) und (2.3). – Sei umgekehrt R^∞ analytisch; dann sind insbesondere alle Äquivalenzklassen $R^\infty(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(x)$, $x \in X$, analytische Teilmengen von X . Da eine echte abzählbar-unendliche Vereinigung von analytischen Teilmengen eines kompakten komplexen Raumes nicht mehr analytisch ist, gibt es zu jedem $x \in X$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $R^\infty(x) = \bigcup_{n=0}^{n(x)} R^n(x) = R^{n(x)}(x)$, also ist $\tau_R(x) < \infty$ für $x \in X$, d.h. $T^0 R = \emptyset$.

Abschliessend wollen wir noch notieren, was die Bedingung $TR = \overline{T^0 R}$ anschaulich bedeutet. Aus (1.3) folgt sofort:

(2.5) *R sei eine Relation auf dem topologischen Raum X . $TR = \overline{T^0 R}$ ist äquivalent zu folgender Aussage: Ist $x_0 \in X$ mit $\tau_R(x_0) < \infty$ und ist τ_R in keiner Umgebung*

von x_0 beschränkt, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, mit $\tau_R(x_n) = \infty$ für alle $n \geq 1$.

§ 3. Beweis des Hauptsatzes

Es sei R eine eigentliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X . Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\tilde{R}^{n+1} := \{z \in R^{n+1}; (R^{n+1}, z) \neq (R^n, z)\}$; dabei sei (R^i, z) der von R^i in z erzeugte analytische Mengenkeim. Ist z.B. $z \in R^{n+1}$, $z \notin R^n$, dann ist sicher $z \in \tilde{R}^{n+1}$. $\tilde{R}^{n+1}$ ist als Träger der kohärenten Idealgarbe, die R^n als analytische Teilmenge von R^{n+1} beschreibt, analytisch in $X \times X$.

(3.1) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $T_n R = p(\tilde{R}^{n+1})$, also analytisch in X . (Dabei sei wie immer $p: X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, kanonisch.) Insbesondere ist also TR analytisch in X .

Beweis. Sei $x \in T_n^0 R$. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $(x, y) \in R^{n+1}$, $(x, y) \notin R^n$. Also ist $(x, y) \in \tilde{R}^{n+1}$, also $x \in p(\tilde{R}^{n+1})$, also ist $T_n^0 R \subset p(\tilde{R}^{n+1})$. Da $p(\tilde{R}^{n+1})$ abgeschlossen ist, gilt auch $T_n R \subset p(\tilde{R}^{n+1})$. – Sei umgekehrt $x \in p(\tilde{R}^{n+1})$. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $(x, y) \in \tilde{R}^{n+1}$. Ist $(x, y) \notin R^n$, dann ist $\tau_R(x) > n$, also $x \in T_n^0 R$. Ist $(x, y) \in R^n$, dann gibt es eine Folge (x_i, y_i) in $\tilde{R}^{n+1} - R^n$, die gegen (x, y) konvergiert. Dann ist $x_i \in T_n^0 R$, wegen $x = \lim x_i$ also $x \in T_n R$.

(3.2) $R^\infty(TR)$ ist analytisch in X .

Beweis. Nach (3.1) ist TR analytisch in X . Es genügt also zu zeigen, dass es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung U von x_0 in X und $n(U) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$R^\infty(TR) \cap U = R^{n(U)}(TR) \cap U. \quad (*)$$

Es sei zunächst $x_0 \notin TR$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 in X und $n(U) \in \mathbb{N}$ mit $U \cap TR = \emptyset$ und $\tau_R(y) \leq n(U)$ für $y \in U$. Dann gilt (*): sei nämlich $x \in R^\infty(TR) \cap U$; dann gibt es $x_1 \in TR$ mit $x \in R^\infty(x_1)$. Da $x \in U$, ist $\tau_R(x) \leq n(U)$, also $x_1 \in R^\infty(x) = R^{n(U)}(x)$, also $x \in R^{n(U)}(x_1)$, also $x \in R^{n(U)}(TR) \cap U$. Es sei jetzt $x_0 \in TR$. Da TR Durchschnitt der analytischen Mengen $T_n R$ ist, gibt es zu x_0 eine Umgebung U und $n(U) \in \mathbb{N}$ mit $TR \cap U = T_{n(U)} R \cap U$. Dann gilt wieder (*): es sei $x \in R^\infty(TR) \cap U$ gegeben. Ist $x \in TR \cap U$, dann ist trivialerweise $x \in R^{n(U)}(TR) \cap U$. Ist $x \notin TR$, dann ist $x \notin T_{n(U)} R$, also $\tau_R(x) \leq n(U)$, und es gibt ein $y \in TR$ mit $x \in R^\infty(y)$. Da $\tau_R(x) \leq n(U)$, ist $x \in R^{n(U)}(y)$, also wiederum $x \in R^{n(U)}(TR) \cap U$. – Damit ist (3.2) bewiesen.

(3.3) Die Beschränkung von R^∞ auf $X - R^\infty(TR)$ ist eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation.

Beweis. Da $R^\infty(TR)$ R^∞ -saturiert ist, ist auch $X' := X - R^\infty(TR)$ R^∞ -saturiert. Bezeichnen wir mit R' die Relation auf X' , die sich durch Beschränkung von R auf X' ergibt. Da nach Konstruktion $T(R') = \emptyset$, folgt (3.3) aus (1.4).

(3.4) *Es sei U offen und R^∞ -saturiert in X , die Beschränkung von R^∞ auf U sei eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation. Dann ist $U \cap R^\infty(TR) = \emptyset$.*

Beweis. Da U R^∞ -saturiert ist, genügt es zu zeigen, dass $U \cap TR = \emptyset$. Es sei $x_0 \in U$ gegeben. Da $R^\infty|_U$ analytisch ist, ist die Vereinigung $R^\infty \cap (U \times U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (R^n \cap (U \times U))$ lokal-endlich. Zu jedem $y \in R^\infty(x_0)$ gibt es also eine Umgebung V von (x_0, y) in $U \times U$ und $n(V) \in \mathbb{N}$ derart, dass $R^\infty \cap V = R^{n(V)} \cap V$. Da $R^\infty(x_0)$ kompakt ist, gibt es also eine Umgebung W von $\{x_0\} \times R^\infty(x_0)$ in $U \times U$ und $n(W) \in \mathbb{N}$ derart, dass $R^\infty \cap W = R^{n(W)} \cap W$. Da $p_{R^\infty}: R^\infty \rightarrow X$ eigentlich ist in einer Umgebung von $\{x_0\} \times R^\infty(x_0)$, gibt es eine Umgebung Z von x_0 in X derart, dass $p_{R^\infty}^{-1}(Z) \subset R^\infty \cap W = R^{n(W)} \cap W$; dann ist aber $\tau_R(z) \leq n(W)$ für $z \in Z$, als $Z \cap TR = \emptyset$.

(3.5) *Ist R offen, dann ist $R^\infty(TR) = TR$.*

Beweis. Es sei $x_0 \in X - TR$ gegeben; zu zeigen ist $x_0 \notin R^\infty(TR)$. Zu x_0 gibt es eine offene Umgebung U von x_0 und $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau_R(y) \leq n$ für $y \in U$. Da mit R auch R^∞ offen ist, ist $R^\infty(U)$ offen in X und es gilt $\tau_R(y) \leq n$ für $y \in R^\infty(U)$. Also ist $R^\infty(U) \cap T_m R = \emptyset$ für $m \geq n$, insbesondere ist $R^\infty(U) \cap TR = \emptyset$, d.h. $U \cap R^\infty(TR) = \emptyset$, also $x_0 \notin R^\infty(TR)$.

Zum Nachweis, dass $TR = \overline{T^0 R}$, falls R offen oder endlich ist, beweisen wir zunächst

(3.6) *R sei eine eigentliche analytische Relation auf dem komplexen Raum X , für alle $n \in \mathbb{N}$ enthalte $T_n^0 R$ eine offene dichte Teilmenge von $T_n R$. Dann ist $TR = \overline{T^0 R}$.*

Beweis. $\overline{T^0 R} \subset TR$ ist klar. – Angenommen, es gibt $x \in TR$, $x \notin \overline{T^0 R}$. Dann sei U eine offene relativkompakte Umgebung von x in X mit $U \cap \overline{T^0 R} = \emptyset$. Für $A \subset X$ schreiben wir abkürzend $A' := A \cap U$. Da TR Durchschnitt der analytischen Mengen $T_n R$ ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $T_n R' = TR'$ für $n \geq N$, also enthält nach Voraussetzung $T_n^0 R'$ eine offene und dichte Teilmenge von TR' für $n \geq N$. Nach Wahl von U ist $\bigcap_{n \geq N} T_n^0 R' = \overline{T^0 R'} = \emptyset$. Da TR' Bairesch ist, ist damit auch $TR' = \emptyset$. Das steht aber im Widerspruch zu $x \in TR'$.

Die folgende Aussage und (3.6) liefern den Beweis, dass $TR = \overline{T^0 R}$, falls R offen oder endlich ist:

(3.7) *Ist R offen oder endlich, dann enthält $T_n^0 R$ eine offene dichte Teilmenge von $T_n R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Ist R offen, dann ist $T_n R$ offen in X wegen (1.5), also offen und dicht in $T_n R = \overline{T_n^0 R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. – Es sei jetzt R endlich. Es genügt, für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen:

- i) $T_n^0 R \supset T_n R - p(\tilde{R}^{n+1} \cap R^n)$.
- ii) $T_n R - p(\tilde{R}^{n+1} \cap R^n)$ ist offen und dicht in $T_n R = p(\tilde{R}^{n+1})$.

ad i). Wegen $T_n^0 R \subset T_n R$ ist i) äquivalent mit

$$T_n R - T_n^0 R \subset p(\tilde{R}^{n+1} \cap R^n).$$

Es sei $x \in T_n R - T_n^0 R$ gegeben. Dann ist $x \in T_n R = p(\tilde{R}^{n+1})$ und $\tau_R(x) \leq n$. Es gibt also ein $y \in X$ mit $(x, y) \in \tilde{R}^{n+1} \subset R^{n+1}$. Da $\tau_R(x) \leq n$, ist bereits $(x, y) \in R^n$, also $(x, y) \in \tilde{R}^{n+1} \cap R^n$, also $x \in p(\tilde{R}^{n+1} \cap R^n)$.

ad ii). Da $p: \tilde{R}^{n+1} \rightarrow T_n R = p(\tilde{R}^{n+1})$ endlich und eigentlich ist und deshalb nirgends-dichte analytische Teilmengen in nirgends-dichte analytische Teilmengen abbildet, genügt es zu zeigen, dass $\tilde{R}^{n+1} \cap R^n$ nirgends dicht liegt in $\tilde{R}^{n+1}$. Das folgt aber (mit $B := R^{n+1}$, $A := R^n$, $C = \tilde{R}^{n+1}$) sofort aus dem folgenden Lemma:

(3.8) LEMMA. $A \subset B$ seien analytische Teilmengen eines komplexen Raumes X , C sei die analytische Menge $C := \{b \in B; (B, b) \neq (A, b)\}$ (dabei sei (B, b) der analytische Mengenkeim, den B in b erzeugt). Dann ist $A \cap C$ nirgends dicht in C .

Beweis. Es sei $a \in A \cap C$ gegeben. Mit A_a, B_a, C_a bezeichnen wir die Keime, die A, B bzw. C in a erzeugen. Zu zeigen ist, dass $A_a \cap C_a$ dünn in C_a ist. A erzeuge in a die Primkeime $A_1, \dots, A_r$, B erzeuge in a die Primkeime $B_1, \dots, B_s, B_{s+1}, \dots, B_t$; die B_τ seien so numeriert, dass $B_\tau \in \{A_1, \dots, A_r\} \Leftrightarrow 1 \leq \tau \leq s$. Dann ist $A_a = B_1 \cup \dots \cup B_s \cup A'_a$, wobei A'_a dünn in $B_{s+1} \cup \dots \cup B_t = C_a$ ist. Also ist $A_a \cap C_a = (B_1 \cup \dots \cup B_s \cup A'_a) \cap (B_{s+1} \cup \dots \cup B_t) = ((B_1 \cup \dots \cup B_s) \cap (B_{s+1} \cup \dots \cup B_t)) \cup A'_a$ dünn in C_a .

§ 4. Anwendungen auf Pushouts und holomorph-konvexe Räume

Wie wir schon in der Einleitung angedeutet haben, treten analytische Relationen bei der Bildung von Pushouts zu holomorphen Abbildungen auf. – Es sei X ein komplexer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist der geringste Raum X/R mit einem kanonischen Morphismus $p: X \rightarrow X/R$ wohldefiniert (vgl. [6, § 2], [2, § 2]). Es seien jetzt R und S eigentliche analytische Äquivalenzrelationen auf X , die Quotienten X/R und X/S seien (versehen mit den kanonischen Quotientenstrukturen) komplexe Räume; $R \cup S$ ist eine analytische Relation auf X . Ist $X/(R \cup S)^\infty$ ein komplexer Raum, dann ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & X/R = Y \\ q \downarrow & & \downarrow r \\ Z = X/S & \xrightarrow{s} & X/(R \cup S)^\infty = P \end{array} \quad (*)$$

(alle Abbildungen kanonisch) ein Pushoutdiagramm in der Kategorie der komplexen Räume.

Es sei $Y := X/R$, $Z := X/S$, $P := X/(R \cup S)^\infty$; p, q, r, s seien die kanonischen Abbildungen (wie im Diagramm (*)). $S^* := (p \times p)(S) \subset Y \times Y$ und $R^* := (q \times q)(R) \subset Z \times Z$ sind, da p und q eigentliche holomorphe Abbildungen sind, eigentliche analytische Relationen auf Y bzw. Z .

(4.1) Es seien $(S^*)^\infty$ und $(R^*)^\infty$ die von S^* und R^* auf Y bzw. Z erzeugten Äquivalenzrelationen.

a) $P = Y/(S^*)^\infty = Z/(R^*)^\infty$.

b) $(R^*)^\infty$ ist genau dann eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf Z , wenn $(S^*)^\infty$ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf Y ist.

Beweis. Ad a). Wir zeigen nur, dass $P = X/(R^*)^\infty$. Dazu ist zu zeigen, dass $A := (p \times p)^{-1}((R^*)^\infty) = (R \cup S)^\infty =: B \subset X \times X$. Da A eine Äquivalenzrelation ist, gilt wegen $R \cup S \subset (p \times p)^{-1}(R^*) \subset A$, dass $B \subset A$. Andererseits ist $(p \times p)(B)$ eine Äquivalenzrelation, die $(p \times p)(R) = R^*$ enthält, also gilt $(p \times p)(B) \supset (R^*)^\infty$, daraus folgt sofort $B \supset A$.

Ad b). $(S^*)^\infty$ sei eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf Y . Da $(R^*)^\infty = (q \times q)(p \times p)^{-1}((S^*)^\infty)$, ist $(R^*)^\infty$ ebenfalls eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation. Die Umkehrung beweist man genauso.

Zur späteren Verwendung notieren wir das folgende technische Lemma (dabei sei $(SR)^0(x) := \{x\}$, $(SR)^{n+1}(x) := S(R((SR)^n(x)))$).

(4.2) a) $M \subset Y \Rightarrow S^*(M) = p(S(p^{-1}(M)))$.

b) $x \in X, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S^*)^n(p(x)) = p((SR)^n(x)), (R^*)^n(q(x)) = q((RS)^n(x))$.

Man sagt, ein komplexer Raum X genüge dem *schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz*, wenn für jede offene Teilmenge U von X gilt: ist $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und in den gewöhnlichen Punkten von U holomorph, dann ist f auf ganz U holomorph.

Es gilt nun:

(4.3) SATZ. Der komplexe Raum X genüge dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz, R und S seien offene eigentliche analytische Äquivalenzrelationen auf X .

a) Sind R, S und $(R \cup S)^\infty$ endliche Äquivalenzrelationen, dann ist $(*)$ ein Pushoutdiagramm in der Kategorie der komplexen Räume.

b) Ist X reindimensional und $T^0(R \cup S) = \emptyset$, dann ist $(*)$ ein Pushoutdiagramm in der Kategorie der komplexen Räume.

Der Beweis von (4.3) ergibt sich sofort aus (2.2), (2.3) und dem folgenden Satz (vgl. [6, Satz 10], [7, Satz 2]):

(4.4) Der komplexe Raum X genüge dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz, R sei eine offene analytische Äquivalenzrelation auf X . Ist X reindimensional oder ist R diskret (d.h. alle R -Äquivalenzklassen sind diskret in X), dann ist X/R , versehen mit der kanonischen Quotientenstruktur, ein komplexer Raum.

Wir wollen jetzt der folgenden Frage nachgehen: Es sei X ein holomorph-konvexer komplexer Raum, $h: X \rightarrow Y$ eine eigentliche holomorphe surjektive Abbildung. Wann ist Y holomorph-konvex?

Wir werden folgende Bezeichnungen benutzen: X sei ein holomorph-konvexer

komplexer Raum, die eigentliche holomorphe surjektive Abbildung $h: X \rightarrow Y$ erzeuge auf X die eigentliche analytische Äquivalenzrelation R .

S sei die folgende Äquivalenzrelation auf X : für $x_1, x_2 \in X$ sei $x_1 \stackrel{S}{\sim} x_2 : \Leftrightarrow (f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$.

S ist eine eigentliche Äquivalenzrelation auf X und $\tilde{X} := X/S$ ist ein Steinscher komplexer Raum (vgl. [12], [2, Seite 9]). $\tilde{X}$ heisst *Remmertsche Reduktion* von X . (Für einen beliebigen holomorph-konvexen komplexen Raum Z bezeichnen wir die zugehörige Remmertsche Reduktion mit $\tilde{Z}$.) Die kanonische Projektion $p: X \rightarrow \tilde{X}$ ist einfach, d.h. alle ihre Fasern sind zusammenhängend. Bezeichnen wir den geringsten Raum $Y/(S^*)^\infty$ ($S^* := (h \times h)(S) \subset Y \times Y$) mit P , dann haben wir das kanonische kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow s \\ X/S = \tilde{X} & \xrightarrow{r} & P = Y/(S^*)^\infty \end{array} \quad (*)$$

Es gilt nun:

(4.5) a) Y holomorph-konvex $\Rightarrow P = \tilde{Y}$.

b) Y holomorph-konvex $\Leftrightarrow P$ ist komplexer Raum und r ist eigentlich (und damit endlich, da $\tilde{X}$ Steinsch ist).

Beweis. Ad a). Y sei holomorph-konvex, Dann gibt es ein kanonisches kommutatives Diagramm von holomorphen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ \tilde{X} & \xrightarrow{k} & \tilde{Y} \end{array}$$

Ferner gibt es genau einen Morphismus $t: P \rightarrow \tilde{Y}$ mit $ts = q$, $tr = k$. Da $\tilde{Y}$ und P (als geringste Räume) Quotienten von Y nach Äquivalenzrelationen sind, genügt es zu zeigen, dass t bijektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass s auf allen Fasern von q konstant ist. Es sei $A \subset Y$ eine Faser von q . A ist eine zusammenhängende kompakte analytische Teilmenge von Y . Es seien $A_1, \dots, A_r$ die Zusammenhangskomponenten von $h^{-1}(A)$. Da p auf A_ϱ konstant ist, ist $sh(A_\varrho)$ einpunktig für $\varrho = 1, \dots, r$. Ist $h(A_i) \cap h(A_j) \neq \emptyset$, ist sicherlich $sh(A_i) = sh(A_j)$. Da es zu jedem i mit $1 \leq i \leq r$ eine Folge $\varrho_1, \dots, \varrho_{n(i)}$ mit $\varrho_1 = 1$, $\varrho_{n(i)} = i$ gibt mit $h(A_{\varrho_v}) \cap h(A_{\varrho_{v+1}}) \neq \emptyset$ für $v = 1, \dots, n(i) - 1$, ist $sh(A_i) = sh(A_1)$ für $i = 1, \dots, r$, also ist s auf A konstant.

Ad b). „ $\Rightarrow$ “ folgt sofort aus a). – „ $\Leftarrow$ “. r ist eigentlich, endlich und surjektiv; mit $\tilde{X}$ ist wegen (4.9) auch P Steinsch, insbesondere holomorph-konvex, also ist auch Y holomorph-konvex.

Wir sagen, ein komplexer Raum X habe die Eigenschaft MAKZ, wenn es zu jedem

$x \in X$ eine maximale analytische kompakte zusammenhängende Teilmenge von X gibt, die x enthält. Jeder holomorph-konvexe Raum X hat die Eigenschaft MAKZ: die Fasern der Projektion $p: X \rightarrow \tilde{X}$ sind maximale analytische kompakte zusammenhängende Teilmengen von X . Nicht jeder Raum, der die Eigenschaft MAKZ hat, ist holomorph-konvex; so hat z.B. jeder holomorph-separable komplexe Raum die Eigenschaft MAKZ.

Wir benutzen wieder die oben eingeführten Bezeichnungen. $R^* := (p \times p)(R) \subset \tilde{X} \times \tilde{X}$ ist eine eigentliche endliche analytische Relation auf $\tilde{X}$ (da $\tilde{X}$ Steinsch ist, ist jede eigentliche analytische Relation auf $\tilde{X}$ endlich), $S^* := (h \times h)(S) \subset Y \times Y$ ist eine eigentliche analytische Relation auf Y .

(4.6) SATZ. Mit den obigen Bezeichnungen gilt:

- a) Hat Y die Eigenschaft MAKZ, dann sind $(R^*)^\infty$ und $(S^*)^\infty$ eigentliche analytische Äquivalenzrelationen auf $\tilde{X}$ bzw. Y . Die Äquivalenzklassen von $(S^*)^\infty$ sind genau die maximalen analytischen kompakten zusammenhängenden Teilmengen von Y .
- b) Ist h offen, dann hat Y die Eigenschaft MAKZ und es ist $R^* = (R^*)^\infty$, insbesondere ist die Relation R^* eine eigentliche endliche offene analytische Äquivalenzrelation.

Beweis. Ad a) Wegen (4.1) genügt es zu zeigen, dass $(R^*)^\infty$ eine eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf $\tilde{X}$ ist; da R^* endlich ist, genügt es dazu wegen (2.3) zu zeigen, dass $\tau_{R^*}(p(x)) < \infty$ ist für alle $x \in X$. (Das ist äquivalent damit, dass $(R^*)^\infty$ eine endliche Äquivalenzrelation ist.) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := h(S((RS)^n(x))) \subset Y$. A_n ist für alle n eine kompakte analytische Teilmenge von Y . Wir behaupten, dass A_n zusammenhängend ist für alle n : $A^0 = h(S(x))$ ist sicher zusammenhängend, da $S(x) = p^{-1}(p(x))$ zusammenhängend ist. Der Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ folgt sofort aus der folgende Aussage:

(+) Ist $M \subset X$ und ist $h(M)$ zusammenhängend, dann ist auch $h(S(R(M)))$ zusammenhängend.

Da Y die Eigenschaft MAKZ hat, und da für $n \in \mathbb{N}$ stets $A_n \subset A_{n+1}$ gilt, gibt es ein n mit $A_n = A_{n+1}$. Dann ist

$$(RS)^{n+1}(x) = h^{-1}(A_n) = h^{-1}(A_{n+1}) = (RS)^{n+2}(x),$$

also

$$(R^*)^{n+1}(p(x)) = p((RS)^{n+1}(x)) = p((RS)^{n+2}(x)) = (R^*)^{n+2}(p(x)),$$

also $\tau_{R^*}(p(x)) \leq n+1$. – Damit ist gezeigt, dass $(R^*)^\infty$ und $(S^*)^\infty$ eigentliche analytische Äquivalenzrelationen auf $\tilde{X}$ bzw. Y sind. Zum Nachweis, dass die Äquivalenzklassen von $(S^*)^\infty$ genau die maximalen analytischen kompakten zusammenhängenden Teilmengen von Y sind, zeigen wir zunächst durch Induktion, dass $(S^*)^n(h(x)) =$

$=h((SR)^n(x))$ zusammenhängend ist für alle $x \in X$. Der Induktionsanfang ist trivial, der Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$ folgt sofort aus (+). – Da es zu jedem $x \in X$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $(S^*)^\infty(h(x)) = (S^*)^n(h(x))$, sind alle Äquivalenzklassen von $(S^*)^\infty$ analytische kompakte zusammenhängende Mengen. Es bleibt zu zeigen, dass $r: Y \rightarrow Y/(S^*)^\infty = P$ auf allen maximalen analytischen kompakten zusammenhängenden Teilmengen von Y konstant ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass r auf jeder irreduziblen analytischen kompakten Teilmenge B von Y konstant ist. Zu B gibt es eine irreduzible kompakte analytische Teilmenge A von X mit $h(A) = B$; da $p: X \rightarrow \tilde{X}$ auf A konstant ist, muss r auf B konstant sein. Damit ist a) bewiesen.

Ad b). Wir überlegen uns zunächst, dass wir o.B.d.A. h als endlich voraussetzen können. Ist nämlich h nicht endlich, so zerlegen wir $h: X \rightarrow Y$ in zwei eigentliche surjektive holomorphe Abbildungen $h_1: X \rightarrow X_1$ und $h_2: X_1 \rightarrow Y$, wobei h_1 einfach ist (d.h. nur zusammenhängende Fasern hat) und h_2 endlich. (Vgl. [15, Satz 9], [2, Theorem 3]). Da $p: X \rightarrow \tilde{X}$ auf allen kompakten zusammenhängenden analytischen Teilmengen von X konstant ist, gibt es $p_1: X_1 \rightarrow \tilde{X}$ mit $p_1 h_1 = p$. Mit $\tilde{X}$ ist also auch X_1 holomorph-konvex, mit h ist auch h_2 offen; ferner ist $R^* = R_1^*$, wenn $R_1^* := (p_1 \times p_1)(R_1)$, wobei R_1 die durch h_2 auf X_1 erzeugte Äquivalenzrelation ist. – Wir können also annehmen, dass h endlich ist. Im Folgenden benutzen wir das folgende, leicht zu beweisende Lemma:

(4.7) $h: X \rightarrow Y$ sei eine offene eigentliche endliche surjektive holomorphe Abbildung, B und B' seien kompakte irreduzible analytische Teilmengen von Y , es sei $b \in B \cap B'$; A sei eine irreduzible analytische Teilmenge von X mit $h(A) = B$. Es sei $a \in A$ mit $h(a) = b$. Dann gibt es eine irreduzible analytische Menge A' in X mit $h(A') = B'$ und $a \in A'$.

Aus (4.7) folgt nun leicht, dass Y die Eigenschaft MAKZ hat. Angenommen, Y hat nicht die Eigenschaft MAKZ. Dann gibt es eine unendliche Folge $B_1, B_2, \dots$ irreduzibler kompakter analytischer Teilmengen von Y mit $B_n \cap B_{n+1} \neq \emptyset$, $B_{n+1} \not\subset B_1 \cup \dots \cup B_n$. Ist dann A_1 irreduzibel und analytisch in X mit $h(A_1) = B_1$, gibt es wegen (4.7) eine unendliche Folge $A_1, A_2, \dots$ kompakter analytischer Teilmengen von X derart, dass $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, $A_{n+1} \not\subset A_1 \cup \dots \cup A_n$. Das widerspricht aber der Tatsache, dass X die Eigenschaft MAKZ hat. – Zum Nachweis, dass die Relation R^* eine offene Äquivalenzrelation ist, beweisen wir zunächst

(++) $M \subset \tilde{X} \Rightarrow R(p^{-1}(M))$ ist S -saturiert in X .

Da $R(p^{-1}(M)) = \bigcup_{\tilde{x} \in M} R(p^{-1}(\tilde{x}))$, genügt es zu zeigen, dass $R(p^{-1}(\tilde{x}))$ S -saturiert ist für $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Angenommen, $R(p^{-1}(\tilde{x}))$ ist nicht S -saturiert. Dann gibt es eine irreduzible Komponente A_1 von $R(p^{-1}(\tilde{x}))$ und eine kompakte irreduzible analytische Teilmenge A'_1 von X mit $A_1 \cap A'_1 \neq \emptyset$, $A'_1 \not\subset R(p^{-1}(\tilde{x}))$. Es sei A_2 eine irreduzible Komponente von $p^{-1}(\tilde{x})$ mit $h(A_1) = h(A_2)$. Da $A_1 \cap A'_1 \neq \emptyset$, ist auch $h(A_1) \cap h(A'_1) \neq \emptyset$.

Wegen (4.7) gibt es nun eine irreduzible analytische Menge A'_2 in X so, dass $A_2 \cap A'_2 \neq \emptyset$ und $h(A'_2) = h(A'_1)$. Wegen $A_2 \cap A'_2 \neq \emptyset$ ist $A'_2 \subset p^{-1}(\tilde{x})$, wegen $h(A'_1) \subset h(p^{-1}(\tilde{x}))$ ist also $A'_1 \subset h^{-1}h(p^{-1}(\tilde{x})) = R(p^{-1}(\tilde{x}))$, im Gegensatz zur Voraussetzung. Damit ist $(++)$ bewiesen.

Nun folgt leicht, dass R^* bereits eine Äquivalenzrelation ist: für $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ist wegen $(++)$ $S(R(p^{-1}(\tilde{x}))) = R(p^{-1}(\tilde{x}))$, also ist $(R^*)^2(\tilde{x}) = p(RSR(p^{-1}(\tilde{x}))) = p(R(p^{-1}(\tilde{x}))) = R^*(\tilde{x})$; wegen (1.2) ist also $R^* = (R^*)^\infty$, d.h. R^* ist eine Äquivalenzrelation. R^* ist sogar eine offene Äquivalenzrelation: ist U offen in X , dann ist $R^*(U) = p(R(p^{-1}(U)))$; mit h ist auch R offen; also ist $R(p^{-1}(U))$ offen in X . Wegen $(++)$ ist $R(p^{-1}(U))$ S -saturiert in X ; nach Definition der Quotiententopologie von $\tilde{X} = X/S$ ist also $p(R(p^{-1}(U))) = R^*(U)$ offen in X . – Damit ist (4.6) vollständig bewiesen.

(4.8) SATZ. *Der holomorph-konvexe komplexe Raum X genüge dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz, R sei eine offene eigentliche analytische Äquivalenzrelation auf X . Ist der Quotient $Y := X/R$ ein komplexer Raum, dann ist er ebenfalls holomorph-konvex und genügt dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz.*

Beweis. $h: X \rightarrow Y$ sei die kanonische Projektion. Wir überlegen zunächst, dass $\tilde{X}$ dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz genügt. Es sei $\tilde{\tilde{X}} := (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{H}})$, wobei $\tilde{\mathcal{H}}$ die Garbe der Keime der schwach-holomorphen Funktionen auf $\tilde{X}$ ist. $\tilde{\tilde{X}}$ genügt dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz. Ist $i: \tilde{X} \rightarrow \tilde{\tilde{X}}$ kanonisch, dann gibt es (vgl. [5, Seite 52/53]) eine holomorphe Abbildung $\tilde{p}: X \rightarrow \tilde{\tilde{X}}$ mit $i \tilde{p} = p$. Da $\tilde{X}$ als geringster Raum Quotient von X ist und i ein Homöomorphismus ist, ist i ein Isomorphismus komplexer Räume. – Genauso zeigt man, dass Y dem schwachen Riemannschen Hebbarkeitssatz genügt. – Wegen (4.1) und (4.6) ist $P = \tilde{X}/R^*$ der Quotient von $\tilde{X}$ nach einer eigentlichen endlichen offenen analytischen Äquivalenzrelation, also komplexer Raum wegen (4.4), also ist Y holomorph-konvex wegen (4.5).

Beim Beweis von (4.5) haben wir die folgende Aussage benutzt, die im Wesentlichen in [14, Sats 8 e)] und [11, Seite 64 ff] bewiesen wurde:

(4.9) *X und Y seien (nicht notwendig reduzierte) komplexe Räume, $h: X \rightarrow Y$ sei eine eigentliche, endliche, holomorphe und surjektive Abbildung. Ist X Steinsch, dann auch Y .*

Der Vollständigkeit wegen wollen wir den Beweis von (4.9) angeben. Zunächst kann man wegen [3] annehmen, dass X und Y reduzierte komplexe Räume sind, ferner können wir annehmen, dass Y irreduzibel ist. Da es eine irreduzible Komponente von X gibt, die durch h auf Y abgebildet wird, kann auch X als irreduzibel angesehen werden. Es seien X^* , Y^* , h^* die Normalisierungen von X , Y bzw. h . Mit X ist auch X^* Steinsch, wegen [14, Satz 8 e)] ist mit X^* auch Y^* Steinsch, wegen [11] ist mit Y^* auch Y Steinsch.

§ 5. Beispiele

Die weiter unten folgenden Beispiele 1 bis 3 schliessen sich eng an ein Beispiel von Grauert (vgl. [6], S. 342) an, das deshalb zunächst angegeben werden soll. Zunächst definieren wir auf dem $\mathbb{C}^2$ zwei komplexe Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ folgendermassen: $f_1, f_2: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ sei gegeben durch $f_1: (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3)$, $f_2: (x, y) \mapsto (x+y, y^2, y^3)$. f_1 und f_2 sind eigentliche injektive holomorphe Abbildungen, also sind $f_1(\mathbb{C}^2)$ und $f_2(\mathbb{C}^2)$ analytische Unterräume von $\mathbb{C}^3$. Es sei nun $\mathcal{A}_i$ definiert durch die Festsetzung, dass f_i einen Isomorphismus von $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_i)$ auf $f_i(\mathbb{C}^2)$ erzeugt für $i=1, 2$. Die Singularitätenmenge von $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_i)$ ist genau $\mathbb{C} \times \{0\}$. Die Strukturen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ haben die interessante Eigenschaft, dass $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ kein komplexer Raum ist; man beweist das durch Koeffizientenvergleich gewisser Potenzreihen ähnlich wie in [6, S. 342].

BEISPIEL 1. (Zwei komplexe Strukturen $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2$ auf einem komplexen Raum X derart, dass $(X, \mathcal{O}_1)$ holomorph-konvex, $(X, \mathcal{O}_2)$ nicht holomorph-konvex.) Es sei $\mathbb{P}^1$ der komplex-projektive Raum der komplexen Dimension 1, zwei Punkte $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{P}^1$ seien gegeben. Dann sei $(X, \mathcal{O}_1) := \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$, versehen mit der üblichen Mannigfaltigkeitsstruktur. $(X, \mathcal{O}_2)$ mit $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ gehe aus $(X, \mathcal{O}_1)$ folgendermassen hervor: Man ersetze in $(X, \mathcal{O}_1)$ die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{C}^2 \times \{a_i\}$ durch $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_i) \times \{a_i\}$ für $i=1, 2$. Das soll genauer bedeuten: Man bilde (den nach [8, (1.8)] existierenden) Pushout zur Einbettung $\mathbb{C}^2 \times \{a_1\} \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_1)$ und zur kanonischen Abbildung $\mathbb{C}^2 \times \{a_1\} \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1) \times \{a_1\}$ in der Kategorie der komplexen Räume und ersetze in dem so erhaltenen Pushout durch erneute Pushoutbildung $\mathbb{C}^2 \times \{a_2\}$ durch $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_2) \times \{a_2\}$. $(X, \mathcal{O}_1)$ ist trivialerweise holomorph-konvex, $(X, \mathcal{O}_2)$ ist jedoch nicht holomorph-konvex: dazu sei $h: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ kanonisch; zu h konstruieren wir, wie vor (4.5) angegeben, das Diagramm (*) vor (4.5). Man überlegt sich nun leicht, dass dann P in kanonischer Weise zu $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ isomorph ist, also kein komplexer Raum ist; wegen (4.5) ist also $(X, \mathcal{O}_2)$ nicht holomorph-konvex.

BEISPIEL 2. (X holomorph-konvex, R eigentliche endliche analytische Äquivalenzrelation auf X , $Y := X/R$ komplexer Raum mit der Eigenschaft MAKZ, Y nicht holomorph-konvex.) Wir definieren zunächst weitere komplexe Strukturen $\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ auf $\mathbb{C}^2$ folgendermassen: $\mathcal{A}_3$ sei definiert durch die Festsetzung, dass

$g_1: (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_3)$, $(x, y) \mapsto (x, y+1)$, ein Isomorphismus ist; $\mathcal{A}_4$ sei definiert durch die Festsetzung, dass

$g_2: (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_2) \mapsto (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_4)$, $(x, y) \mapsto (x, y-1)$, ein Isomorphismus ist; $\mathcal{A}_5 := \mathcal{A}_3 \cap \mathcal{A}_4$. $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)$ ist also komplexe Mannigfaltigkeit ausserhalb von $\mathbb{C} \times \{1\}$ und $\mathbb{C} \times \{-1\}$; $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)$ hat auf $\mathbb{C} \times \{1\}$ die gleichen Singularitäten wie $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1)$ auf $\mathbb{C} \times \{0\}$, auf $\mathbb{C} \times \{-1\}$ die gleichen Singularitäten wie $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_2)$ auf $\mathbb{C} \times \{0\}$. – T sei die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}^2$, die jeweils die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ identifiziert. Die holomorphe Abbildung $g: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(x, y) \mapsto (x, y^2 - 1)$, erzeugt einen Isomorphismus $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)/T \rightarrow$

$\rightarrow (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$. – Wir definieren jetzt X : der komplexe Raum X gehe (ähnlich wie in Beispiel 1) aus der Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ dadurch hervor, dass man ($a \in \mathbb{P}^1$ sei gegeben) in $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{C}^2 \times \{a\}$ ersetzt durch $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5) \times \{a\}$. X ist holomorph-konvex, die Remmertsche Reduktion von X ist $(\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)$. R sei die Äquivalenzrelation auf X , die jeweils die Punkte $((x, y), b)$ und $((x, -y), b)$ identifiziert; dabei sei $b \in \mathbb{P}^1$ mit $b \neq a$ fest gegeben. Wegen [5, (1.8)] ist $Y := X/R$ ein komplexer Raum, Y ist jedoch nicht holomorph-konvex: bildet man zur kanonischen Projektion $h: X \rightarrow Y$ das vor (4.5) beschriebene Diagramm (*), dann ist $\mathbb{P} \cong (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)/T \cong (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$ kein komplexer Raum, wegen (4.5) ist also Y nicht holomorph-konvex.

BEISPIEL 3. ($R, S, (R \cup S)^\infty$ offene eigentliche endliche analytische Äquivalenzrelationen auf X ; $X/R, X/S$ komplexe Räume, $X/(R \cup S)^\infty$ kein komplexer Raum.) Wir benutzen die gleiche Bezeichnung wie in Beispiel 2. Es sei X die disjunkte Vereinigung von $X_3 := (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_3)$ und $X_4 := (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_4)$. R sei die Äquivalenzrelation auf X , die jeweils $(x, y) \in X_3$ mit $(x, -y) \in X_3$ identifiziert und $(x, y) \in X_4$ mit $(x, -y) \in X_4$. S sei die Äquivalenzrelation auf X , die jeweils $(x, y) \in X_3$ identifiziert mit $(x, y) \in X_4$. Dann ist $X/S = (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)$, $X/(R \cup S)^\infty = (X/S)/T = (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_5)/T \cong (\mathbb{C}^2, \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$, also ist $X/(R \cup S)^\infty$ kein komplexer Raum.

Die Idee, das oben zitierte Beispiel von Grauert für die Beispiele 2 und 3 nutzbar zu machen, stammt im Wesentlichen von dem bereits zitierten Beispiel von Holmann in [6, S. 342].

BEISPIEL 4. (X irreduzibel, holomorph-konvex, R eigentliche endliche Äquivalenzrelation auf X , $Y := X/R$ komplexer Raum, Y hat nicht die Eigenschaft MAKZ, ist also nicht holomorph-konvex.) Es sei wieder $X := \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$, zwei Punkte $a \neq b \in \mathbb{P}^1$ seien fest gegeben. R sei die Äquivalenzrelation auf X , die für $n \in \mathbb{N}$ jeweils die Punkte (n, a) und $(n+1, b)$ identifiziert. $Y := X/R$ hat die geforderten Eigenschaften.

BEISPIEL 5. (X reelle Mannigfaltigkeit, R eigentliche endliche Relation auf X , R^∞ endliche Äquivalenzrelation, R^∞ nicht eigentlich, folglich (wegen (1.4)) $TR \neq \overline{T^0 R} = \emptyset$.) Es sei $X := \mathbb{R} \times S^1$, parametrisiert durch $X = \{(x, \varphi); x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Dann sei für $0 \leq v < n$, $v \in \mathbb{N}$ (jeweils modulo 2π gerechnet)

$$R\left(\frac{1}{n}, \frac{v}{n} 2\pi\right) := \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{v}{n} 2\pi\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{v-1}{n} 2\pi\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{v+1}{n} 2\pi\right) \right\},$$

$R(z) := \{z\}$ sonst. R ist eigentlich und endlich, R^∞ ist endlich, aber nicht eigentlich, denn

$$K := \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0\right); n \in \mathbb{N}^+ \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

ist kompakt, $R^\infty(K)$ ist nicht kompakt, da die Folge

$$\left(\frac{1}{2n}, \pi\right) = \left(\frac{1}{2n}, \frac{n}{2n} 2\pi\right)$$

in $R^\infty(K)$ liegt, nicht jedoch ihr Limes $(0, \pi)$.

Beispiel 5 zeigt, dass für nichtanalytische eigentliche endliche Relationen R i.A. $TR \neq \overline{T^0 R}$ ist, dass also die Endlichkeit von R^∞ nicht die Eigentlichkeit von R^∞ impliziert.

LITERATUR

- [1] BEHNKE, H. und THULLEN, P., *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (Springer-Verlag, 1970).
- [2] CARTAN, H., *Quotients of complex analytic spaces. Contributions to Function Theory* (Bombay 1960).
- [3] GRAUERT, H., *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen*, Publ. Math. 5, 223–292 (1960).
- [4] —, und REMMERT, R., *Komplexe Räume*, Math. Ann. 136, 245–318 (1958).
- [5] HOLMANN, H., Anhang zu Kap. 1 in [1].
- [6] —, *Komplexe Räume mit komplexen Transformationsgruppen*, Math. Ann. 150, 327–360 (1963).
- [7] KAUP, B., *Über offene analytische Äquivalenzrelationen auf komplexen Räumen*, Math. Ann. 183, 6–16 (1969).
- [8] —, *Über Kokerne und Pushouts in der Kategorie der komplex-analytischen Räume*, Math. Ann. 189, 60–76 (1970).
- [9] MITCHELL, B., *Theory of Categories*, Academic Press, (1965).
- [10] NARASIMHAN, R., *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, Springer Lecture Notes Nr. 25 (1966).
- [11] OELJEKLAUS, H., *Einbettung komplexer Räume in komplex-projektive Räume*, Schriftenreihe Math. Inst. Münster, Heft 23 (1962).
- [12] REMMERT, R., *Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 243 118–121 (1956).
- [13] —, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume*, Math. Ann. 133, 328–370 (1957).
- [14] —, und STEIN, K., *Eigentliche holomorphe Abbildungen*, Math. Z. 73, 159–189 (1960).
- [15] STEIN, K., *Analytische Zerlegungen komplexer Räume*, Math. Ann. 132, 63–93 (1956).

Eingegangen den 15. Mai 1970