Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen.

Ein Konvergenzsatz für Folgen quasikonformer Abbildungen

Kurt Strebel (Zürich)

Der Limes f einer Folge (f_n) von K-quasikonformen Abbildungen eines Gebietes G der z-Ebene, welche lokal gleichmässig konvergiert, ist entweder eine Konstante oder selber eine K-quasikonforme Abbildung. Wir betrachten den letzteren Fall. Man kann nun bekanntlich nicht schliessen, dass die komplexen Dilatationen κ_n der Abbildungen f_n gegen die komplexe Dilatation κ des Limes f konvergieren. Selbst unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Folge der Beträge $|\kappa_n|$ fast überall konvergiert, geht dieser Schluss nicht: Es kann $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n| > |\kappa|$ sein (für ein Beispiel, in dem das f.ü. der Fall ist, siehe [1] pg. 195).

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass es andererseits keine Menge E von positivem Mass geben kann, auf der die Ungleichung $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| < |\kappa(z)|$ erfüllt ist, und dass die Gleichheit $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| = |\kappa(z)|$ die Existenz einer Teilfolge (n_ν) nach sich zieht, für die $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z) = \kappa(z)$ f.ü. auf E gilt. Wir wollen aber die Existenz des $\lim_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$ nicht voraussetzen. Die Aussage gilt dann für den $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)|$. Dass nämlich andererseits $\underline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| < |\kappa(z)|$ f. ü. sein kann, zeigt das folgende Beispiel:

Wir unterteilen das Quadrat R: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ durch die vertikalen Strecken $x_{mn} = m/2^n$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $m=1,\dots,2^n$, $n=1,2,\dots$. Die Abbildung $w=f_{mn}(z)$ ist ein K-quasikonformer und eckpunkttreuer Homöomorphismus von R auf das Rechteck R_n': $0\leqslant u\leqslant K(1-2^{-n})+2^{-n}$, $0\leqslant v\leqslant 1$, $K>1$, der folgendermassen festgelegt wird: Das Rechteck R_{mn}: $(m-1)\,2^{-n}\leqslant x\leqslant m2^{-n}$, $0\leqslant y\leqslant 1$ wird horizontal auf ein kongruentes Teilrechteck R_{mn}' von R_n' verschoben. Die übrigen Teilrechtecke von R werden horizontal mit dem Faktor K gestreckt und natürlich entsprechend verschoben, sodass f_{mn} auf den Geraden $x_{mn}=m2^{-n}$ stetig wird. Offenbar konvergiert die Folge (f_{mn}), $m=1,\dots,2^n, n=1,2,\dots$ gleichmässig gegen die Horizontalstreckung $w=f(z)=Kx+iy$, wohingegen der Limes inferior der Folge der Beträge der komplexen Dilatationen f. ü. gleich null ist.

SATZ: *Sei f ein K-quasikonformer Homöomorphismus eines Gebietes G der z-Ebene in die Ebene und lokal gleichmässiger Limes einer Folge (f_n) ebensolcher Abbildungen. Dann ist $\overline{\lim}_{n\to\infty}|\kappa_n(z)| \geqslant |\kappa(z)|$ f. ü. Gilt auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit, so gibt es eine Teilfolge (n_ν), sodass $\lim_{\nu\to\infty}\kappa_{n_\nu}(z)=\kappa(z)$ f. ü. auf E.*

Beweis: 1) Wir betrachten zunächst einen regulären Punkt z_0 von f, in dem also f ein totales Differential $dw=p(z_0)\,dz+q(z_0)\,d\bar{z}$ besitzt und ausserdem die Funktionaldeterminante $J(z_0)=|p(z_0)|^2-|q(z_0)|^2>0$ ist. Wir nehmen ferner an, dass $\kappa(z_0)=$

$q(z_0)/p(z_0) \neq 0$ sei. Es gibt dann im Punkte z_0 für die differentielle Abbildung $dw = p(z_0)\,dz + q(z_0)\,d\bar{z}$ eine bis auf π eindeutig bestimmte Richtung grösster Streckung: Es ist die Richtung $\vartheta = (\beta - \alpha)/2 = \gamma/2$, mit den Bezeichnungen $p(z_0) = |p(z_0)|\, e^{i\alpha}$, $q(z_0) = |q(z_0)|\, e^{i\beta}$, $\kappa(z_0) = |\kappa(z_0)|\, e^{i\gamma}$. Sie wird übergeführt in die Richtung $\vartheta^* = (\alpha + \beta)/2$.

Sei $Q_a(z_0)$ das Quadrat mit dem Mittelpunkt z_0 und der Seitenlänge a, dessen eine Seite die Richtung ϑ hat. Es wird durch die lineare Approximation von f abgebildet auf das Rechteck R mit dem Mittelpunkt $w_0 = f(z_0)$ und den Seitenlängen $a(|p(z_0)| + |q(z_0)|)$ in der Richtung ϑ^*, $a(|p(z_0)| - |q(z_0)|)$ in der Richtung $\vartheta^* + \pi/2$. Zu einem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sodass für alle $a < \delta$ und $z = z_0 + dz \in Q_a(z_0)$ gilt: $|f(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$.
Für jedes feste $a < \delta$ gibt es dann ausserdem ein n_a, sodass für alle $n > n_a$, $z \in Q_a(z_0)$ auch $|f_n(z) - f(z_0) - dw| < a\varepsilon$ ist.

Wir führen in $Q_a(z_0)$ $\zeta = \xi + i\eta = e^{-i\vartheta}(z - z_0)$ als seitenparallele Koordinaten ein, wobei also die ξ-Achse aus der x-Achse durch Drehung um den Winkel ϑ hervorgeht. Die Richtung $\eta =$ konst. ist somit die Richtung grösster Streckung der linearen Approximation. Wir betrachten die f_n-Bilder der Strecken $\eta =$ konst. in $Q_a(z_0)$ für $n > n_a$. Bezeichnen wir das totale Differential von f_n in einem beliebigen Punkte z mit $dw_n = p_n(z)\,dz + q_n(z)\,d\bar{z}$, so gilt für $dz = e^{i\vartheta}\,d\xi$

$$dw_n = p_n(z)\, e^{i\vartheta}\, d\xi + q_n(z)\, e^{-i\vartheta}\, d\xi .$$

Für die Längen dieser f_n-Bilder erhalten wir somit

$$a(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\, e^{-i\gamma(z_0)}|\, d\xi$$

und durch Integration über η

$$a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon) \leqslant \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} |p_n(z(\zeta)) + q_n(z(\zeta))\, e^{-i\gamma(z_0)}|\, d\xi\, d\eta$$
$$= \iint_{Q_a(z_0)} |p_n(z) + q_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy .$$

Eine Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$a^4(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2$$
$$\leqslant \iint_{Q_a(z_0)} (|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2)\, dx\, dy \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|p_n(z) + q_n(z) \cdot e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{|p_n(z)|^2 - |q_n(z)|^2}\, dx\, dy$$

$$\leqslant a^2(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)$$
$$\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy\,.$$

Mit Hilfe der Identität

$$\frac{|1 + \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}|^2}{1 - |\kappa_n(z)|^2} = \frac{1 + |\kappa_n(z)|^2 + 2\operatorname{Re}\kappa_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$
$$= D_n(z) - 2\,\frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}$$

wo $D_n(z) = (1 + |\kappa_n(z)|)/(1 - |\kappa_n(z)|) \geqslant 1$ die Dilatation von f_n im Punkte z ist, erhalten wir schliesslich für jedes $a < \delta$ und $n > n_a$ die Ungleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(|p(z_0)| + |q(z_0)| - 2\varepsilon)^2}{(|p(z_0)| + |q(z_0)| + 2\varepsilon)(|p(z_0)| - |q(z_0)| + 2\varepsilon)} \equiv D(z_0) + (\varepsilon) \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - 2a^{-2} \\ &\times \iint\limits_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei (ε) eine mit ε gegen null gehende Grösse bezeichnet.

2) Das Lemma von Fatou ([3], pg. 29), angewendet auf die Folge der Funktionen $K - D_n \geqslant 0$ in $Q_a(z_0)$, ergibt

$$\varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (K - D_n(z))\, dx\, dy \geqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varliminf_{n\to\infty} (K - D_n(z))\, dx\, dy$$

und daher

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy\,.$$

Wir erhalten somit aus (1) die Ungleichung

$$D(z_0) + (\varepsilon) \leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \varlimsup_{n\to\infty} D_n(z)\, dx\, dy \tag{2}$$

in jedem regulären Punkt z_0 von f, in dem $\kappa(z_0) \neq 0$ ist, für alle $a < \delta(\varepsilon, z_0)$.

Nehmen wir nun an, es gelte auf einer Menge von positivem Mass $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) < D(z)$. Dann gibt es eine Menge E, $|E| > 0$ und eine positive Zahl d, sodass auf E $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) \leqslant D(z) - d$ ist. In E ist $D(z) \geqslant 1 + d$, und es gibt einen regulären Punkt

z_0 von f in E, der Dichtepunkt der Menge E ist, und in dem $\lim_{a\to 0} a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} D(z) \times \times dx\,dy = D(z_0)$ gilt; die letzte Beziehung gilt nämlich für beliebige Quadrate $Q_a(z_0)$ f. ü. in G. Wir haben somit für alle $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)+(\varepsilon) &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K \iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (D(z)-d)\,dx\,dy + a^{-2}K \iint\limits_{Q_a(z_0)-E} dx\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Für $a\to 0$ erhalten wir zunächst $D(z_0)+(\varepsilon)\leqslant D(z_0)-d$ und daraus für $\varepsilon\to 0$ $D(z_0)\leqslant \leqslant D(z_0)-d$, was einen Widerspruch bedeutet. Das beweist den ersten Teil des Satzes.

3) Es gelte nun auf einer Menge E von positivem Mass Gleichheit: $\overline{\lim}_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$, $z\in E$. Wir zeigen zunächst, dass es dann eine Teilfolge (n_ν) gibt, für welche $\lim_{\nu\to\infty} D_{n_\nu}(z) = D(z)$ f. ü. auf E ist.

In denjenigen Punkten von E, in denen $D(z)=1$ (d.h. $\kappa(z)=0$) ist, gilt $D_n(z)\to D(z)$ und damit auch $\kappa_n(z)\to\kappa(z)$ schon für die ursprüngliche Folge und umsomehr für jede Teilfolge. Wir dürfen daher annehmen, dass auf E $D(z)>1$ sei. Wir betrachten $E_r = E\cap\{z \mid |z|<r\}$. In fast allen Punkten $z_0\in E_r$ gilt

$$\left.\begin{aligned} \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy \\ = \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} D(z)\,dx\,dy &= \lim_{a\to 0} a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D(z)\,dx\,dy = D(z_0) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Es gibt nun wegen (1) und (4) zu gegebenem $\varepsilon>0$ für jedes $z_0\in E_r$ mit Ausnahme einer Nullmenge ein $\delta=\delta(\varepsilon, z_0)>0$ sodass für $a<\delta$

$$\left.\begin{aligned} D(z_0)-\varepsilon &\leqslant a^{-2} \underline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} D_n(z)\,dx\,dy \\ &\leqslant a^{-2} \iint\limits_{Q_a(z_0)} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, D_n(z)\,dx\,dy \leqslant D(z_0)+\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ist. Die abgeschlossenen Quadrate $Q_a(z)$, $z\in E_r$, $a<\delta(\varepsilon, z)$, überdecken die Menge E_r im Sinne von Vitali ([3], pg 109), und es gibt daher eine höchstens abzählbare Menge von nicht-überlappenden Quadraten $Q_{a_\nu}(z_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots$ sodass $|E_r - A| = 0$ ist, wo $A=\sum_\nu Q_{a_\nu}(z_\nu)$ bedeutet. Die Quadrate $Q_{a_\nu}(z_\nu)$ sind nicht-überlappend, und sie können zudem von Anfang an so gewählt werden, dass sie in einer gegebenen offenen Menge 0 liegen, die E_r enthält. Man kann daher annehmen, dass $|A-E_r|\leqslant|0-E_r|<\varepsilon$ ist. Schreiben wir nun die Ungleichungen (5) für jedes z_ν an, multiplizieren sie mit a_ν^2 und summieren über alle ν, so erhalten wir (mit $Q_\nu \equiv Q_{a_\nu}(z_\nu)$)

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\nu D(z_\nu)\,a_\nu^2 - \varepsilon|A| \leqslant \sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\,dx\,dy \leqslant \sum_\nu \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n(z)\,dx\,dy\\ &\qquad \leqslant \sum_\nu \iint_{Q_\nu} \overline{\lim}\, D_n(z)\,dx\,dy \leqslant \sum_\nu D(z_\nu)\,a_\nu^2 + \varepsilon|A|\,.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für eine beliebige natürliche Zahl N ist

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n$$

und

$$\begin{aligned}\varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n &= \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{N} \iint_{Q_\nu} D_n + \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n\right)\\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{N} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n + \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} D_n\,.\end{aligned}$$

Da der letzte Summand wegen der gleichgradigen Konvergenz (bezüglich n) der Summe $\sum_\nu \iint_{Q_\nu} D_n$ für $N\to\infty$ beliebig klein wird, haben wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned}&\sum_\nu \varliminf_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_\nu} D_n\\ &\qquad \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \iint_{Q_\nu} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n\,.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aus (7) folgt mit Hilfe von (6)

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n \leqslant 2|A|\,\varepsilon < 2(|E_r| + \varepsilon)\,\varepsilon\,. \tag{8}$$

Wegen $A \supset E_r$ (bis auf eine Nullmenge) und $|A - E_r| < \varepsilon$ gilt weiter

$$0 \leqslant \iint_A \varlimsup_{n\to\infty} D_n - \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n = \iint_{A-E_r} \varlimsup_{n\to\infty} D_n \leqslant K\cdot\varepsilon \tag{9}$$

und

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint_A D_n - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{A-E_r} D_n \leqslant K\varepsilon\,. \tag{10}$$

Berücksichtigen wir noch die Voraussetzung $\varlimsup_{n\to\infty} D_n(z) = D(z)$ auf E_r, so erhalten wir aus (8), (9) und (10) die Gleichung

$$\iint_{E_r} D - \varliminf_{n\to\infty} \iint_{E_r} D_n = \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) = 0 \tag{11}$$

und daraus $\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| = 0 .$ (12)

Die letzte Beziehung folgt so: Es gilt $|D-D_n|=(D-D_n)-2(D-D_n)^{-}=D-D_n+$ $+2|(D-D_n)^{-}|$ und daher

$$\varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D - D_n| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} (D - D_n) + 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^{-}|$$

$$= 2 \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{E_r} |(D - D_n)^{-}| \leqslant 2 \iint_{E_r} \varlimsup_{n\to\infty} |(D - D_n)^{-}| = 0 ,$$

da der Integrand f. ü. verschwindet. Die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \iint_{E_r} |D-D_n|=0$ bedeutet nun, dass die L^1-Norm $\|D-D_n\|_{E_r}\to 0$ geht für $n\to\infty$, und daraus ergibt sich bekanntlich die Existenz einer Teilfolge (n_ν), sodass $D(z)-D_{n_\nu}(z)\to 0$ für f. a. z aus E_r. Lassen wir r die natürlichen Zahlen durchlaufen und wählen wir die Teilfolge für E_{r+1} aus derjenigen für E_r, so erhalten wir in der Diagonalfolge die gesuchte Teilfolge, die f. ü. auf E gegen D konvergiert.

4) Für das Folgende dürfen wir zum vorneherein annehmen, dass auf der Menge E von positivem Mass $\lim_{n\to\infty} D_n(z)=D(z)$ f. ü. gelte, und dass ausserdem $D(z)>1$ sei. Damit äquivalent ist: $\lim_{n\to\infty} |\kappa_n(z)|=|\kappa(z)|>0$ f. ü. auf E. Aus der Ungleichung (1) folgt für fast jedes $z_0 \in E$

$$\left.\begin{aligned} &2a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\cdot e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy \\ &\quad\leqslant a^{-2} \iint_{Q_a(z_0)} D_n(z)\, dx\, dy - D(z_0) + (\varepsilon) . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Lässt man nun zunächst $n\to\infty$ und dann $a\to 0$ gehen, so folgt

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} \frac{|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)}}{1 - |\kappa_n(z)|^2}\, dx\, dy = 0 \tag{14}$$

und daher umsomehr

$$\lim_{a\to 0} a^{-2} \varlimsup_{n\to\infty} \iint_{Q_a(z_0)} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re}\kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)})\, dx\, dy = 0 . \tag{15}$$

Nun gilt bekanntlich (für den Beweis des eindimensionalen Analogons siehe z.B. [2] pg 228) für f. a. $z_0 \in E$

$$\overline{\lim_{a\to 0}} \frac{1}{a^2} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}| \, dx\, dy = 0. \tag{16}$$

Aus

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy \\ &\quad \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z_0)})\, dx\, dy \\ &\quad + \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} |e^{-i\gamma(z)} - e^{-i\gamma(z_0)}|\, dx\, dy \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

folgt daher: Für f. a. $z_0 \in E$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ sodass für $a < \delta$ gilt

$$a^{-2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \iint\limits_{Q_a(z_0)\cap E} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy < \varepsilon. \tag{18}$$

Nun betrachten wir wieder zunächst E_r und erhalten mittels einer Überdeckung von E_r im Sinne von Vitali wie oben

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{E_r} (|\kappa_n(z)| - \operatorname{Re} \kappa_n(z)\, e^{-i\gamma(z)})\, dx\, dy = 0. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich zuerst die Existenz einer Teilfolge (n_ν) für die $|\kappa_{n_\nu}(z)| - \operatorname{Re} \kappa_{n_\nu}(z) \times \times e^{-i\gamma(z)} \to 0$ geht f. ü. auf E_r. Durch das Cantorsche Diagonalverfahren erhalten wir schliesslich eine Teilfolge, für die die obige Beziehung f. ü. auf E gilt.

Sei nun $z \in E$ ein solcher Punkt. Dann gilt also $|\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)}| \to |\kappa(z)|$ und $\operatorname{Re} \kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$. Daraus folgt offenbar $\kappa_{n_\nu}(z)\, e^{-i\gamma(z)} \to |\kappa(z)|$ und somit

$$\kappa_{n_\nu}(z) \to |\kappa(z)|\, e^{i\gamma(z)} = \kappa(z), \qquad \text{q.e.d.}$$

LITERATUR

[1] O. Lehto und K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen* (Berlin 1965).
[2] E. J. McShane: *Integration* (Princeton 1947).
[3] S. Saks: *Theory of the Integral* (New York 1937).

Eingegangen den 7. Januar 1969