Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie.

Autor(en): **Mislin, Guido**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-33781

Über die Künneth-Formel für ausserordentliche Cohomologie

GUIDO MISLIN

Einleitung

Die Künneth-Formel gibt eine Beziehung zwischen der Cohomologie eines Produktes von topologischen Räumen und der Cohomologie der Faktoren an. Sind X und Y (endliche) CW-Komplexe, so kann man die Künneth-Formel in Form einer kurzen exakten Sequenz von zellulären Cohomologiegruppen schreiben

$$0 \to (H^*X \otimes H^*Y)^q \xrightarrow{m} H^q(X \times Y) \to \operatorname{Tor}(H^*X, H^*Y)^{q+1} \to 0$$

Diese exakte Sequenz nimmt für punktierte CW-Komplexe X und Y, unter Verwendung von reduzierter Cohomologie, die folgende Form an

$$0 \to (\tilde{H}^*X \otimes \tilde{H}^*Y)^q \xrightarrow{\tilde{m}} \tilde{H}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}(\tilde{H}^*X, \tilde{H}^*Y)^{q+1} \to 0$$

(Es bezeichnet $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ das „smash"-Produkt, und m bzw. $\tilde{m}$ sind die äusseren Produkte der Cohomologietheorien H bzw. $\tilde{H}$).

Im folgenden wird gezeigt, dass für eine ausserordentliche Cohomologietheorie h eine stark konvergente „Künneth-Spektralsequenz" mit $E_2^{p,q} \cong \operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$ und $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$ existiert, falls man eine endliche flache Auflösung des Λ-Moduls $\tilde{h}^*X$ geeignet „geometrisch realisieren" kann; $\Lambda = \tilde{h}^*S^0$ bezeichnet den Koeffizientenring. Diese Spektralsequenz bricht zusammen, wenn $\operatorname{Tor}_p^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y) = 0$ ist für $p > 1$. Dann erhält man wie im Falle der gewöhnlichen Cohomologie, eine Künneth-Formel in Form einer exakten Sequenz

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_\Lambda \tilde{h}^*Y)^q \to \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^\Lambda(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Dies trifft z.B. für die komplexe K-Theorie zu, wie Atiyah in [2] gezeigt hat, und modulo 2-Torsion auch für die reelle K-Theorie (vgl. Korollare 1 und 4). Für andere Cohomologietheorien erhält man analoge Resultate, wenn man geeignete Voraussetzungen über die homologische Dimension von $\tilde{h}^*X$ bzw. $\tilde{h}^*Y$ macht (vgl. Korollar 5).

Die Methode, welche zu der oben beschriebenen Spektralsequenz führt, ist eine Verallgemeinerung des Beweises von Atiyah (loc. cit.) der Künneth-Formel für die komplexe K-Theorie.

Die meisten Resultate der vorliegenden Arbeit sind in einer Comptes-Rendus-Note angekündigt worden (G. Mislin, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 267, p. 504–506, 1968).

I. Ungraduierte Cohomologiefunktoren mit Multiplikation

Es bezeichne $\mathscr{C}$ die Kategorie der punktierten Räume vom Homotopietypus eines endlichen CW-Komplexes. Alle im folgenden auftretenden Räume seien Objekte aus $\mathscr{C}$.

1. DEFINITION 1. Ein auf der Kategorie $\mathscr{C}$ definierter kontravarianter Funktor t mit Werten in der Kategorie der Abelschen Gruppen heisst ungraduierter Cohomologiefunktor mit Multiplikation, falls gilt:

1) Exaktheit. Ist $X \to Y \to Z$ eine Cofaserung in $\mathscr{C}$, so ist die Bildsequenz $tZ \to tY \to tX$ exakt.

2) Homotopie-Invarianz. Ist $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $tf: tY \to tX$ ein Isomorphismus.

3) Suspensions-Isomorphismus. Es gibt eine homomorphe natürliche Transformation $\nu: t \xrightarrow{\cong} t \circ \sum = t(S^1 \Lambda)$.

4) Multiplikation. Es gibt eine natürliche Transformation $\mu: t \times t \to t \circ \wedge$ mit

α) μ ist homomorph in beiden Variablen, und definiert somit für alle X und Y einen Homomorphismus $tX \otimes tY \to t(X \wedge Y)$, den wir auch mit μ bezeichnen.

β) μ soll auf folgende Art mit ν kompatible sein: $\mu \circ (\nu \otimes 1) = \nu \circ \mu$

$$\begin{array}{ccc} tX \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge Y) \\ {\scriptstyle \nu\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ t(S^1 \wedge X) \otimes tY & \xrightarrow{\mu} & t(S^1 \wedge X \wedge Y) \end{array}$$

γ) Die folgende abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität soll erfüllt sein:

S^0-Assoziativität.

$$\mu \circ (1 \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes 1): tX \otimes tS^0 \otimes tX \to t(X \wedge Y)$$

S^0-Kommutativität.

$$T_2 \circ \mu = \mu \circ T_1: \begin{array}{ccccc} tS^0 \otimes tX & \xrightarrow{\mu} & t(S^0 \wedge X) & \cong & tX \\ {\scriptstyle T_1}\downarrow & & {\scriptstyle T_2}\downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow \\ tX \otimes tS^0 & \xrightarrow{\mu} & t(X \wedge S^0) & \cong & tX \end{array}$$

Hierbei bezeichnen T_1 und T_2 die evidenten Abbildungen, und X ist auf kanonische Weise mit $S^0 \wedge X$ und $X \wedge S^0$ identifiziert.

δ) Es gibt eine $1 \in tS^0$ mit $\mu(1 \otimes x) = \mu(x \otimes 1) = x$ für alle $x \in tX$ and alle X.

Aus γ und δ folgt, dass tS^0 ein assoziativer und kommutativer Ring Λ mit 1 ist, und dass tX ein unitärer Λ-Modul ist. Wegen γ sind die beiden Λ-Modul-Strukturen $tS^0 \otimes tX \to tX$ und $tX \otimes tS^0 \to tX$ natürlich isomorph. Aus der S^0-Assoziativität folgt, dass μ wie folgt faktorisiert: $\mu=\tilde{\mu}\circ\kappa$ (κ die kanonische Abbildung)

$$\begin{tikzcd} tX \otimes tY \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & t(X \wedge Y) \\ & tX \otimes_\Lambda tY \arrow[ur, "\tilde{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

Ist $\{\tilde{h}^i, v^i\}$ eine ausserordentliche, multiplikative, reduzierte Cohomologietheorie, so ist $t=\tilde{h}^*$ ein Funktor von der oben beschriebenen Art, falls die Multiplikation dem Axiom 4 von Definition 1 genügt. (Man verlangt natürlich in diesem Fall, dass $\tilde{h}^*$ im graduierten Sinne S^0-kommutativ ist). Führt man in $\tilde{h}^*$ Koeffizienten $\mathbf{Z}_q$ ein, so kann man unter gewissen Umständen in $\tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ eine multiplikative Struktur definieren [vgl. 1]. Diese multiplikative Struktur ist im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ. Doch ist die oben geforderte abgeschwächte Form von Kommutativität und Assoziativität für $t=\tilde{h}^*(\ ;\mathbf{Z}_q)$ häufig erfüllt, so z.B. für die reelle K-Theorie mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, falls p eine ungerade Primzahl ist.

II. Der triviale Fall: $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(tY,\ )=0$

Ist der Funktor $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(tY,\ )=0$, so ist auch $\mathrm{Tor}_p^\Lambda(tY,\ )=0$ für alle $p>1$ und man nennt tY flach. Gleichbedeutend damit ist zu sagen, dass $\otimes_\Lambda tY$ ein exakter Funktor ist. Für diesen Fall nimmt die Künneth-Formel die folgende einfache Form an.

2. LEMMA 1. *Ist tY ein flacher Λ-Modul, so gilt für alle X*

$$\tilde{\mu}: tX \otimes_\Lambda tY \cong t(X \wedge Y)$$

Beweis. Für $X=S^0$ ist dies offensichtlich richtig. Nun kann man mittels Induktion das Lemma für $X=S^n$ beweisen, wie man aus dem folgenden (wegen Definition 1, β) kommutativen Diagramm abliest

$$\begin{tikzcd} tS^{n-1} \otimes_\Lambda tY \arrow[r, "\tilde{\mu}"] \arrow[d, "v\otimes 1"', "\cong"] & t(S^{n-1} \wedge Y) \arrow[d, "v", "\cong"'] \\ tS^n \otimes_\Lambda tY \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & t(S^n \wedge Y) \end{tikzcd}$$

Da tY flach ist, ist $t(\ )\otimes_\Lambda tY$ ein halbexakter Homotopiefunktor. Also ist $\tilde{\mu}: t(\ )\otimes \otimes_\Lambda tY \to t(\ \wedge Y)$ eine natürliche Transformation zwischen halbexakten Homotopiefunktoren, die auf den Sphären ein Isomorphismus ist. Folglich ist $\tilde{\mu}$ für alle endlichen CW-Komplexe ein Isomorphismus [6, Satz 7.1].

3. KOROLLAR 1. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte reelle K-Theorie $\widetilde{KO}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ mit Koeffizienten $\mathbf{Z}_p$, p eine ungerade Primzahl, gilt die Künneth-Formel*

$$\tilde{\mu}: \widetilde{KO}^{\#}(X;\mathbf{Z}_p) \otimes_\Lambda \widetilde{KO}^{\#}(Y;\mathbf{Z}_p) \cong \widetilde{KO}^{\#}(X \wedge Y;\mathbf{Z}_p)$$

Beweis. Der Funktor $t=\widetilde{KO}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)=\oplus_{i\in\mathbf{Z}_8}\widetilde{KO}^i(\ ;\mathbf{Z}_p)$ trägt eine kanonische multiplikative Struktur [vgl. 1], welche t zu einem Cohomologiefunktor mit Multiplikation (cf. Def. 1) macht. Nach Bott [3, p. 72] ist der Ring $\widetilde{KO}^{\#}S^0\cong\mathbf{Z}[x,y]/ /(x^2-4, 2y, xy, y^3)$ mit $\deg(x)=4$ und $\deg(y)=7$ (in $\mathbf{Z}_8$). Die Reduktion mod. p, $R:\widetilde{KO}^{\#}S^0\to\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$, ist ein Ringhomomorphismus und, wegen $\mathrm{Tor}_1^{\mathbf{Z}}(\widetilde{KO}^{\#}S^0, \mathbf{Z}_p)=0$, ist R surjektiv. Weil das Bild $\mathrm{Im}(R)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p$ ist als Ring, folgt: $\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)\cong\widetilde{KO}^{\#}S^0\otimes\mathbf{Z}_p\cong\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)$. Aber $(z-2)$ und $(z+2)$ sind fremde Elemente im Hauptidealring $\mathbf{Z}_p[z]$ wegen $p\neq 2$; demnach gilt $\mathbf{Z}_p[z]/(z^2-4)\cong$ $\cong(\mathbf{Z}_p[v]/(v+2))\times(\mathbf{Z}_p[w]/(w-2))\cong\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p$, [vgl. 4, §1 Prop. 4]. Der Koeffizientenring $\Lambda=tS^0=\widetilde{KO}^{\#}(S^0;\mathbf{Z}_p)$ ist also halbeinfach und mithin sind alle Λ-Moduln projektiv [5, Chap. I, Theorem 4.2]. Somit ist $\widetilde{KO}^{\#}(X;\mathbf{Z}_p)$ flach für alle X und das Korollar folgt aus dem Lemma 1.

(Ein analoges Korollar erhält man natürlich z.B. für die Cohomologietheorien $\tilde{H}^*(\ ;\mathbf{Z}_p)$ oder $\widetilde{KU}^{\#}(\ ;\mathbf{Z}_p)$ für beliebige Primzahlen p.)

Das folgende Lemma gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an, dass tX ein flacher Λ-Modul ist.

4. LEMMA 2. *Ist die Abelsche Gruppe $H^*X\otimes tS^0$ torsionsfrei, so ist tX ein freier tS^0-Modul.*

5. HILFSSATZ 1. *Es sei R ein Ring mit 1. Ist $H^*X\otimes R$ torsionsfrei, so ist die natürliche Ring-Abbildung $\varphi:H^*X\otimes R\to H^*(X;R)$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Gemäss dem Koeffiziententheorem genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{Tor}(H^*X, R)=0$ ist. Da H^*X eine endlicherzeugte Abelsche Gruppe ist ($X\in\mathscr{C}$) brauchen wir jedoch nur zu zeigen, dass für jeden endlichen direkten Summanden $\mathbf{Z}_m\subset H^*X$ gilt $\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$. Hierzu betrachten wir die exakte Sequenz $0\to\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)\to R\xrightarrow{M}R\to$ $\to\mathbf{Z}_m\otimes R\to 0$, wobei M die Multiplikation mit m bedeutet. Weil $\mathbf{Z}_m\otimes R$ ein direkter Summand der torsionsfreien Gruppe $H^*X\otimes R$ ist folgt $\mathbf{Z}_m\otimes R=0$, d.h. M ist surjektiv. Es sei nun $b\in\mathrm{Ker}(M)$ und a ein Element mit $M(a)=ma=1$. Wegen $M(ab)=(ma)\,b=b=a(mb)=0$ folgt $\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}_m, R)=0$.

Beweis von Lemma 2. Wir betrachten die ausserordentliche Cohomologietheorie $\tilde{h}^*$ definiert durch $\tilde{h}^i=t$ und $(v^i:\tilde{h}^i\to\tilde{h}^{i+1}\circ\Sigma)=(v:t\to t\circ\Sigma)$ für alle i. Da diese Cohomologietheorie die Periode 1 hat, kann man die Atiyah–Hirzebruch Spektralsequenz wie folgt schreiben:

$$E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\Rightarrow E_\infty^p(t)\cong \mathrm{gr}_p\, tX$$

$\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ ist eine Spektralsequenz von tS^0-Moduln. Aus der Voraussetzung folgt, unter Verwendung des Hilfssatzes, dass $E_2^p(t)\cong H^p(X;tS^0)\cong H^p(X)\otimes tS^0$ ist. Betrachtet man die evidente natürliche Transformation $\varrho:t\to t\otimes\mathbf{Q}=t'$, so erhält man einen Morphismus zwischen Spektralsequenzen $\varrho^*:\{E_r^*(t), d_r(t)\}\to\{E_r^*(t'), d_r(t')\}$. Die Spektralsequenz $\{E_r^*(t'), d_r(t')\}$ bricht aber zusammen, denn $t'S^0$ ist ein $\mathbf{Q}$-Vektorraum. Daraus folgt, dass auch $\{E_r^*(t), d_r(t)\}$ zusammenbricht. Betrachtet man nämlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_2^p(t) & \xrightarrow{\varrho_2^p} & E_2^p(t') \\ {\scriptstyle d_2^p(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2^p(t')} \\ E_2^{p+2}(t) & \xrightarrow{\varrho_2^{p+2}} & E_2^{p+2}(t') \end{array}$$

so ist $\varrho_2^{p+2}\circ d_2^p(t)=d_2^p(t')\circ\varrho_2^p=0$, denn es ist $d_r(t')=0$ für $r\geqslant 2$. Andrerseits ist $\varrho_2^*:E_2^*(t)\cong H^*X\otimes tS^0\to E_2^*(t')\cong E_2^*(t)\otimes\mathbf{Q}$ injektiv, denn nach Voraussetzung ist $H^*X\otimes tS^0$ torsionsfrei. Also folgt aus $\varrho_2^{p+2}\circ d_2^p(t)=0$, dass $d_2^p(t)=0$ ist. Analog schliesst man: $d_r(t)=0$ für $r>2$. Schreibt man H^pX als direkte Summe einer freien Abelschen Gruppe F und einer Torsionsgruppe T, $H^pX\cong F\oplus T$, so induziert die Projektion auf den ersten Faktor einen tS^0-Isomorphismus $H^pX\otimes tS^0\cong F\otimes tS^0\cong\cong(tS^0)^m$, wobei m den Rang von F bezeichnet. Es folgt $E_2^p(t)\cong(tS^0)^m\cong E_\infty^p(t)\cong\cong \mathrm{gr}_p tX$. Der tS^0-Modul tX ist somit frei, denn er besitzt eine endliche Filtrierung mit freier assoziierter graduierter Gruppe $\oplus\mathrm{gr}_p tX$.

6. KOROLLAR 2. *Die Multiplikation $\tilde\mu:tX\otimes_A tY\to t(X\wedge Y)$ ist ein C-Isomorphismus zwischen Abelschen Gruppen.* ($C=$ Klasse der Torsionsgruppen).

Beweis. Wir betrachten wieder die natürliche Transformation $\varrho:t\to t'=t(\ )\otimes\mathbf{Q}$. Der Funktor t' trägt auf natürliche Weise die Struktur eines ungraduierten Cohomologiefunktors mit Multiplikation μ', induziert durch dieselbe Struktur von t, und ϱ ist kompatibel mit den Multiplikationen. Folglich gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} t'X\otimes_{A'}t'Y & \xrightarrow{\tilde\mu'} & t'(X\wedge Y) \\ {\scriptstyle\otimes\mathbf{Q}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\otimes\mathbf{Q}} \\ tX\otimes_A tY & \xrightarrow{\tilde\mu} & t(X\wedge Y) \end{array}$$

Aus Lemma 2 folgt, dass $t'Y$ flach ist ($t'S^0=tS^0\otimes\mathbf{Q}$ ist torsionsfrei und divisibel). Somit ist $\tilde\mu'$ gemäss Lemma 1 ein Isomorphismus. Ferner sind die vertikalen Pfeile im Diagramm C-Isomorphismen, denn für eine Abelsche Gruppe A sind Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A\to A\otimes\mathbf{Q}$ die Torsionsgruppen $\mathrm{Tor}(A,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ bzw. $A\otimes(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Folglich ist auch $\tilde\mu$ ein C-Isomorphismus.

III. N-Auflösungen und die Künneth-Spektralsequenz

Wir wollen uns hier im Hinblick auf die Anwendungen auf $\mathbf{Z}$- bzw. $\mathbf{Z}_q$-graduierte Cohomologiefunktoren $t=\tilde h^*$ beschränken, mit $\tilde\mu$ vom Grade 0 und ν vom Grade 1.

7. DEFINITION 2. Es sei N eine natürliche Zahl. Eine N-Auflösung von X besteht aus einer Familie von Cofaserungen

$$\{Y_k \xrightarrow{\sigma_k} F_k \xrightarrow{\tau_{k+1}} Y_{k+1}; 0 \leqslant k \leqslant N; Y_0 = X; Y_{N+1} = 0\},$$

wobei man verlangt, dass $\tilde{h}^* F_k$ flach ist und dass die Homomorphismen $\sigma_k^* : \tilde{h}^* F_k \to \to \tilde{h}^* Y_k$ surjektiv sind für alle k.

Zu einer N-Auflösung von X gehört eine flache Auflösung von $\tilde{h}^* X$ der Länge N

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & \tilde{h}^* F_N \arrow[r, "\partial_N^*"] & \cdots \arrow[r, "\partial_2^*"] & \tilde{h}^* F_1 \arrow[rr, "\partial_1^*"] \arrow[dr, "\sigma_1^*"'] & & \tilde{h}^* F_0 \arrow[r, "\sigma_0^*"] & \tilde{h}^* X \\ & & & & \tilde{h}^* Y_1 \arrow[ur, "\tau_1^*"'] & & \end{tikzcd}$$

mit $\partial_k = \sigma_k \circ \tau_k$.

Ferner gehört zu einer N-Auflösung von X eine Faktorisierung von $f: 0 \to \Sigma^N X$, nämlich

$$0 \xrightarrow{j^N} Y_N \xrightarrow{j^{N-1}} \Sigma Y_{N-1} \to \cdots \to \Sigma^{N-1} Y_1 \xrightarrow{j^0} \Sigma^N Y_0 = \Sigma^N X$$

wobei $j^p = \Sigma^{N-p-1} \varphi_p$ ist, und φ_p die Abbildung in der Puppesequenz

$$Y_p \to F_p \to Y_{p+1} \xrightarrow{\varphi_p} \Sigma Y_p \to \Sigma F_p$$

bezeichnet.

Offensichtlich ist die Cofaser $\mathrm{Cof}(j^p) = \mathrm{Cof}(\Sigma^{N-p-1} \varphi_p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$.

8. SATZ. *Besitzt X eine N-Auflösung, so gibt es eine Spektralsequenz*

$$\{E_r^{p,q}, d_r\} \quad \text{mit} \quad E_2^{p,q} \cong \mathrm{Tor}_p^A (\tilde{h}^* X, \tilde{h}^* Y)^{p+q} \text{ und } E_{N+1}^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \mathrm{gr}_p \tilde{h}^q (X \wedge Y).$$

Beweis. Es sei $f = \Pi j^p$ die zur N-Auflösung von X gehörige Faktorisierung von $0 \to \Sigma^N X$. Betrachtet man den Kompositionsfunktor $\{T^q, w^q\} = \{\tilde{h}^{N+q}(\ \wedge Y), v^{N+q}\}$, so erhält man [vgl. 7] aus der Faktorisierung $f = \Pi j^p$ ein Rees-System mit zugehöriger Spektralsequenz $\{E_r^{p,q}, d_r\}$. Es folgt in der Schreibweise von [7]

$$E_1^{p,q} = T^q(j^p) \cong \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^{N-p} F_p \wedge Y) \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\mathrm{Cof}(j^p) \cong \Sigma^{N-p} F_p$ ist. Das Differential $d_1^{p,q}: E_1^{p,q} \to \to E_1^{p-1,q+1}$ wird induziert durch

$$(F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\tau_p \wedge 1} Y_p \wedge Y \xrightarrow{\sigma_p \wedge 1} F_p \wedge Y) = (F_{p-1} \wedge Y \xrightarrow{\partial_p \wedge 1} F_p \wedge Y),$$

sodass man ein kommutatives Diagramm erhält

$$\begin{tikzcd} E_1^{p,q} \cong \tilde{h}^{p+q}(F_p \wedge Y) \arrow[r, "(\partial_p \wedge 1)^*"] & \tilde{h}^{p+q}(F_{p-1} \wedge Y) \cong E_1^{p-1,q+1} \\ (\tilde{h}^* F_p \otimes_A \tilde{h}^* Y)^{p+q} \arrow[u, "\cong"', "\mu"] \arrow[r, "\partial_p^* \otimes 1"] & (\tilde{h}^* F_{p-1} \otimes_A \tilde{h}^* Y)^{p+q} \arrow[u, "\cong"', "\mu"] \end{tikzcd}$$

Gemäss Lemma 1 sind die vertikalen Pfeile natürliche Isomorphismen, denn $\tilde{h}^*F_k$ ist flach für alle k. Also sind die Komplexe $\{E_1^{p,q}, d_1^{p,q}\}$ und $\{(\tilde{h}^*F_p \otimes \tilde{h}^*Y)^{p+q}, (\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}\}$ isomorph. Weil $\{\tilde{h}^*F_p, \partial_p^*\}$ eine flache Auflösung von $\tilde{h}^*X$ ist, folgt

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ker} d_1^{p,q}/\operatorname{Im} d_1^{p+1,q-1} \cong \operatorname{Ker}(\partial_p^* \otimes 1)^{p+q}/\operatorname{Im}(\partial_{p+1}^* \otimes 1)^{p+q} \cong$$
$$\cong \operatorname{Tor}_p^A(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{p+q}$$

Für $p \notin [0, N]$ ist offensichtlich $E_2^{p,q} = 0$, denn $\tilde{h}^*X$ besitzt eine flache Auflösung der Länge N (d.h. $\text{w.dim}_A \tilde{h}^*X \leqslant N$). Hieraus folgt $E_{N+1} \cong E_\infty$, weil der Grad von d_r gleich $(-r, 1)$ ist. Schliesslich folgt aus der Endlichkeit der Faktorisierung von f, dass $E_\infty^{p,q} \cong \operatorname{gr}_p T^q(f) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^{N+q}(\Sigma^N X \wedge Y) \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$.

9. KOROLLAR 3. *Besitzt X eine N-Auflösung für ein gewisses N und ist* $\operatorname{Tor}_p^A(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y) = 0$ *für $p > 1$, so gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\tilde{h}^*X \otimes_A \tilde{h}^*Y)^q \xrightarrow{\tilde{\mu}} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to \operatorname{Tor}_1^A(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. In der Spektralsequenz des Satzes von § 8 ist $E_2^{p,q} = \operatorname{Tor}_p^A(\tilde{h}^*X, \tilde{h}^*Y) = 0$ für $p \notin [0, 1]$. Somit sind alle Differentiale d_r gleich 0 für $r \geqslant 2$ und mithin $E_2^{p,q} \cong E_\infty^{p,q} \cong \cong \operatorname{gr}_p \tilde{h}^q(X \wedge Y)$. Man erhält also eine exakte Sequenz $0 \to E_2^{0,q} \xrightarrow{i} \tilde{h}^q(X \wedge Y) \to E_2^{1,q} \to 0$ und verifiziert leicht, dass der Homomorphismus i mit dem Produkt $\tilde{\mu}$ übereinstimmt.

IV. Einige Beispiele

Besitzt X eine 1-Auflösung, so ist $\text{w.dim}_A \tilde{h}^*X \leqslant 1$, und die Voraussetzungen von Korollar 3 sind somit erfüllt. Umgekehrt folgt aus $\text{w.dim}_A \tilde{h}^*X \leqslant 1$, falls es eine Abbildung $i: X \to F_0$ gibt mit $i^*: \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X$ surjektiv und $\tilde{h}^*F_0$ flach, dass X eine 1-Auflösung besitzt, nämlich: $0 \to \tilde{h}^*F_1 \to \tilde{h}^*F_0 \to \tilde{h}^*X \to 0$, wobei F_1 die Cofaser von i bezeichnet.

10. LEMMA 3. *Besitzt X eine 1-Auflösung bezüglich der gewöhnlichen Cohomologie: $0 \to \tilde{H}^*F_1 \to \tilde{H}^*F_0 \to \tilde{H}^*X \to 0$, so induziert die zugehörige Cofaserung $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine 1-Auflösung bezüglich jeder ausserordentlichen Cohomologietheorie $\tilde{h}$ deren Koeffizientenring $\tilde{h}^*S^0$ torsionsfrei ist.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $0 \to \tilde{h}^*F_1 \xrightarrow{\beta^*} \tilde{h}^*F_0 \xrightarrow{\alpha^*} \tilde{h}^*X \to 0$ eine flache Auflösung des $\tilde{h}^*S^0$-Moduls $\tilde{h}^*X$ ist. Nach Lemma 2 sind $\tilde{h}^*F_0$ und $\tilde{h}^*F_1$ frei, denn die Gruppen H^*F_0 und H^*F_1 sind frei (endlicherzeugte flache **Z**-Moduln), und $\tilde{h}^*S^0$ ist nach Voraussetzung torsionsfrei. Die Abbildung α^* ist genau dann surjektiv, wenn β^* injektiv ist, weil $X \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\beta} F_1$ eine Cofaserung ist. Aber $\beta^* \otimes \mathbf{Q}: \tilde{h}^*F_1 \otimes \mathbf{Q} \to \tilde{h}^*F_0 \otimes \mathbf{Q}$ ist injektiv, denn $\tilde{h}^* \otimes \mathbf{Q}$ ist gewöhnliche Cohomologie [6, Satz 10.8]. Folglich ist auch β^* injektiv, denn $\tilde{h}^*F_1$ ist torsionsfrei.

Beispiel. Man verifiziert leicht, dass die Voraussetzungen von Lemma 3 erfüllt sind, wenn man für $\tilde{h}$ die komplexe Cobordismentheorie $\widetilde{\Omega U}$ wählt und für X z.B. einen Moore-Raum oder einen Linsenraum (speziell: einen reellen projektiven Raum).

Nach Atiyah [2] gibt es zu jedem X eine Cofaserung $X \xrightarrow{i} F_0 \to F_1$ mit $i^*: \widetilde{KU}^\# F_0 \to \widetilde{KU}^\# X$ surjektiv und $H^* F_0$ frei. Daraus folgt, dass $0 \to \widetilde{KU}^\# F_1 \to \widetilde{KU}^\# F_0 \to \widetilde{KU}^\# X \to 0$ eine 1-Auflösung ist, denn $\widetilde{KU}^\# S^0 = \widetilde{KU}^0 S^0 \oplus \widetilde{KU}^1 S^0 \cong \mathbf{Z}$. Somit gilt für die KU-Theorie die Künneth-Formel. Hieraus kann man eine Künneth-Formel für die KO-Theorie erhalten, wenigstens modulo 2-Torsion.

Es bezeichne $\mathbf{Z}[x]/(2x-1) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbf{Q}$ den Teilring der rationalen Zahlen, erzeugt durch $\frac{1}{2}$. Dann sind für eine Abelsche Gruppe A Kern und Cokern der natürlichen Abbildung $A \to A \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ offensichtlich 2-Gruppen.

11. KOROLLAR 4. *Für die $\mathbf{Z}_8$-graduierte Cohomologietheorie $\widetilde{KO}^\#(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \widetilde{KO}_2^\#$ gilt die Künneth-Formel*

$$0 \to (\widetilde{KO}_2^\# X \otimes_\Lambda \widetilde{KO}_2^\# Y)^q \to \widetilde{KO}_2^q (X \wedge Y) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda (\widetilde{KO}_2^\# X, \widetilde{KO}_2^\# Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Wir betrachten die oben beschriebene 1-Auflösung bez. der KU-Theorie, $0 \to \widetilde{KU}^\# F_1 \to \widetilde{KU}^\# F_0 \to \widetilde{KU}^\# X \to 0$, mit $H^* F_0$ frei. Ferner sei $\widetilde{KU}^\#(\ ) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = \widetilde{KU}_2^\#$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \widetilde{KO}_2^0(F_1) & \to & \widetilde{KO}_2^0(F_0) & \to & \widetilde{KO}_2^0(X) & \to & 0 \\ & & c \downarrow\uparrow \varrho & & c \downarrow\uparrow \varrho & & c \downarrow\uparrow \varrho & & \\ 0 & \to & \widetilde{KU}_2^0(F_1) & \to & \widetilde{KU}_2^0(F_0) & \to & \widetilde{KU}_2^0(X) & \to & 0 \end{array} \tag{D}$$

Die untere Zeile ist exakt, denn $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ ist ein flacher $\mathbf{Z}$-Modul. Bezeichnen c und ϱ die durch Komplexifizierung und Reellisierung induzierten Homomorphismen, so ist $\varrho c = 2\,\mathrm{Id}$ ein Isomorphismus, denn $\frac{1}{2} \in \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Die obere Zeile im Diagramm (D) ist folglich auch exakt. Wegen $\widetilde{KO}^0(\Sigma^i X) \cong \widetilde{KO}^{-i}(X)$ folgt, dass $0 \to \widetilde{KO}_2^\#(F_1) \to \widetilde{KO}_2^\#(F_0) \to \widetilde{KO}_2^\#(X) \to 0$ exakt ist. Es bleibt zu zeigen, dass dies eine flache Auflösung ist. Da man natürlich die multiplikative Struktur in $\widetilde{KO}_2^\#$ definiert mittels jener von $\widetilde{KO}^\#$, erhält man für den Koeffizientenring $\Lambda = \widetilde{KO}_2^\#(S^0) \cong \widetilde{KO}^\#(S^0) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong (\mathbf{Z}[x, y]/(x^2-4, 2y, xy, y^3)) \otimes \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cong (\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])\,[z]/(z^2-4) \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. Nun ist $H^* F_0$ frei und $\Lambda \cong \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ torsionsfrei, sodass aus Lemma 2 folgt, dass $\widetilde{KO}_2^\#(F_0)$ frei ist. Somit ist $\widetilde{KO}_2^\#(F_1)$ projektiv, denn $\mathrm{gl.dim}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \times \mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) = \mathrm{gl.dim}\, \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] = 1$.

Bemerkung. R. Wood hat gezeigt, dass der Homomorphismus $\tilde{\mu}: \widetilde{KO}^\# X \otimes_\Lambda \widetilde{KO}^\# Y \to \widetilde{KO}^\#(X \wedge Y)$ nicht immer injektiv ist (man wähle $X = Y = \mathbf{C}P^2$). Aus Korollar 4 folgt, dass der Kern von $\tilde{\mu}$ eine 2-Gruppe ist.

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie man N-Auflösungen konstruieren kann.

12. KOROLLAR 5. *Ist der komplexe Cobordismenring $\widetilde{\Omega U}^* X$ ein Λ-Modul von*

endlichem Typ und ist $\mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* X < 2$, *so gilt für alle Y die Künneth-Formel*

$$0 \to (\widetilde{\Omega U}^* X \otimes_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* Y)^q \to \widetilde{\Omega U}^q (X \wedge Y) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda (\widetilde{\Omega U}^* X, \widetilde{\Omega U}^* Y)^{q+1} \to 0$$

Beweis. Bezeichnet $MU = \{MU(1), \Sigma MU(1), MU(2), \ldots\} = \{A(2), A(3), \ldots\}$ das Thom-Spektrum (mit den evidenten Abbildungen $\Sigma A(n) \to A(n+1)$), so ist $\widetilde{\Omega U}^k X \cong \lim\limits_{\to} [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Da $A(k)$ $(k-1)$-zusammenhängend ist, gilt für genügend grosses r: $\widetilde{\Omega U}^k X \cong [\Sigma^r X, A(k+r)]$. Man kann also ein Erzeugendensystem $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m$ des Λ-Moduls $\widetilde{\Omega U}^* X$ finden, des repräsentiert wird durch Abbildungen $f_i : \Sigma^r X \to A(n_i + r)$. Diese Abbildungen definieren natürlich auch ein Erzeugendensystem von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$. Es sei nun $V = \Pi A(n_i + r)$ und $v = (f_1, \ldots, f_m) : \Sigma^r X \to V$; dann ist $v^* : \widetilde{\Omega U}^* V \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$ surjektiv nach Konstruktion. Man überlegt sich leicht, dass V derart durch einen endlichen CW-Komplex $\bar{V}$ approximiert werden kann, dass $v = s \circ \bar{v}$: $\Sigma^r X \xrightarrow{\bar{v}} \bar{V} \xrightarrow{s} V$ ist, mit freiem $H^* \bar{V}$. (Man approximiere $MU(n)$ durch den Thom-Raum des $2N$-universellen $U(n)$-Bündels über der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $U(N)/U(n) \times U(N-n)$ etc.). Es folgt, dass $\bar{v}^* : \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \Omega U^* \Sigma^r X$ surjektiv ist. Wegen Lemma 2 ist $\widetilde{\Omega U}^* \bar{V}$ frei, denn $\Lambda = \widetilde{\Omega U}^* S^0$ ist torsionsfrei und $H^* \bar{V}$ ist frei. Bezeichnet W die Cofaser von $\bar{v}$, so ist $0 \to \widetilde{\Omega U}^* W \to \widetilde{\Omega U}^* \bar{V} \to \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X \to 0$ eine flache Auflösung von $\widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X$, denn nach Voraussetzung ist $\mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* \Sigma^r X = \mathrm{w.dim}_\Lambda \widetilde{\Omega U}^* X < 2$. Gemäss Korollar 3 gilt somit die Künneth-Formel für $\Sigma^r X$ und mithin auch für X.

V. Anhang

L. Hodgkin hat mit ähnlichen Methoden eine Künneth-Formel für die äquivariante K-Theorie bewiesen [8] und hat eine interessante Verallgemeinerung der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz erhalten [9]. Diese gestattet es, in gewissen Fällen die ausserordentliche Cohomologie eines Faserproduktes mithilfe einer Spektralsequenz vom „Künneth-Typ" zu berechnen.*)

LITERATUR

[1] S. Araki and H. Toda, *Multiplicative Structures in mod. q Cohomology Theories I*, Osaka J. Math. *2* (1965), 71–115.
[2] M. F. Atiyah, *Vectorbundles and the Künneth-Formula*, Topology *1* (1962), 245–248.
[3] R. Bott, *Lectures on K(X)*, Dept. of Math., Harvard University.
[4] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Algèbre, Chapitre VII (Hermann, Paris 1952).
[5] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra* (Princeton University Press, 1956).
[6] A. Dold, *Halbexakte Homotopiefunktoren*, Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag 1966).
[7] B. Eckmann and P. J. Hilton, *Composition Functors and Spectral Sequences*, Comment. Math. Helv. *41* (1966–67), 187–221.

*) An der Kategorien-Konferenz in Seattle kündigte J. F. Adams Resultate an, welche in Zusammenhang mit der Künneth-Formel stehen. Die Berichte jener Konferenz werden demnächst in den Lecture Notes (Springer Verlag) erscheinen.

[8] L. Hodgkin, *An equivalent Künneth formula for K-Theorie*, University of Warwick, Preprint.
[9] L. Hodgkin, *Notes towards a geometric Eilenberg-Moore Sequence*, Forschungsinstitut für Mathematik, ETH, Zürich, Preprint.

Forschungsinstitut für Mathematik, ETH Zürich
und
Cornell University, Ithaca N.Y.

Eingegangen den 15. Oktober 1968