Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable.

Autor(en): **Holy, Jean-Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **41 (1966-1967)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31376

Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application differéntiable

par JEAN-CLAUDE HOLY

Introduction

Soit f une application d'un ouvert G de R^m dans R^p, $f(x_1,\ldots, x_m)=(y_1(x_1,\ldots,x_m), \ldots y_p(x_1,\ldots,x_m))$. Supposons $p\leq m$ et f de classe C^1.

Un point ξ en lequel le rang de la matrice des dérivées premières

$$A = \left\| \frac{\partial y_j(\xi)}{\partial x_i} \right\| (j = 1,2,\ldots; p; i = 1,\ldots m)$$

est $<p$ est appelé un *point critique* de f, et son image $f(\xi)$ est appelée une *valeur critique* de f.

Le rang de A est par définition le *rang* du point critique ξ et de la valeur critique $f(\xi)$.

Si l'on a, r étant un nombre ≥ 1 non nécessairement entier,

$$\lim_{\eta\to\xi} \frac{|f(\xi)-f(\eta)|}{|\xi-\eta|^r} = 0,$$

nous dirons que ξ est un *point stationnaire d'ordre* r et $f(\xi)$ une *valeur stationnaire d'ordre* r de f. Un point critique de rang 0 est un point stationnaire d'ordre 1.

A. SARD [5] a établi les théorèmes suivants:

1. *Si f est de classe C^q et $q\geq m-p+1$, la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de f est nulle.*
2. *Si $q\geq m/p$, la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de rang* 0 *est nulle.*

La notion de s-mesure, de HAUSDORFF [1] permet de généraliser [6] ces théorèmes. Rappelons-en la définition: Soit E une partie de R^m, s et δ deux nombres positifs, $0<s<+\infty$, $0<\delta<+\infty$; désignons par $\mathscr{R}_\delta$ tout recouvrement dénombrable $\{E_1, E_2,\ldots\}$ de E par des ensembles E_i dont les diamètres $\delta(E_i)$ ne dépassent pas δ, et soit $m_s(E,\delta)$ la borne inférieure des nombres $\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^s$ pour tous les recouvrements $\mathscr{R}_\delta$. La s-mesure de E est par définition:

$$m_s(E) = \lim_{\delta\to 0} m_s(E,\delta).$$

On montre que si $m_s(E)=\alpha>0, \alpha\neq+\infty$, alors $m_{s'}(E)=0$ pour tout $s'>s$ et $m_{s''}(E)=+\infty$ pour tout $s''<s$. La borne inférieure des nombres s pour lesquels $m_s(E)=0$ est appelée la dimension au sens de Hausdorff de l'ensemble E. En désignant par $|A|$ la mesure extérieure de Lebesgue d'un ensemble $A\subset R^m$, on démontre que [7]

$$m_m(A) = C|A|,$$

C étant le volume de la sphère de diamètre unité dans R^m.

3. *Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points critiques d'une application f de classe C^q, de s-mesure finie ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et $q \geq s-p+1$ alors* $m_p f(E)=0$.
4. *Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points critiques de rang 0 de f, de s-mesure finie, ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et $q \geq s/p$, alors $m_{s/q} f(E)=0$.*

Les théorèmes 2 et 4 peuvent être encore précisés de la manière suivante:

5. *Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points stationnaires d'ordre r de f, $m_{m/r} f(E)=0$.*
6. *Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points stationnaires d'ordre r de f, et si la s-mesure de E est finie (ou si E est réunion dénombrable de tels ensembles), alors $m_{s/r} f(E)=0$.*

Des exemples de H. Whitney [8] et A. Sard [5, 6] montrent que, dans les énoncés 1 et 3, la limite donnée pour q ne peut pas être abaissée:

Si q est un entier $<s-p+1$, il existe une application f: $R^m \to R^p$, de classe C^q, ayant un ensemble E de points critiques, de s-mesure finie, telle que $m_{s/q} f(E)>0$.

Ainsi, les théorèmes 1 et 3 ne peuvent être améliorés. Nous montrerons ici qu'il en est de même pour les théorèmes 2, 4, 5 et 6.

D'une manière précise, pour tout $\varepsilon>0$, nous construisons une application f d'un parallélotope $\square$ à m dimensions sur un parallélotope Δ à p dimensions, de classe C^q avec $m/p-1 \leq q<m/p$, qui possède un ensemble P de points stationnaires d'ordre $r=m/p-\varepsilon$, telle que $f(P)=\Delta$.

Ainsi, les théorèmes 2 et 5 ne peuvent être améliorés. L'ensemble P est totalement discontinu, *mais on peut faire en sorte que P soit contenu dans un arc simple Γ, dont tous les points sont stationnaires d'ordre r, et dont l'image $f(\Gamma)$, est une courbe de Peano qui remplit Δ.*

Par une construction analogue, pour tout s tel que $0<s<m$, pour tout $r \geq 1$ et pour tout $\varepsilon>0$, nous obtenons une application $f: \square \to \Delta$, qui possède un ensemble P de points stationnaires d'ordre r tel que $0<m_s(P)<+\infty$, et $m_{s/(r+\varepsilon)} f(P)>0$, ce qui montre que les théorèmes 4 et 6 ne peuvent être améliorés.

Les résultats ci-dessus généralisent un théorème démontré par M. G. de Rham [2].

Dans le texte complet de cette thèse qui n'est pas reproduit ici, nous donnons certaines conditions suffisantes pour que la mesure $|f(K)|$ de l'image $f(K)$ d'un compact $K \subset R^m$ varie continûment avec f pour la C^1-topologie.

J'exprime à M. G. de Rham, ma très vive reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

1. Nous donnons ici une démonstration rapide du Théorème 5, et du théorème 6 avec une hypothèse d'uniformité.

Théorème 5: *Démonstration:*

On peut supposer E de m-mesure finie. Etant donnés $\varepsilon>0$ et $\delta>0$, pour chaque point

$x \in E$, on peut trouver un nombre $\varrho(x)$, satisfaisant à $0<\varrho(x)\leq\delta$, tel que, $\mathscr{B}=\mathscr{B}(x,\varrho)$ étant une boule fermée de centre x et de rayon $\varrho<\varrho(x)$, on ait:

$$\delta(f(\mathscr{B}))\leq\delta \quad \text{et} \quad |f(x')-f(x)|\leq\varepsilon|x'-x|^r,$$

pour tout $x'\in\mathscr{B}$. Cela entraîne

$$\delta(f(\mathscr{B}))\leq 2\sup_{x'\in\mathscr{B}}|f(x')-f(x)|\leq 2\varepsilon\varrho^r<2\varepsilon\delta^r(\mathscr{B})$$

d'où $\delta^{m/r}(f(\mathscr{B}))<(2\varepsilon)^{m/r}\delta^m(\mathscr{B})$.

Or, comme E est de m-mesure finie, on peut extraire [7] de la famille des boules $\mathscr{B}=\mathscr{B}(x,\varrho),(0<\varrho<\varrho(x))$, un recouvrement dénombrable de E, $\mathscr{B}_i$ $(i=1,2,\ldots)$, tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta^m(\mathscr{B}_i)<M, M$$

étant fini et ne dépendant que de la mesure de E. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{m/r}(f(\mathscr{B}_i))\leq(2\varepsilon)^{m/r}M,$$

d'où $m_{m/r}(f(E),\delta)\leq(2\varepsilon)^{m/r}M$ et $m^{m/r}f(E)=0$.

Pour le théorème 6, nous nous bornerons à indiquer une démonstration dans le cas où les points de E sont uniformément stationnaires d'ordre r, c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon>0$, il existe δ tel que, si $\xi\in E$ et $|\eta-\xi|<\delta$, on ait $|f(\xi)-f(\eta)|\leq\varepsilon|\xi-\eta|^r$.

Lemme 1. *Si l'application f est hölderienne d'exposant $e>0$ sur l'ensemble E, c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que*

$$|f(p)-f(q)|\leq C|p-q|^e \tag{1}$$

pour tout couple de points p et q de E, alors pour tout $s>0$, on a

$$m_s f(E)\leq C^s m_{es}(E). \tag{2}$$

Remarquons tout de suite que f est uniformément continue sur E. Soient $\varepsilon>0$, $\delta>0$, fixes, arbitrairement petits; il existe un recouvrement $\mathscr{R}_\delta$ de E au moyen d'ensembles E_i, $(i=1,2,\ldots,)$ tels que $\delta(E_i)<\delta$, $\delta(f(E_i))<\delta$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{es}(E_i)\leq\alpha+\varepsilon, \quad \alpha=m_{es}(E); \tag{3}$$

les ensembles $f(E_i)=F_i$ constituent un recouvrement de $f(E)$ et (1) implique

$$\sum_{i=1}^{\infty}\delta^s(F_i)\leq C^s\sum_{i=1}^{\infty}\delta^{es}(E_i)\leq C^s(\alpha+\varepsilon) \tag{4}$$

par suite, pour tout $\delta>0$, $m_s(f(E),\delta)\leq C^s(\alpha+\varepsilon)$, ce qui entraîne $m_s f(E)=\lim_{\delta\to 0}$

$m_s(f(E), \delta) \leq C^s(\alpha+\varepsilon)$. Comme ε est arbitraire on a:

$$m_s f(E) \leq C^s m_{es}(E).$$

Pour démontrer le théorème 6, il suffit d'appliquer le lemme 1, il vient:

$$m_{s/r} f(E) \leq \varepsilon^{s/r} m_s(E) \quad \text{et comme} \quad s/r \quad \text{est} \quad > 0,$$

et ε arbitraire, on a bien $m_{s/r} f(E) = 0$.

2. *Construction d'applications différentiables non constantes dont toutes les valeurs sont stationnaires.*

Considérons un compact $\square \subset R^m$ et h similitudes F_i, $(i=1, \ldots, h)$ de même rapport $\varrho < 1$, qui changent $\square$ en les h compacts $F_i \square = \square_i \subset \mathring{\square}$ deux-à-deux disjoints. Pour tout entier k, les h^k compacts $F_{a_1} F_{a_2} \ldots F_{a_k} \square = \square_{a_1 a_2 \ldots a_k}$ $(a_i = 1, \ldots, h)$ sont deux-à-deux disjoints. Soit $\square^k = \bigcup \square_{a_1 \ldots a_k}$ leur réunion; on a $\square^k \supset \square^{k+1}$ et l'intersection $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} \square^k$ est un ensemble parfait, totalement discontinu. Pour toute suite infinie $a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$, $(a_k = 1$ ou 2 ou $\ldots$ ou $h)$, les $\square a_1 a_2 \ldots a_k$ $(k=1, 2, \ldots,)$ forment une suite décroissante ayant pour intersection un point de P, et l'on a ainsi une bijection b de l'ensemble de ces suites sur P. Posons encore $D_0 = \square - \square^1$, $D_k = \square^k - \square^{k+1}$. On a

$$\square^{k+1} = \bigcup_{j=1}^{h} F_j \square^k, \qquad D_{k+1} = \bigcup_{j=1}^{h} F_j D_k.$$

Les ensembles P et $D_k (k=0, 1, 2, \ldots)$ sont deux-à-deux disjoints et ont pour réunion $\square$. Comme $\square_i \subset \mathring{\square}$, on a $\square^1 \subset \mathring{\square}$ et la distance d de $\square^1$ à $C\square$ est positive; la distance de $F_a \square^1$ à $C\square_a$ est alors $\alpha = \varrho d > 0$, indépendante de a.

Considérons encore un compact $\Delta \subset R^p$ et h similitudes T_i $(i=1, \ldots, h)$ de rapport $\varrho' < 1$ telles que $T_i \Delta \subset \Delta$, sans supposer les $T_i \Delta$ deux-à-deux disjoints. Soit encore Δ^k la réunion des h^k compacts $T_{a_1} T_{a_2} \ldots T_{a_k} \Delta$ et P' l'intersection $P' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^k$. On définit comme ci-dessus une application s de l'ensemble des suites $a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ sur P', qui est surjective mais non injective lorsque les $T_i \Delta$ ne sont pas deux-à-deux disjoints, et P' n'est en général pas totalement discontinu.

Théorème (7):

a) *Il existe une application $f: \square \to \Delta$, et une seule qui satisfait aux équations fonctionnelles*:

$$T_a \circ f = f \circ F_a, \quad (a = 1, 2, \ldots, h) \tag{2.2}$$

et dont la restriction à D_0 est une application donnée $\varphi: D_0 \to \Delta$

b) *La restriction f à P est $f/P = s \circ b^{-1}$, en sorte qu'elle ne dépend pas de φ et $f(P) = P'$.*

c) *Il est possible de choisir φ de manière que f soit C^{∞} dans $\square - P$.*

d) *Si q est le plus grand entier tel que $\varrho' < \varrho^q$ et si f est C^q dans $\square - P$, f est C^q dans $\square$,* *toutes ses dérivées d'ordre $\leq q$ sont nulles sur P et elle est hölderienne d'exposant $e = \log \varrho'/\log \varrho$ aux points de P.*

La dernière partie du théorème entraîne que tous les points de P sont des points stationnaires d'ordre r de f pour tout $r < e$.

Tout d'abord, f étant donnée sur D_0, on peut la définir de proche en proche sur les ensembles D_k $(k = 1, 2, \ldots)$ de manière à satisfaire à (2,2); si en effet, $\xi \in D_{k+1}$, on a $\xi \in F_a D_k$ pour une valeur de a, $(1 \leq a \leq h)$, $F_a^{-1}(\xi) \in D_k$ et l'on étend la définition de f de D_k à D_{k+1} en posant:

$$f(\xi) = T_a \circ f \circ F_a^{-1}(\xi)$$

L'application f est ainsi déterminée sur $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \Box - P$ lorsque $f/D_0 = \varphi$ est donnée.

Pour définir f sur P, remarquons que (2.2) entraîne les équations plus générales,

$$T_{a_1} T_{a_2} \ldots T_{a_k} \circ f = f \circ F_{a_1} F_{a_2} \ldots F_{a_k}. \tag{2.3}$$

Si au point $\xi \in P$ correspond la suite $b^{-1}(\xi) = a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$ on doit avoir d'après (2.3), $f(\xi) \in T_{a_1} T_{a_2} \ldots T_{a_k} \Delta$ pour tout k, donc $f(\xi) = s \circ b^{-1}(\xi)$. L'application ainsi définie sur P satisfait effectivement à (2.2) et l'on a $f(P) = P'$. On a ainsi établi a) et b).

Si φ est C^∞ à l'intérieur de D_0, il résulte de la définition ci-dessus que f sera C^∞ à l'intérieur de D_k pour tout entier k. Mais il y aura en général des discontinuités à la frontière des D_k. Toutefois, comme la frontière intérieure de D_k (qui est en même temps la frontière extérieure de D_{k+1}, et la frontière de $\Box^{k+1}$) est la réunion des h^k images de la frontière intérieure de D_0 par les h^k applications $F_{a_1} F_{a_2} \ldots F_{a_k}$, en vertu de (2.2) il suffira que f soit C^∞ sur la frontière intérieure de D_0 pour qu'elle le soit en tous les points frontière de tous les D_k, et par suite dans $\Box - P$.

Pour réaliser cette condition, considérons un voisinage ouvert U de la frontière de $\Box$, tel que $\bar{U}, F_a \bar{U}$, $(a = 1, \ldots, h)$ soient deux-à-deux disjoints, et soit $1 = \psi_0 + \psi_1 + \cdots + \psi_h$ une partition de l'unité dans R^m en $h+1$ fonctions C^∞ et ≥ 0, telles que $\psi_0 = 1$ dans U, $\psi_a = 1$ dans $F_a U$. Si alors χ est une application C^∞ de R^m dans R_p, telle que $\chi(\Box) \subset \Delta$, par exemple une application constante de R^m sur un point de Δ, l'application

$$\varphi = \psi_0 \chi + \psi_1 (T_1 \circ \chi \circ F_1^{-1}) + \cdots + \psi_h (T_h \circ \chi \circ F_h^{-1})$$

est C^∞, égale à χ dans U, à $T_a \circ \chi \circ F_a^{-1}$ dans $F_a U$ $(a = 1, 2, \ldots, h)$.
L'application f égale à φ dans D_0 qui satisfait à (2.2) est alors encore égale à φ dans $F_a U, (a = 1, 2, \ldots, h)$, elle est donc C^∞ sur les frontières des $\Box_i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$ c.à.d. sur la frontière intérieure de D_0 et par suite dans $\Box - P$, ce qui prouve *c*).

Soit dx un vecteur unité dans R^m et t une variable réelle qu'on fera tendre vers 0; comme f est C^∞, en tout point $x \in \Box - P$, on a un développement asymptotique

$$f(x + t\,dx) - f(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P_k(x, dx) \tag{2.4}$$

où $P_k(x, dx)$, différentielle d'ordre k de $f(x)$, est un polynôme homogène de degré k en les composantes de dx, dont les coefficients sont les dérivées partielles d'ordre k de f en x.

Si $x \in D_n$, il existe une suite $a_1 a_2 \dots a_n$ et un point $x_n \in D_0$ tels que $x = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n)$. Les similitudes F_a $(a = 1, 2, \dots, h)$ agissent sur les vecteurs de R^m comme une rotation F'_a suivie d'une homothétie de rapport ϱ, par suite dx est l'image par $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}$ du vecteur $\varrho^{-n} F'^{-1}_{a_n} F'^{-1}_{a_{n-1}} \dots F'^{-1}_{a_1}$, ce qui entraîne:

$$x + t\,dx = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n + t\varrho^{-n} F'^{-1}_{a_n} \dots F'^{-1}_{a_1}\, dx) \tag{2.5}$$

D'autre part, chaque transformation $T_1, T_2, \dots, T_h$ agit sur les vecteurs de R^p comme une rotation T'_a $(a = 1, \dots, h)$ suivie d'une homothétie de rapport ϱ', ce qui entraîne en tenant compte de (2.3) et (2.5)

$$f(x + t\,dx) - f(x) = \varrho^m T'_{a_1} \dots T'_{a_n} [f(x_n + t\,\varrho^{-n} F'^{-1}_{a_n} \dots F'^{-1}_{a_1}\, dx) - f(x_n)] \tag{2.6}$$

En identifiant le développement (2.4) avec celui qu'on obtient en appliquant cette même formule (2.4) au second membre de (2.6) il vient:

$$P_k(x, dx) = (\varrho' \varrho^{-k})^n T'_{a_1} \dots T'_{a_n} P_k(x_n, F'^{-1}_{a_n} \dots F'^{-1}_{a_1}\, dx) \tag{2.7}$$

Comme x_n varie dans D_0, où chaque dérivée de f est bornée, et $F'^{-1}_{a_n} \dots F'^{-1}_{a_1}\, dx$ étant comme dx un vecteur unité, $|P_k(x_n, F'^{-1}_{a_n} \dots F'^{-1}_{a_1}\, dx)|$ admet une borne supérieure A_k, d'où

$$|P_k(x, dx)| \leq (\varrho' \varrho^{-k})^n A_k \quad \text{pour} \quad x \in D_n \quad \text{et} \quad |dx| = 1 \tag{2.8}$$

Si $k \leq q$, en vertu de (2.1;d), on a $\varrho' \varrho^{-k} < 1$. Si alors $x \in \square - P$ tend vers un point de P, n tend vers l'infini, par suite $P_k(x, dx) \to 0$.

Nous avons prouvé que si $x \in \square - P$ tend vers un point de P, les dérivées de $f(x)$ d'ordre $\leq q$ tendent vers 0.

Montrons encore que ces dérivées existent et sont nulles sur P. Soit $x \in P$ et $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ la suite telle que $x \in \square a_1 a_2 \dots a_n$ pour tout n. Si $x \neq x'$, il existe un entier déterminé n, tel que $x' \in \square a_1 \dots a_n$ et $x' \notin \square a_1 \dots a_n a_{n+1}$. Il existe alors deux points x_n et x'_n de $\square$, tels que $x = F_{a_1} \dots F_{a_n} x_n$, $x' = F_{a_1} \dots F_{a_n} x'_n$; et l'on a $x'_n \notin \square_{a_{n+1}}$, $x_n \in \square_{a_{n+1} a_{n+2}} \subset F_{a_{n+1}} \square 1$. La distance de x_n à x'_n est par suite supérieure au nombre positif α, $|x'_n - x_n| \geq \alpha$ d'où

$$|x' - x| \geq \alpha\, \varrho^n. \tag{2.9}$$

D'autre part, si δ est le diamètre de Δ, on a:

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \leq \delta \quad \text{d'où} \quad |f(x') - f(x)| \leq \varrho'^n \delta$$

Cela entraîne la continuité de f en x. De plus, on a

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq \frac{\delta}{\alpha} (\varrho' \varrho^{-1})^n$$

d'où résulte si $q \geq 1$, que la différentielle première de f existe et est nulle en x, car $\varrho'\varrho^{-1} < 1$ en vertu de (2.1; d), et $n \to \infty$ si $x' \to x$.

Si $q > 1$, raisonnant par récurrence, supposons que pour $k \leq q-1$, la différentielle d'ordre k, $P_k(x, dx)$, existe et est nulle en x et montrons qu'il en est de même de la différentielle d'ordre $k+1$. En tenant compte alors de (2.8) et de (2.9), on a:

$$\frac{|P_k(x', dx) - P_k(x, dx)|}{|x' - x|} = \frac{|P_k(x', dx)|}{|x' - x|} \leq (\varrho'\varrho^{-k-1})^n \frac{A_k}{\alpha}$$

ce qui tend bien vers 0 pour $x' \to x$, ou $n \to \infty$, car, $\varrho'\varrho^{-k-1} \leq \varrho'\varrho^{-q} < 1$.

Enfin, si $e = \log \varrho' / \log \varrho$, on a $\varrho'\varrho^{-e} = 1$, d'où en tenant compte de (2.9)

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^e} \leq \frac{\delta}{\alpha^e}(\varrho'\varrho^{-e})^n = \frac{\delta}{\alpha^e}$$

ce qui montre que $f(x)$ est hölderienne d'exposant e aux points de P. On voit de même que pour $k \leq q$, les dérivées d'ordre k de $f(x)$ sont hölderiennes d'exposant $e-k$ aux points de P.

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers du précédent Théorème.

Prenons pour $\square$ le parallélotope défini dans R^m par

$$0 \leq x_j \leq 2^{(1-j)/m} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

Le plan $x_1 = 1/2$ partage $\square$ en deux parallélotopes égaux entre eux et semblables à $\square$ dans le rapport $2^{-1/m}$. Les applications

$$T_0: \begin{cases} x'_1 = 2^{-1/m} x_m \\ x'_{j+1} = 2^{-1/m} x_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, m-1)$$

et

$$T_1: \begin{cases} x'_1 = 2^{-1/m} x_m + \frac{1}{2} \\ x'_{j+1} = 2^{-1/m} x_j \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, m-1)$$

sont des similitudes de rapport $2^{-1/m}$ qui changent $\square$ en ses deux moitiés $T_0\square$ et $T_1\square$.

Soit H une homothétie ayant pour centre le centre de $\square$, de rapport < 1. Les similitudes $F_0 = T_0 \circ H$ et $F_1 = T_1 \circ H$ de rapport $\varrho < 2^{-1/m}$, changent $\square$ en deux parallélotopes $F_0\square = \square_0$ et $F_1\square = \square_1$ contenus dans $\square$ et disjoints.

Prenons pour Δ le parallélotope défini de la même manière dans R^p et pour T_0 et T_1 les applications analogues à celles définies ci-dessus; ce sont des similitudes de rapport $\varrho' = 2^{-1/p}$, $T_0\Delta$ et $T_1\Delta$ ont pour réunion Δ mais ne sont pas disjoints. Les 2^k parallélotopes $T_{a_1} T_{a_2} \ldots T_{a_k}\Delta$ ont pour réunion Δ, quel que soit k.

Les applications F_0 et F_1 sont des similitudes de rapport $\varrho < 2^{-1/m}$, qu'on pourra supposer aussi voisin que l'on veut de $2^{-1/m}$. Soit q le plus grand entier strictement inférieur à m/p, $m/p>q\geq m/p-1$. Alors $1/pq>1/m$ et

$$2^{-1/pq}<2^{-1/m}$$

Nous choisirons ϱ de manière que l'on ait:

$$2^{-1/pq}<\varrho<2^{-1/m}$$

en sorte que

$$\varrho'=2^{-1/p}<\varrho^q.$$

Le Théorème (7) s'applique dans ce cas, on a $h=2$, $\varrho'=2^{-1/p}$ et dans les formules (2.5), (2.6), (2.7) on peut remplacer T_a', F_a' respectivement par les rotations uniques T et F. L'ensemble P' devient le parallélotope Δ. Les points de P sont ainsi des points stationnaires d'ordre r aussi voisin qu'on veut de e, et cependant $f(P)=\Delta$. D'après (2.1; d), on a $q<r<e<m/p$, en choisissant ϱ assez voisin de $2^{-1/m}$, e sera aussi voisin qu'on veut de m/p et q le plus grand entier inférieur à m/p.

Lemme (1): *Soit* $E\subset R^m$ *alors* $m_s(E)=0$ *si* $s>m$. Démonstration: Il suffit de supposer que E soit le cube unité dans R^m. E est donc défini par $0\leq x_i\leq 1$, $(i=1, 2,\ldots, \ldots, m)$. On peut partager E en h^m cubes E_j de côtés $1/h$ donnés par les inégalités: $m_{i-1}/h\leq x_j\leq m_i/h$, $i=1, 2,\ldots, h$. Les ensembles E_j recouvrent E, et le diamètre d'un cube E_j vaut $(\sqrt{m}/h)$. Soit $\varepsilon>0$, fixe, arbitrairement petit, et $\delta>0$; il existe h tel que $h^{m-s}\leq\varepsilon$ et $(\sqrt{m}/h)<\delta$. On a:

$$\sum_{j=1}^{h^m}\delta^s(E_j)=h^m\left(\frac{\sqrt{(m)}}{h}\right)^s=m^{s/2}\,h^{m-s}\leq\varepsilon\, m^{s/2}$$

alors $m_s(E,\delta)\leq\varepsilon$ pour tout δ, et par suite $m_s(E)\leq\varepsilon$ et comme ε est arbitraire, on a $m_s(E)=0$.

Des lemmes (1, § 1 et 1 § 2) il découle que $m_sf(E)=0$ pour $s>m/e$. En particulier $m_pf(E)=0$ si $p>m/e$ c'est-à-dire $e>m/p$.

Or, dans l'exemple,

$$m_pf(E)>0 \quad \text{et} \quad e=\frac{\log\varrho'}{\log\varrho}=\frac{\log 2^{-1/p}}{\log\varrho}$$

est aussi voisin qu'on veut de $\log 2^{-1/p}/\log 2^{-1/m}=m/p$, *on ne peut donc améliorer ni l'exemple, ni le Théoreme 2 de A. Sard.*

Avant de prouver que l'on ne peut améliorer le théorème 4 de A. Sard, nous allons étudier la s-mesure de l'ensemble P. Nous montrerons que la dimension de P au sens de Hausdorff est égale à $s_0=-\log 2/\log\varrho$ et que $m_{s_0}(P)$ est positive, non infinie.

Lemme 2: *Soit* $s_0=-\log 2/\log\varrho$ *alors* $m_{s_0}(P)>0$, $\neq\infty$. Démonstration: Dans le cas où f est la fonction prenant ses valeurs dans R^1, nous avons d'après le théorème

(7):
$$|f(p)-f(q)| \le A\,|p-q|^e$$

le nombre e vaut précisément $-\log 2/\log \varrho$ car $\varrho'=1/2$. D'après le lemme (1, § 1), $m_e(P)$ ne peut être nulle car $m_1 f(P)=1$ et en posant $s=1$ dans le lemme (1, § 1), on a $m_1 f(P) \le A m_e(P)$. D'autre part $m_e(P)$ n'est pas infinie, car à tout $\delta>0$ on peut faire correspondre un indice n, tel que $\varrho^n \delta(P)<\delta$ et comme l'ensemble P est contenu dans la réunion des 2^n ensembles $\square_{a_1 \dots a_n}$ deux-à-deux disjoints, semblables à $\square$ dans le rapport ϱ^n, et que $2\varrho^e=1$, on aura:

$$\sum_{(i=1,\dots,n),\, a_i=0,1} \delta^e(\square_{a_1 \dots a_n}) = 2^n \varrho^{ne} \delta^e(\square) = \delta^e(\square),$$

d'où il résulte que $m_e(P, \delta) \le \delta^e(\square)$ et comme δ est aussi petit que l'on veut on a:

$$m_e(P) \le \delta^e(\square)$$

On peut ainsi remarquer qu'à chaque valeur de e, comprise entre 0 et m, $0<e<m$, il correspond un nombre ϱ tel que $2\varrho^e=1$ et un ensemble $P \subset R^m$, tels que $m_e(P)>0$, $\neq +\infty$.

En nous basant sur les théorèmes (6, § 1) et (1, § 2), et le lemme (2, § 2), nous allons montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $1>\varepsilon>0$, fixe, et tout couple d'entiers m et p, $m \ge 1$, $p \ge 1$, il existe pour tout nombre $r \ge 1$, et pour tout nombre e_1, $0<e_1<m$, une application f_ε d'un ouvert G de R^m dans R^p, de classe C^q, $q=[r]$ et un ensemble P de points stationnaires d'ordre r de f_ε, $m_{e_1}(P) \neq 0$, tels que

$$m_{e_1/r+\varepsilon} f_\varepsilon(P) \neq 0$$

Nous nous plaçons dans le cas où l'on a deux similitudes F_0 et F_1 de rapport $\varrho_1 = h_1 2^{-1/m}$, et deux similitudes T_0 et T_1 de rapport $\varrho_2 = h_2 2^{-1/p}$. D'après le théorème (7), si $x \in P$ on a:

$$\frac{|f(x')-f(x)|}{|x'-x|^r} \le \frac{A}{\alpha^r}\left(\frac{h_2 \cdot 2^{-1/p}}{h_1^r \cdot 2^{-r/m}}\right)^n$$

et cette dernière quantité tendra vers 0 pour $n \to \infty$, c.à.d. lorsque $x' \to x$, si

$$h_2 < h_1^r\, 2^{-r/m+1/p}$$

de sorte que l'on peut écrire:

$$h_2 = (1-\varepsilon') h_1^r\, 2^{-r/m+1/p}, \quad \varepsilon' > 0.$$

Du théorème (7), il découle que l'application f_ε que l'on obtient est de classe C^q, $q=[r]$ dans $\square$ et les points de P sont des points stationnaires d'ordre r de f_ε. L'application f_ε vérifie les hypothèses du théorème (6, § 1), sur P et il vient:

$$m_{e_1/r} f_\varepsilon(P) = 0.$$

En vertu du lemme (2, § 2), à tout nombre e_1, $0<e_1<m$, il correspond un nombre ϱ_1 et un ensemble P, tels que

$$m_{e_1}(P)>0\,,\qquad m_{e_1}(P)\neq\infty$$

Cela implique

$$e_1=\frac{-\log 2}{\log\varrho_1}=\frac{-\log 2}{\log h_1-1/m\log 2}$$

Pour les mêmes raisons, au nombre h_2 il correspond

$$e_2=\frac{-\log 2}{\log\varrho_2}\qquad\text{et}\qquad m_{e_2}(P')>0\,,\neq\infty$$

Nous avons

$$e_2=\frac{-\log 2}{\log(1-\varepsilon')h_1'-r/m\log 2}<\frac{e_1}{r}$$

et l'on peut poser $e_2=e_1/(r+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$.

On peut rendre e_2 aussi voisin que l'on veut de e_1/r, il suffit pour cela de choisir ε' suffisamment petit. Comme $m_{e_2}(P')>0$, on a bien $m_{e_1/r+\varepsilon}f_\varepsilon(P)\neq 0$. *On ne peut donc améliorer ni les théoremes 5 et 6 § 1, ni le théoreme 4 de Sard.*

3. En nous basant sur le cas particulier du paragraphe 2, nous allons construire une courbe simple C passant par P et une application $f\colon\square\to\Delta$ telle que $f(P)=\Delta$ dont tous les points de C sont stationnaires d'ordre $r=m/p-\varepsilon$.

Pour construire C, considérons les applications $t_0(z)=(1+z)/5$ et $t_1(z)=(3+z)/5$ de l'intervalle $I=(0\leq z\leq 1)$. Le théorème (7), montre qu'il existe une application $g\colon I\to\square$ et une seule, qui satisfait aux équations

$$g\circ t_a=F_a\circ g\qquad a=0,1\,,\tag{3.1}$$

et dont les restrictions aux intervalles $0\leq z\leq 1/5$, $2/5<z<3/5$, et $4/5<z\leq 1$ sont données. Dans ce cas, $r=0$ et g est continue.

Désignons par Q le sommet de $\square$ opposé à O, et supposons que les restrictions de g à ces trois intervalles définissent trois arcs simples α, β et γ, joignant respectivement O à F_0O, F_0Q à F_1O et F_1Q à Q, ces arcs étant deux-à-deux disjoints et contenus dans D_0 à l'exception des extrémités qui sont sur D_1. Alors l'application g définit un arc simple C, joignant O à Q, égal à la réunion de P et des arcs α, β, γ et de toutes leurs images pour toutes les applications $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_k}$ $(a_i=0,1;\ k=1,2,\dots)$. Supposons $p=1$. Les transformations T_0 et T_1 se réduisent alors à $T_0y=y/2$ et $T_1y=(1+y)/2$, de sorte que $T_0O=O$, $T_01=T_1O=1/2$, $T_11=1$. Si la solution f des équations (2.2) satisfait à $f(O)=0$ et $f(Q)=1$, on aura par suite $f(F_0(O))=0, f(F_0(Q))=f(F_1(O))=$

$=1/2$ et $f(F_1(Q))=1$ c.à.d. que f prend la même valeur aux deux extrémités de chacun des arcs α, β et γ. Il en résulte qu'on peut choisir la restriction φ de f à D_0 de manière que f soit constante égale à O dans un voisinage W_1 de α, constante égale à $^1/_2$ dans un voisinage W_2 de β et constante égale à 1 dans un voisinage W_3 de γ et C^∞ dans $\square - P$. La fonction f est alors stationnaire d'ordre ∞ aux points de α, β, γ et en leurs images par toutes les transformations $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_k}$ ($a_i=0,1$; $k=1,2,\dots$). Comme elle est stationnaire d'ordre $r=m-\varepsilon$ aux points de P, elle est stationnaire d'ordre r en tous les points de la courbe C et $f(C)=f(P)=I$.

Cas de $p>1$.

A partir de la construction précédente et du cas particulier du théorème (7), nous allons obtenir une application f d'un ouvert G de R^m dans R^p, de classe C^q, $m/p>q\geq \geq m/p-1$ stationnaire d'ordre $r=m/p-\varepsilon$, $m/p-1<q<r<e<m/p$, sur un arc de courbe Γ, telle que $f(\Gamma)=\Delta$. Nous pouvons prendre pour β un arc de courbe contenant un exemplaire de l'arc de courbe C construit ci-dessus, et disposer C de manière que seules son origine et son extrémité rencontrent respectivement les ensembles F_0W_3 et F_1W_0 et l'on raccordera C aux points F_0Q et F_1O au moyen d'arcs de courbe C', C'', rectifiables, entièrement contenus dans W_2.

Soient P_0 et P_1 deux sommets de Δ dont nous supposerons qu'ils vérifient la condition $T_0P_0=P_0$ et $T_1P_1=P_1$, et a le segment de droite qui joint T_0P_1 à T_1P_0. Nous pouvons maintenant choisir φ de manière que $\varphi(x)=P_0$ dans W_1, $\varphi(x)=P_1$ dans W_3 et que φ soit stationnaire d'ordre $m-\varepsilon$ sur C avec $\varphi(C)=a$, $\varphi(C')=P_0$, $\varphi(C'')= =P_1$. Le segment a, image de β par φ est donc entièrement constitué de valeurs stationnaires d'ordre $m-\varepsilon$ de φ.

Soit Γ l'arc de courbe formé de la réunion de α, β, γ, de toutes leurs images par les applications $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}$, ($a_j=0,1$; $n=1,2,\dots$) et de P. L'application f qu'on déduit de φ est stationnaire d'ordre $r=m/p-\varepsilon$ sur Γ et C^∞ en dehors de Γ. En effet, f est stationnaire d'ordre $m-\varepsilon$ sur tous les ensembles $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(C)$, cela découle de la formule:

$$f\circ F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x) = T_{a_1}T_{a_2}\dots T_{a_n}\circ f(x),$$

car si x est critique pour f il l'est aussi pour l'application $T_{a_1}T_{a_2}\dots T_{a_n}\circ f(x)$ car les T_a sont des difféomorphismes C^∞, et comme il en va de même pour les F_a, le point $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x)$ est aussi critique pour f. En vertu de ces équations, si x est stationnaire d'ordre r pour f, alors $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x)$ est également stationnaire d'ordre r pour f. Comme on peut choisir ε de telle sorte que $m-\varepsilon>m/p>r$, f est bien stationnaire d'ordre r sur Γ et $f(\Gamma)=\Delta$.

On peut encore remarquer que l'image de Γ est une courbe de Peano qui remplit le pavé Δ, et le graphe de l'application f dans R^{m+p} est une variété à m dimensions de classe C^q. Le m-plan tangent π à cette variété, varie continûment le long d'une courbe Γ' qui est l'image de Γ par l'application $\Omega(x)=(x,f(x))$, et en chaque point de Γ', π est parallèle à R^m. La projection de Γ' sur R^p est Δ.

4. Voici une autre construction d'une application du parallélotope à m dimensions $\square$ dans un cube à p dimensions Δ de classe C^q, $m/p-1 \leq q < r < m/p$, et stationnaire d'ordre $r = m/p - \varepsilon$ en tous les points d'une courbe C, dont l'image $f(C)$ remplit néanmoins Δ.

Désignons par Δ le cube unité de R^p, $0 \leq x_i \leq 1$ $(i=1, 2, \ldots, p)$. Ordonnons ses sommets S_i $(i=1, 2, \ldots, 2^p)$ de manière que S_{i-1} et S_i $(i=2, 3, \ldots, 2^p)$ ainsi que S_{2^p} et S_1 soient les extrémités d'une même arête. On peut déterminer cet ordre par récurrence, de manière que S_i $(i=1, 2, \ldots, 2^{p-1})$ soient les sommets de la face de Δ contenue dans le plan $x_p=0$ rangés dans un ordre satisfaisant à la condition ci-dessus, et prenant pour S_j si $j > 2^{p-1}$ le sommet de la face contenue dans le plan $x_p=1$ qui se projette sur S_{2^p+1-j}. On peut supposer que $S_1=(0, 0, \ldots, 0)=0$, alors $S_{2^p}= =(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Partageons Δ en 2^p cubes égaux, par les plans $x_k=1/2$, $(k=1, 2, \ldots, p)$ et désignons par Δ_i celui qui contient le sommet S_i. Choissisons dans chaque Δ_i une arête orientée A_i, de manière que l'extrémité de A_i coïncide avec l'origine de A_{i+1} $(i=1, \ldots, 2^p-1)$ et que S_1 soit l'origine de A_1 et S_{2^p} l'extrémité de A_{2^p}. On peut faire ce choix par récurrence: si B_i $(i=1, 2, \ldots, 2^{p-1})$ sont des arêtes des bases des Δ_i dans le plan $x_p=0$, on prendra $A_i=B_i$ (les B_i satisfaisant par hypothèse à la condition énoncée pour $p-1$) pour $i<2^{p-1}$, $A_{2^{p-1}}$ = arête parallèle à O_{x_p} ayant pour origine l'extrémité de $B_{2^{p-1}-1}$, et si $j>2^{p-1}$, A_j sera l'arête de Δ_j qui se projette sur A_{2^p+1-j}, avec l'orientation opposée.

Si alors T_i est une similitude (de rapport $\frac{1}{2}$) qui change Δ en Δ_i et l'arête $\overline{S_1 S_{2^p}}$ de Δ en A_i, $(i=1, 2, \ldots, 2^p)$, on a:

$$T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1, (i = 1, \ldots 2^p - 1), T_1 S_1 = S_1, T_{2^p} S_{2^p} = S_{2^p} \tag{4.1}$$

Considérons alors les 2^p similitudes $F_{a_1} \ldots F_{a_p}$ $(a_j=0, 1)$ les F_a étant les similitudes (de rapport ϱ) définies au § 2 et désignons-les par ϕ_i $(i=1, 2, \ldots, 2^p)$. Le Théorème (7), fournit alors une application f qui satisfait aux équations fonctionnelles

$$T_i \circ f = f \circ \phi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^p) \tag{4.2}$$

Soient α_i, $(i=0, 1, \ldots, 2^p)$, 2^p+1 arcs simples, deux-à-deux disjoints contenus (sauf les extrémités) dans D_0, α_0 joignant O à $\phi_1 O$, α_i joignant $\phi_i Q$ à $\phi_{i+1} O$, $(i=1, \ldots, 2^p-1)$ et α_{2^p} joignant $\phi_{2^p} Q$ à Q. La réunion de P avec les arcs α_i et toutes leurs images par toutes les applications $\phi_{i_1} \ldots \phi_{i_k}$, $(i_j=1, \ldots, 2^p;\ k=1, 2, \ldots)$ est un arc simple C, joignant O à Q.

Si la solution f des équations (2.2) satisfait à $f(0)=S_1, f(Q)=S_{2^p}$, en vertu de (4.1) elle prend la même valeur $T_i S_{2^p}=T_{i+1} S_1$ aux deux extrémités de l'arc α_i. On en déduit que l'on peut choisir la restriction φ de f à D_0 de manière que f soit C^∞ dans $\square - P$ et constante égale à $T_i S_{2^p}=T_{i+1} S_1$ dans un voisinage de α_i. C'est alors une application stationnaire d'ordre r en tous les points de C, telle que $f(C)=\Delta$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. HAUSDORFF, Dimension und äusseres Mass, Math. Ann. *79* (1919) 157–179.
[2] G. DE RHAM, Celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa 11–16 aprile 1961. Vol. II: simposio di analisi, 61–65. Sur quelques fonctions différentiables dont toutes les valeurs sont des valeurs critiques.
[3] S. SAKS, Theory of the integral, Warszawa, 1937.
[4] S. SAKS et S. MAZURKIEWICZ, Sur les projections d'un ensemble fermé, Fundamenta mathematicae, *8* (1900) 109–113.
[5] A. SARD, The measure of critical values of differentiable maps, Bull. Amer. Math. Soc. *48*, (1942) 883–890.
[6] A. SARD, Images of critical sets, Annals of mathematics. *68* (1958) 247–259.
[7] A. SARD, The equivalence of n-measure and Lebesgue measure in E^n, Bull. Amer. Math. Soc. *49* (1943) 758–759.
[8] H. WHITNEY, A function not constant on a connected set of critical points, Duke. Math. Journal. *1*, (1935) 514–517.

Reçu le 24 novembre 1965