

# Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume.

Autor(en): **Ogg, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **44 (1969)**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33760>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ein Satz über orthogonal abgeschlossene Unterräume

von E. OGG

### Einleitung

Seien  $k$  ein kommutativer Körper,  $E$  ein  $k$ -Vektorraum und  $\Phi: E \times E \rightarrow k$  eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Viele unter den allereinfachsten Fragen zur „linearen Algebra“ eines Paares  $(E, \Phi)$  sind noch unbeantwortet im Falle unendlicher (algebraischer) Dimension von  $E$ . Wir beweisen in diesem Beitrag den folgenden

**SATZ:**  $E$  sei eingebettet in einen Vektorraum  $\bar{E}$  mit orthogonaler Basis bezüglich  $\bar{\Phi}: \bar{E} \times \bar{E} \rightarrow k$ .  $\bar{\Phi}$  sowie  $\bar{\Phi}|_{E \times E} = \Phi$  seien nicht ausgeartet. Ist  $F$  ein festes lineares Komplement von  $G$  bezüglich  $E (F \oplus G = E)$ , dann existiert ein Komplement  $F_0$  von  $G$  in  $E$  derart, dass  $F_0 \subset F^{\perp\perp}$  (der Biorthogonalraum von  $F$  in  $E$ ) und  $F_0^{\perp E^{\perp E}} \cap E = F_0$ .

Als Anwendung zu totalisotropen Unterräumen  $F (F \subset F^{\perp})$  eines Raumes  $E$  mit orthogonaler Basis erhalten wir das

**KOROLLAR 1:** Sei  $E$  ein Raum mit orthogonaler Basis bezüglich der nicht ausgearteten Bilinearform  $\bar{\Phi}$ . Besitzt der Unterraum  $G$  von  $E$  ein totalisotropes Komplement  $F$  in  $E$ , dann besitzt  $G$  auch ein orthogonal abgeschlossenes, totalisotropes Komplement in  $E$ .

Schliesslich ergibt sich aus dem Beweis auch noch das **KOROLLAR 2:**  $(E, \Phi)$  sei wie im Korollar 1. Für jeden Unterraum  $F$  von  $E$  gilt:  $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$ .

Die letzte Behauptung ist falsch, wenn man die Voraussetzung über die Existenz einer für  $\Phi$  orthogonalen Basis von  $E$  fallen lässt. Wir verweisen noch auf die Arbeiten [2] und speziell für die Anwendungen zum Korollar 1 auf [1]. Dem Beweise des Satzes schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Gegeben sei ein Vektorraum  $E$  mit  $(e_i)_{i \in J}$  als Basis. Zu jedem  $x = \sum_i \xi_i e_i \in E$  betrachten wir die endliche Indexmenge  $M_x = \{i \in J | \xi_i \neq 0\}$ .

**LEMMA:** Ist  $H$  ein linearer Unterraum von  $E$ , dann existiert eine Basis  $(h_\kappa)_{\kappa \in I}$  von  $H$  mit  $M_{h_\kappa} \not\subset \bigcup_{\substack{v \in I \\ v \neq \kappa}} M_{h_v}$  für alle  $\kappa \in I$ .

**Beweis:** Der Indexmenge  $J$  fügen wir einen neuen Index  $\emptyset$  hinzu.  $J_0 = J \cup \{\emptyset\}$  sei wohlgeordnet, und  $\emptyset$  sei das kleinste Element. Wir definieren eine Abbildung  $\mu: E \rightarrow J_0$  wie folgt: Jedem  $x \in H$  und  $x \neq 0$  ordnen wir den grössten Index in  $M_x$  zu.  $\mu(0) = \emptyset$ . Ist  $x \notin H$  und  $M_x \cap \mu(H) \neq \emptyset$ , dann sei  $\mu(x)$  der grösste Index in  $M_x \cap \mu(H)$ . Im Falle  $M_x \cap \mu(H) = \emptyset$  setzen wir  $\mu(x) = \emptyset$ .

Wir beweisen zunächst: Zu jedem festen  $x \in E$  gibt es ein  $x'$  mit  $x' \equiv x(H)$  und

$\mu(x') = \emptyset$ . Ist  $\mu(x) = \emptyset$ , dann kann  $x' = x$  gesetzt werden. Sei also  $\mu(x) \neq \emptyset$ . Dann existiert ein  $y_1 \in H$  mit  $\mu(x) = \mu(y_1)$ . Wir bilden  $x_1 = x - \lambda_1 y_1$ , wobei wir  $\lambda_1$  so wählen können, dass  $\mu(x) \notin M_{x_1}$ , d.h.  $\mu(x_1) < \mu(x)$ . Ist  $\mu(x_1) = \emptyset$ , dann setzen wir  $x' = x_1$ . Im Falle  $\mu(x_1) \neq \emptyset$  kann das Verfahren fortgesetzt werden. Das Verfahren muss nach endlich vielen Schritten abbrechen, denn sonst gäbe es in  $J_0$  eine nicht abbrechende, absteigende Folge  $\mu(x) > \mu(x_1) > \mu(x_2) > \dots$ , die kein kleinstes Element besitzt. Dies widerspricht aber der Wohlordnung von  $J_0$ . Für ein gewisses  $n$  muss also  $\mu(x_n) = \emptyset$  sein, wobei  $x_n = x - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$  und  $y_i \in H$ . Somit ist  $x_n \equiv x(H)$ , und wir können  $x' = x_n$  setzen.

Wir zeigen nun: Zu jedem  $\kappa \in \mu(H)$  und  $\kappa \neq \emptyset$  existiert ein  $z \in H$  mit  $\mu(z) = \kappa$  und  $M_z \cap \{\iota \in \mu(H) \mid \iota < \kappa\} = \emptyset$ .  $H_\kappa = \{y \in H \mid \mu(y) < \kappa\}$  ist ein linearer Unterraum von  $H$ . Sei  $z' \in H$  mit  $\mu(z') = \kappa$ . Indem wir die obige Überlegung auf  $H_\kappa$  und  $z'$  anwenden, erhalten wir ein  $z$  mit  $z \equiv z'(H_\kappa)$  und  $M_z \cap \mu(H_\kappa) = \emptyset$ , und es ist  $\mu(z) = \mu(z') = \kappa$ . Zu jedem  $\kappa \in I = \mu(H) \setminus \{\emptyset\}$  bilden wir  $A_\kappa = \{y \in H \mid \mu(y) = \kappa, \iota \notin M_y \text{ für alle } \iota \in \mu(H) \text{ und } \iota < \kappa\}$ .  $A_\kappa \neq \emptyset$ . Nach dem Auswahl-axiom kann in jedem  $A_\kappa$  ein  $h_\kappa$  gewählt werden. Diese  $h_\kappa$  haben die Eigenschaft, dass  $\iota \notin M_{h_\kappa}$  für alle  $\iota \in \mu(H)$ ,  $\iota \neq \kappa$  und  $\mu(h_\kappa) = \kappa$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $(h_\kappa)_{\kappa \in I}$  eine Basis von  $H$  ist.  $(h_\kappa)_{\kappa \in I}$  ist jedenfalls linear unabhängig. Sei  $x \in H$  beliebig und  $H_0 = k(h_\kappa)_{\kappa \in I}$ .  $H_0 \subset H$ . Nach obiger Überlegung existiert ein  $x'$  mit  $x' \equiv x(H_0)$  und  $M_{x'} \cap \mu(H_0) = \emptyset$ . Wäre  $x' \neq 0$ , dann hätte man  $\mu(x') \in M_{x'}$  und somit  $M_{x'} \cap \mu(H_0) = M_{x'} \cap \mu(H) \neq \emptyset$ . Dies ergibt einen Widerspruch. Also ist  $x' = 0$ , d.h.  $x \in H_0$ . Q.E.D.

*Beweis des Satzes:* Sei  $(e_i)_{i \in J}$  eine Basis von  $\bar{E}$ ,  $(f_\kappa)_{\kappa \in K}$  eine Basis von  $F$  und  $H = F^{\perp\perp} \cap G$ . Wir wählen in  $H$  eine Basis  $(h_i)_{i \in I}$  wie im Hilfssatz. Es ist dann also  $\mu(h_i) = \iota$ ,  $\mu(H \setminus \{0\}) = I \subset J$ ,  $v \notin M_{h_i}$  für alle  $v \in I$  und  $v \neq i$ . Wir setzen nun  $f'_\kappa = f_\kappa - \sum_{i \in I} \lambda_{\kappa i} h_i$ . Da  $\bar{\Phi}(e_v, h_v) \neq 0$ , können die  $\lambda_{\kappa i}$  so gewählt werden, dass  $\bar{\Phi}(e_v, f'_\kappa) = \bar{\Phi}(e_v, f_\kappa) - \lambda_{\kappa v} \bar{\Phi}(e_v, h_v) = 0$  für alle  $v \in I$ . Dabei ist  $\lambda_{\kappa v} \neq 0$  nur für endlich viele  $v \in I$ . Sei  $F_0 = k(f'_\kappa)_{\kappa \in K}$ . Wegen der linearen Unabhängigkeit der  $f_\kappa$  von den  $h_i$  ist  $(f'_\kappa)_{\kappa \in K}$  eine Basis von  $F_0$  und  $F_0 \cap G = (0)$ . Ferner ist  $F_0 \oplus G = E$  und  $F_0 \subset F^{\perp\perp}$ .

Wir behaupten jetzt:  $F_0^{\perp E^{\perp E}} \cap E = F_0$ . Man hat  $F_0 \subset F^{\perp E^{\perp E}} \cap E$ ,  $F_0 \subset F_0^{\perp E}$  und daher  $F_0^{\perp E^{\perp E}} \subset F_0^{\perp E}$ ,  $F_0^{\perp E^{\perp E}} \cap E \subset F_0^{\perp E} \cap E = F_0^{\perp\perp} \subset F^{\perp\perp}$ . Sei  $x \in F_0^{\perp E^{\perp E}} \cap E$ . Wäre  $x \notin F_0$ , dann gäbe es eine Zerlegung  $x = x_1 + x_2$  mit  $x_1 \in F_0$ ,  $x_2 \in G$ ,  $x_2 \neq 0$ . Da  $x_2 \in H \setminus \{0\}$ , wäre  $\mu(x_2) = \iota_0 \in I$ , also  $\bar{\Phi}(e_{\iota_0}, x_2) \neq 0$ . Andererseits ist  $\bar{\Phi}(e_{\iota_0}, f'_\kappa) = 0$  für alle  $\kappa \in K$ . Es ist  $e_{\iota_0} \in F_0^{\perp E}$ , somit  $x_2 \notin F_0^{\perp E^{\perp E}}$ ,  $x \notin F_0^{\perp E^{\perp E}} \cap E$ . Dies ist ein Widerspruch. Q.E.D.

Das Korollar 2 folgt aus dem Beweise des Satzes, wobei  $E$  und  $\bar{E}$ , und damit  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  zusammenfallen. Für jedes  $v \in I$  ist  $\Phi(e_v, h_v) \neq 0$ . Da  $h_v \in F^{\perp\perp}$ , existiert ein  $\kappa \in K$  mit  $\Phi(e_v, f_\kappa) \neq 0$ , d.h. zu jedem  $v \in I$  gibt es ein  $\kappa \in K$  mit  $\lambda_{\kappa v} \neq 0$ . Andererseits gibt es zu jedem  $\kappa \in K$  höchstens endlich viele  $v$  mit  $\lambda_{\kappa v} \neq 0$ . Ist  $\dim F = \text{card } K \geq \aleph_0$ , dann gilt also:  $\text{card } I \leq \text{card } K \cdot \aleph_0 = \text{card } K$ . Wegen  $F^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} \cap (F \oplus G) = F \oplus (F^{\perp\perp} \cap G)$

$= F \oplus H$  ist  $\dim F^{\perp\perp} = \text{card } K + \text{card } I = \text{card } K$  und daher  $\dim F^{\perp\perp} = \dim F$ . Für endlichdimensionale Unterräume ist diese Beziehung wohlbekannt.

Das *Korollar 1* ergibt sich aus der Bemerkung, dass für ein totalisotropes  $F$  der Unterraum  $F^{\perp\perp}$  ebenfalls totalisotrop ist. Denn aus  $F \subset F^{\perp}$  folgt  $F^{\perp\perp} \subset (F^{\perp})^{\perp\perp} = (F^{\perp\perp})^{\perp}$ .

#### LITERATUR

- [1] GROSS, H. und V. H. MILLER, *Continuous Forms in Infinite Dimensional Spaces*, Comment. Math. Helv. 42 (1967), 132–170.
- [2] KAPLANSKY, I., *Forms in Infinite-Dimensional Spaces* An. Acad. Brasil. Ci. 22 (1950), 1–17.

Eingegangen den 19. März 1968