

# Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions.

Autor(en): **Sydler, J.-P.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **40 (1965-1966)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-30629>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions

par J.-P. SYDLER

*Dédié à ma femme, à ma mère, à M. H. HOPF et à la mémoire de M. DEHN*

**0.1.** Deux polyèdres sont équivalents (zerlegungsgleich) lorsque l'on peut décomposer le premier en polyèdres partiels avec lesquels on peut construire le deuxième. Deux polyèdres  $P$  et  $Q$  sont équivalents par adjonction (ergänzungsgleich) lorsqu'il existe un polyèdre  $R$  tel que  $P + R$  et  $Q + R$  sont équivalents. Ces notions jouent un rôle important dans la recherche des axiomes nécessaires à la définition du volume. On sait que deux polygones plans de même aire sont équivalents. La situation est différente dans l'espace. Au Congrès international des mathématiciens tenu à Paris en 1900, HILBERT demandait, comme troisième d'une série de problèmes irrésolus, de trouver deux polyèdres de même volume non équivalents [1]. La réponse fut donnée presque immédiatement par DEHN [2]:

Considérons un polyèdre  $P$  et désignons par  $\alpha_i$  et par  $l(\alpha_i)$  la grandeur des angles et la longueur des arêtes de ses dièdres. Les angles  $\alpha_i$  peuvent s'exprimer linéairement avec des coefficients rationnels en fonction de  $\pi$  et de  $n$  angles indépendants  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ :

$$\alpha_i = r_{i0}\pi + \sum_{j=1}^n r_{ij}\gamma_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

DEHN démontra que: *Si le polyèdre  $P$  est équivalent à un cube, alors*

$$\sum_{i=1}^s r_{ij}l(\alpha_i) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ces conditions nécessaires ne sont pas remplies par le tétraèdre régulier et par conséquent: Un cube et un tétraèdre régulier ne sont pas équivalents.

Si un polyèdre  $P$  est équivalent à un cube, nous écrirons  $P \sim 0$  (mod. cube) ou plus simplement  $P \sim 0$ . De même  $P_1 \sim P_2$  signifiera que  $P_1$  est équivalent au polyèdre constitué par  $P_2$  et par un cube, l'équivalence simple ayant lieu si  $P_1$  et  $P_2$  ont le même volume.

**0.2.** Le problème de l'équivalence a été repris depuis une vingtaine d'années. Il nous a d'abord été possible de montrer que, dans l'espace euclidien,

deux polyèdres équivalents par adjonction sont toujours équivalents [3]. Puis HADWIGER entre autres trouva plusieurs propriétés et généralisations nouvelles [4]. (Pour l'historique de la question de l'équivalence, voir [5]).

**0.3.** Une question restait posée: Les conditions de DEHN sont-elles aussi suffisantes, c'est-à-dire un polyèdre qui vérifie les conditions de DEHN est-il toujours équivalent à un cube? Nous démontrons dans cette publication que tel est bien le cas dans l'espace euclidien.

Dans des travaux précédents [6]–[7], nous avons montré que, si un polyèdre remplit les conditions de DEHN, il est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres ont des angles rationnels en  $\pi$ , ces angles étant même des multiples de  $\frac{\pi}{4}$ . Ces propriétés se basent sur quelques constructions simples et ne sortent pas du cadre de la géométrie élémentaire. Dans une même perspective, nous montrons encore au chapitre 1 de cette publication qu'il existe un polyèdre équivalent à un cube ayant un dièdre égal à  $\frac{\pi}{4}$ , tous les autres dièdres étant droits. Par conséquent, tout polyèdre vérifiant les conditions de DEHN est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont droits.

**0.4.** Pour démontrer qu'un tel polyèdre est toujours équivalent à un cube, nous avons dû analyser les propriétés de deux classes de tétraèdres particuliers que nous nommons  $A$  et  $B$  (voir la définition en 2.1.), les dièdres d'un polyèdre  $A$  vérifiant une relation  $\cos \gamma_1 = \sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1$ , ceux du second une relation du genre  $\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$ , relations qui introduisent une certaine multiplicité et une certaine additivité dans nos considérations géométriques.

**0.5.** Au chapitre 2, nous montrons tout d'abord qu'un polyèdre à dièdres droits se laisse décomposer en polyèdres  $A$  et  $B$ . Cette partie, simple quoique de présentation compliquée, revient à montrer que l'on peut remplacer trois dièdres de même longueur et tels que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  par des couples de dièdres complémentaires.

**0.6.** Au chapitre 3, nous montrons que, si un polyèdre quelconque est équivalent à une somme de polyèdres  $A$  et que ces polyèdres  $A$  vérifient les conditions de DEHN séparément pour les dièdres  $\gamma_i$  et pour les dièdres  $\frac{\pi}{2} - \gamma_i$ , alors ce polyèdre est équivalent à un cube (théorème  $SA$ ).

0.7. Dualement, il nous est possible de montrer au chapitre 4 que, si un polyèdre est équivalent à une somme de polyèdres  $B$ , et que cette somme vérifie les conditions de DEHN, ce polyèdre est équivalent à un cube (théorème  $SB$ ). Ces deux théorèmes  $SA$  et  $SB$  sont les généralisations de constructions simples et ne font appel qu'à quelques considérations d'algèbre linéaire élémentaire.

0.8. Au chapitre 5, nous pouvons alors montrer que tout polyèdre constitué de polyèdres  $A$  et  $B$  qui vérifie les conditions de DEHN est équivalent à un cube (théorème  $SAB$ ). La démonstration est possible grâce à un passage alterné du domaine de la géométrie élémentaire à celui de l'algèbre des polynômes à plusieurs variables. Les points essentiels sont les suivants :

0.8.1. Si un polyèdre vérifie les conditions de DEHN, il est équivalent à une somme de polyèdres  $A$  où apparaissent des dièdres  $\alpha_i$  et  $\frac{\pi}{2} - \alpha_i$ . On peut trouver  $T$  dièdres  $\tau_j$  tels que

$$\cos^2 \alpha_j = \prod_s (\sin^2 \tau_s)^{R_{js}} \text{ et } \sin^2 \alpha_j = \prod_s (\sin^2 \tau_s)^{S_{js}}, \quad (R_{js}, S_{js} \text{ entiers positifs}).$$

Dès lors, le polyèdre implique un certain nombre de polynômes

$$\Phi_j = \prod_{s=1}^T (\sin^2 \tau_s)^{R_{js}} + \prod_{s=1}^T (\sin^2 \tau_s)^{S_{js}} - 1 = 0, \quad (j = 1, \dots, N)$$

et les conditions de DEHN se mettent sous la forme

$$\sum_{j=1}^N H_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial (\sin^2 \tau_s)} = 0, \quad (s = 1, \dots, T) \quad (\text{cf. 2.6. et 3.12.})$$

0.8.2. Grâce à une construction simple démontrée par le théorème  $SA$ , on peut établir une relation entre des polyèdres  $A$ , un polyèdre  $B$  dont le cosinus des dièdres s'exprime en fonction de  $k \sin \tau_j$  et un autre polyèdre  $B$  dont les cosinus s'expriment en fonction de  $(k - 1) \sin \tau_j$  (5.2.-5.5.). Cette propriété permet par la suite les itérations par rapport aux dièdres  $\tau$ .

0.8.3. On peut associer à tout polynôme  $p$  à  $n$  variables un polyèdre  $[P + R](p)$  constitué d'un polyèdre  $P$  composé de polyèdres  $B$  dont les dièdres correspondent aux différents termes de  $p$ , et d'un polyèdre  $R$  composé de polyèdres  $A$  dont les dièdres correspondent aux différents facteurs des termes

de  $p$  (5.6.–5.8.). C'est ici surtout qu'interviennent les caractères additifs et multiplicatifs des polyèdres  $B$  et  $A$ .

0.8.4. La propriété essentielle des polyèdres  $[P + R]$  est la suivante (5.9.–5.11.).

Si  $\Phi$  est un polynôme quelconque,

$$[P + R](\Phi \cdot p) \sim \Phi[P + R](p).$$

0.8.5. Cette propriété permet d'établir le théorème central de notre démonstration (5.13–5.14).

Si le polynôme  $p(x_1, \dots, x_n)$  est tel que, pour un certain point  $y$

$$p(y) = 0 \text{ et } \frac{\partial p(y)}{\partial x_s} = 0, (s = 1, \dots, n), \text{ alors } [P + R](p[y]) \sim 0.$$

Ce théorème se démontre par récurrence en employant quelques propriétés simples des polynômes à plusieurs variables et, pour la partie géométrique, en faisant usage de la propriété 0.8.3.

En remplaçant finalement le polynôme  $p$  par le polynôme  $\sum H_j \Phi_j = 0$  (0.8.1.), on trouve que le polyèdre  $[P + R](\sum H_j \Phi_j)$  est équivalent à un cube (6.1) et, en remontant la chaîne de nos résultats partiels, on voit qu'on a démontré que tout polyèdre à dièdres droits est équivalent à un cube. Les conditions nécessaires de DEHN sont donc aussi suffisantes.

## Chapitre 1. Sur les polyèdres à dièdres droits

1.1. *Il existe un polyèdre équivalent à un cube, ayant un dièdre égal à  $\frac{\pi}{4}$ , tous les autres dièdres étant droits.*

En effet, considérons un prisme droit  $ABEFGH$ , dont les bases  $GAE$  et  $HBF$  sont des triangles isocèles rectangles en  $G$  et  $H$ . Coupons ce prisme par le plan  $EJB$  perpendiculaire au plan  $ABEF$ ,  $J$  étant l'intersection avec  $GH$ . Le polyèdre  $EGJAB$  est équivalent à un cube.  $K$  et  $L$  étant les milieux de  $EF$  et de  $AB$  ( $JK$  et  $JL$  étant donc respectivement perpendiculaires à  $JAB$  et à  $JEF$ ),  $M$  le milieu de  $KL$ , menons encore par  $J$  le plan perpendiculaire à  $EL$ , qui coupe  $EL$  en  $D$  et  $KB$  en  $C$ . Le polyèdre  $GJEABCD$  a pour dièdres :  $\frac{\pi}{4}$  le long de  $AB$ ,  $\alpha$  le long de  $BC$ ,  $\pi - \alpha$  le long de  $ED$ ,  $\frac{\pi}{2}$  pour toutes les autres arêtes. Les tétraèdres  $JMDE$  et  $JMCB$  étant identiques, le polyèdre est équivalent au polyèdre  $EGJAB$ , donc à un cube (figure 1).

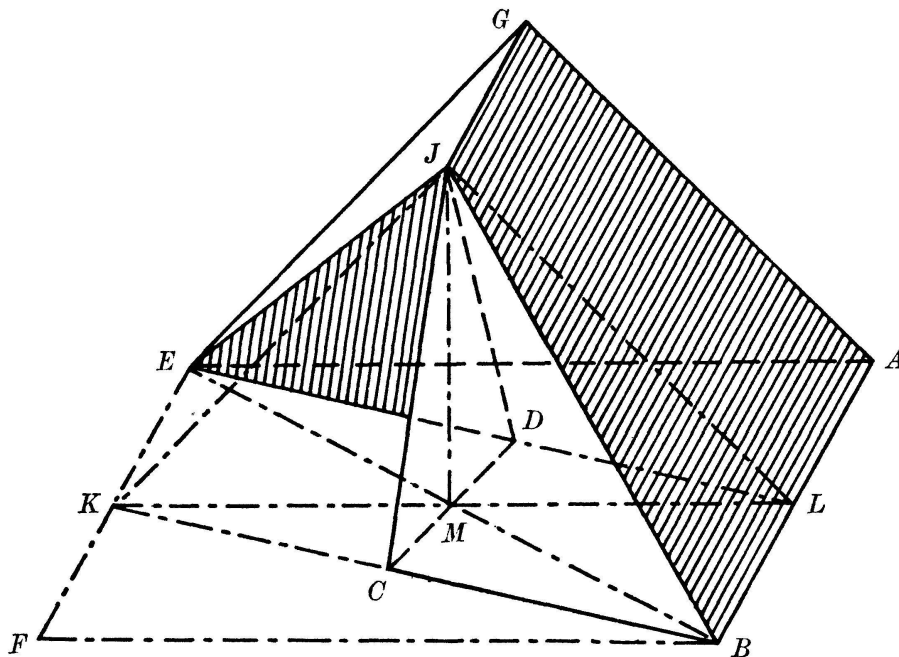


Figure 1

Construisons le polyèdre  $Q$  suivant (non équivalent à un cube en général): Soit  $TCPB$  un carré et soit  $S$  un point de la normale à  $TCB$  en  $T$  tel que l'angle  $TSP$  soit égal à  $\alpha$ . Menons encore par  $BC$  le plan perpendiculaire à  $SP$ , qui coupe  $SP$  en  $A$ , et soit  $\beta$  l'angle  $BAC$ . Le polyèdre  $SABCT$  a donc pour dièdres:  $\pi - \alpha$  le long de  $BC$ ,  $\beta$  le long de  $SA$ , les autres étant droits (figure 2).

Ajoutons au polyèdre  $EGJABCD$  le long de l'arête  $BC$  un polyèdre semblable à  $Q$ , l'arête  $VW$  correspondant à  $SA$  étant perpendiculaire au plan

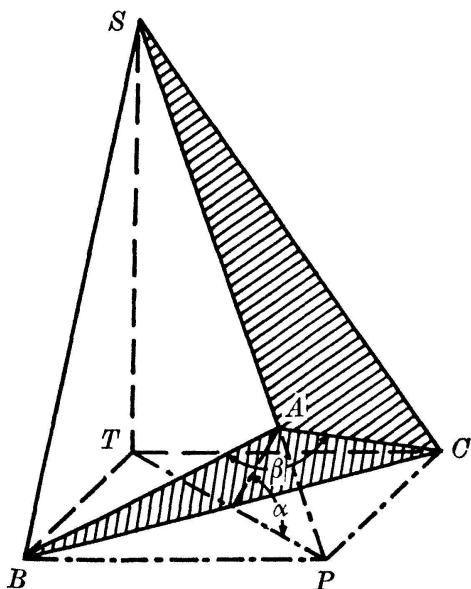


Figure 2

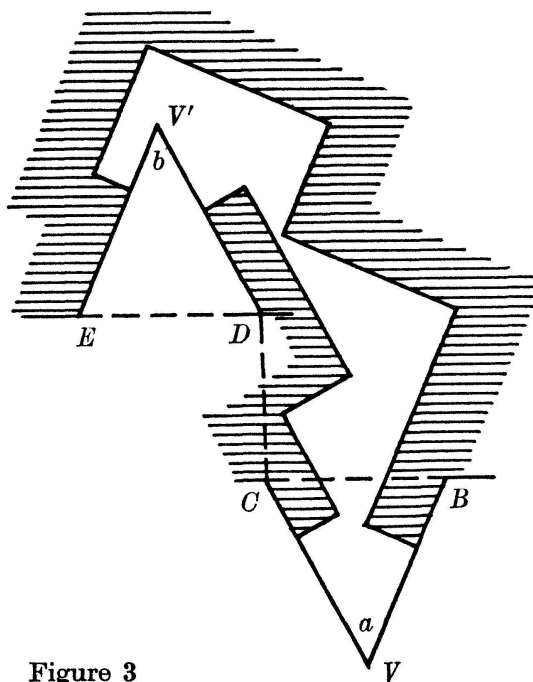


Figure 3

$EAB$  et retranchons-en un autre le long de  $ED$ , l'arête correspondante de  $SA$  étant  $V'W'$ . Pour que la construction soit possible, il faudra peut-être ajouter ou enlever des prismes au polyèdre considéré.

Nous obtenons ainsi un nouveau polyèdre équivalent à un cube et dont tous les dièdres sont droits, sauf les dièdres le long de  $VW$  et  $V'W'$ , lesquels sont égaux à  $\beta$  et  $2\pi - \beta$ , les faces étant parallèles et les arêtes comprises entre deux plans parallèles. On peut dès lors enlever du polyèdre un prisme vertical ayant un dièdre  $2\pi - \beta$  le long de  $V'W'$ , un dièdre  $\beta$  le long de  $VW$ , les autres étant droits (figure 3). Le polyèdre restant est alors le polyèdre cherché.

1.2. En ajoutant un tel polyèdre le long des arêtes de dièdres  $\frac{\pi}{4}$ , on peut transformer un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de  $\frac{\pi}{4}$  en un polyèdre équivalent dont tous les dièdres sont droits. Par conséquent, d'après un théorème que nous avons déjà établi (cf. introduction 0.3.):

*Si un polyèdre vérifie les conditions de DEHN, il est équivalent à un polyèdre dont tous les dièdres sont droits.*

## Chapitre 2. Décomposition des polyèdres à dièdres droits

2.1. Rappelons tout d'abord la définition des deux polyèdres qui nous serviront d'éléments de base dans toutes nos considérations:

$A(\alpha, \beta; \gamma)$ : Polyèdre  $ABCD$  tel que:  $AB$  est perpendiculaire à  $BCD$ ;  $DC$  est perpendiculaire à  $CBA$ ; dièdre  $AB = \alpha$ ; dièdre  $CD = \beta$ ; dièdre  $AD = \gamma$ ;  $\overline{AB} = \cotg \alpha$ ;  $\overline{CD} = \cotg \beta$ ;  $\overline{AD} = \tg \gamma$ ;  $\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta$ . Nous dirons que  $\alpha$  et  $\beta$  sont les dièdres latéraux de  $A(\alpha, \beta; \gamma)$ ,  $\gamma$  étant le dièdre diagonal.

$B(\alpha; \beta; \gamma)$ : Polyèdre  $SABC$  tel que:  $SA$ ,  $SB$  et  $SC$  sont deux à deux perpendiculaires; dièdre  $BC = \alpha$ , dièdre  $CA = \beta$ , dièdre  $AB = \gamma$ ;  $\overline{BC} = \cos \alpha \cdot \sin \alpha$ ;  $\overline{CA} = \cos \beta \cdot \sin \beta$ ;  $\overline{AB} = \cos \gamma \cdot \sin \gamma$ .  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

2.2. Afin d'établir une décomposition particulière des polyèdres dont tous les dièdres sont droits, indiquons quelques propriétés des polyèdres  $A$ . Les démonstrations étant élémentaires, nous nous bornerons à renvoyer aux figures dont elles découlent. Pour simplifier les notations, nous désignerons par  $\Sigma \nu \cdot A$  (compl.) une somme de polyèdres  $A$  dont les dièdres sont égaux à des angles  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  ou à leurs complémentaires  $\frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n$ .

2.2.1. Si  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \pi$ ,  $0 < \xi_i < \frac{\pi}{2}$ , il existe des angles  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que

$$\cotg \xi_1 A\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta; \xi_1\right) + \cotg \xi_2 A\left(\beta, \frac{\pi}{2} - \gamma; \xi_2\right) + \cotg \xi_3 A\left(\gamma, \frac{\pi}{2} - \alpha; \xi_3\right) \sim 0 \quad (\text{figure 4}).$$

2.2.2. Si  $\eta'_1 + \eta'_2 + \eta'_3 = \pi$ ,  $0 < \eta'_i < \frac{\pi}{2}$ , il existe des angles  $\alpha, \dots$ , tels que

$$\begin{aligned} & \text{tg } \eta'_1 A(\eta'_1, \alpha; \gamma) + \text{tg } \eta'_2 A\left(\eta'_2, \beta; \frac{\pi}{2} - \gamma\right) + \cotg \eta'_3 A(\delta_1, \delta_2; \eta'_3) - \\ & - \cotg \eta'_3 A(\delta_1, \alpha; \beta) - \cotg \eta'_3 A(\delta_2, \beta; \alpha) \sim 0 \quad (\text{figure 5}). \end{aligned}$$

Appliquons à chaque terme des relations 1) et 2) la transformation

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta; \gamma) \sim & A\left(\alpha, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}\right) + A\left(\beta, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\beta}\right) - A\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, \kappa; \frac{\pi}{2} - \gamma^*\right) - \\ & - A(\gamma^*, \kappa; \bar{\gamma}) + A(\bar{\alpha}, \bar{\beta}; \bar{\gamma}). \end{aligned}$$

On trouve alors les propriétés suivantes:

2.2.3. Si  $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \zeta_i < \frac{\pi}{2}$ , il existe des angles  $\varphi_i, \psi_i$ , tels que

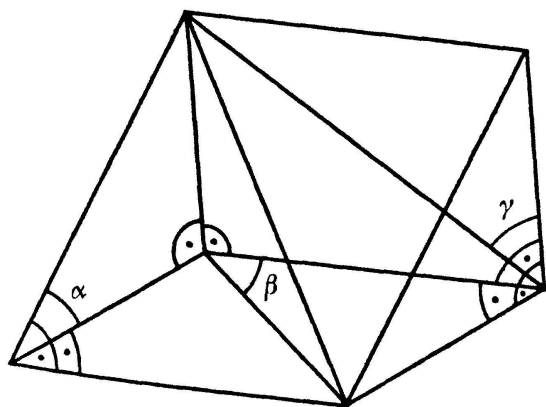
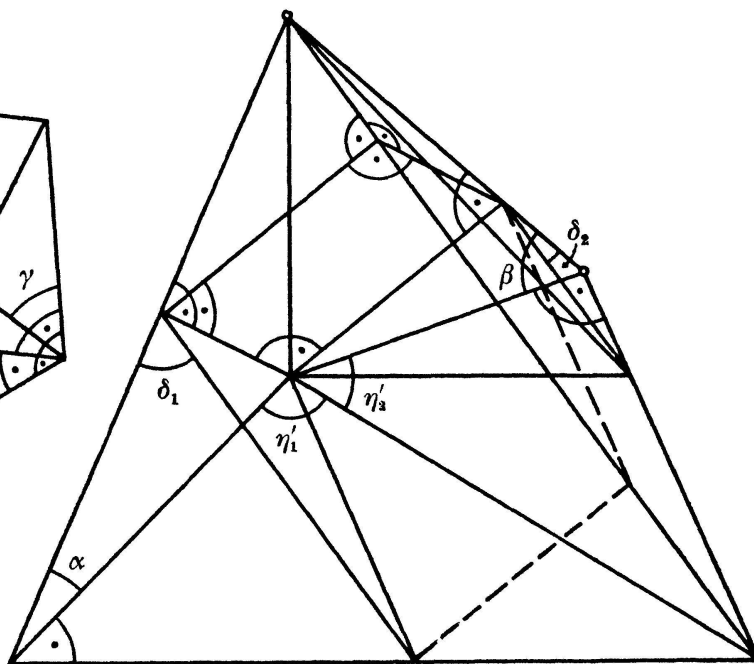
$$\text{tg } \zeta_1 A(\zeta_1, \varphi_1; \psi_1) + \text{tg } \zeta_2 A(\zeta_2, \varphi_2; \psi_2) + \text{tg } \zeta_3 A(\zeta_3, \varphi_3; \psi_3) \sim \Sigma \nu A \quad (\text{compl}).$$


Figure 4

Figure 5





2.2.4. Si  $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \eta_i < \frac{\pi}{2}$ , il existe des angles  $\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i, \dots$ , tels que

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \eta_1 A(\eta_1, \bar{\varphi}_1; \bar{\psi}_1) + \operatorname{tg} \eta_2 A(\eta_2, \bar{\varphi}_2; \bar{\psi}_2) - \\ & - \operatorname{tg} \eta_3 A(\eta_3, \bar{\varphi}_3; \bar{\psi}_3) \sim \Sigma \nu A \text{ (compl.)}. \end{aligned}$$

2.2.5. Ces propriétés peuvent s'étendre. Par exemple,

$$\text{si } \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 = \frac{3\pi}{2}, \quad 0 < \zeta_i < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \zeta_1 + \zeta_2 < \pi,$$

$$\frac{\pi}{2} < \zeta_4 + \zeta_5 < \pi, \text{ on introduit les angles } \delta_3 \text{ et } \delta'_3, \quad 0 < \delta_3, \delta'_3 < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{tels que } \zeta_1 + \zeta_2 + \delta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_4 + \zeta_5 + \delta'_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_3 + \delta_3 + \delta'_3 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Alors } \Sigma \operatorname{tg} \zeta_i A(\zeta_i, \varphi_i; \psi_i) \sim \Sigma \nu A \text{ (compl.)}.$$

Il en va de même dans les cas semblables.

2.3. Considérons un polyèdre  $Q$  dont tous les dièdres sont droits et menons par chaque sommet de  $Q$  un plan parallèle à un plan donné quelconque. Le polyèdre  $Q$  est ainsi décomposé en polyèdres partiels ayant deux bases parallèles, les faces latérales étant successivement perpendiculaires l'une à l'autre. On vérifiera aisément que, si un tel polyèdre a quatre faces latérales, il se laisse décomposer en prismes. Supposons qu'un de ces polyèdres ait au moins 6 faces latérales  $f_1, f_2, \dots, f_6, \dots$ . Coupons-le par un plan perpendiculaire à  $f_1$  et  $f_4$ . Le polyèdre  $f_1, \dots, f_6, \dots$  est équivalent aux polyèdres  $f'f_1f_2f_3f_4$  et  $f_1f'f_4f_5f_6 \dots$ , ce dernier polyèdre ayant une face de moins que le polyèdre initial. Par conséquent, tous les polyèdres de section se décomposeront en polyèdres du même genre, ayant trois ou cinq faces latérales successivement perpendiculaires.

2.4. Considérons dès lors un polyèdre de section  $P$  à 5 faces latérales et soit  $AB$  une de ses arêtes latérales. Soient  $C, D$  et  $E$  les projections de  $A$  sur la deuxième base et sur les traces des faces dans cette base. Désignons par  $P_1$  le polyèdre  $ABCDE$ . Soient encore  $\varepsilon_1$  l'angle  $DBE$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les dièdres le long de  $DB$  et  $EB$  (figure 6). Si  $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_5$  désignent les angles analogues des autres traces  $\left(0 < \varepsilon_i < \frac{\pi}{2}\right)$ , on voit facilement qu'on a seulement les possibilités

- 1)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = \pi$  et  $P \sim P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$
- 2)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_5 = \pi$  et  $P \sim P_1 + P_2 + P_3 + P_4 - P_5$
- 3)  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 = \pi$  et  $P \sim P_1 + P_2 + P_3 - P_4 - P_5$ .

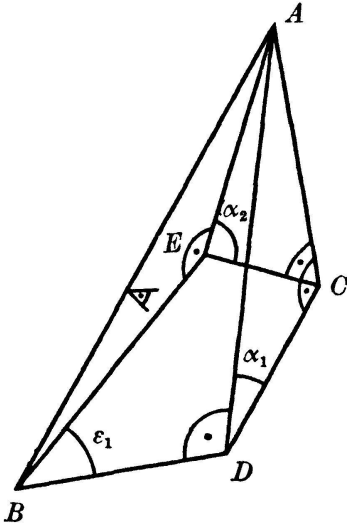


Figure 6

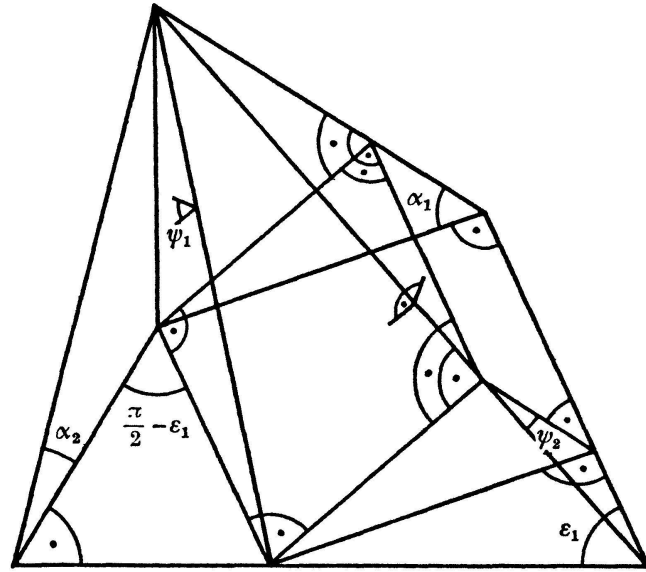


Figure 7

1) Comme  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{\pi}{2}$  et  $\varepsilon_4 + \varepsilon_5 < \frac{\pi}{2}$ , il existe des angles  $\delta_3$  et  $\delta'_3$ ,  $0 < \delta_3, \delta'_3 < \frac{\pi}{2}$  tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) - \delta_3 &= \frac{\pi}{2}; & \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_5\right) - \delta'_3 &= \frac{\pi}{2}; \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_3\right) + \delta_3 + \delta'_3 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2) On peut distinguer deux cas

2.1)  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \pi$  et  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon_3 + \varepsilon_4 < \pi$

2.2)  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \pi$  et  $0 < \varepsilon_3 + \varepsilon_4 < \frac{\pi}{2}$ .

2.1) Il existe  $\gamma_5$  et  $\gamma'_5$ ,  $0 < \gamma_5, \gamma'_5 < \frac{\pi}{2}$  tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) + \gamma_5 &= \frac{\pi}{2}; & \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_3\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4\right) + \gamma'_5 &= \frac{\pi}{2}; \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_5\right) + \gamma_5 + \gamma'_5 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2.2) Il existe  $\varphi_5$  et  $\varphi'_5$ ,  $0 < \varphi_5, \varphi'_5 < \frac{\pi}{2}$  tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) + \varphi_5 &= \frac{\pi}{2}; & \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_3\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4\right) - \varphi'_5 &= \frac{\pi}{2}; \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_5\right) + \varphi_5 - \varphi'_5 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3) On a  $\frac{\pi}{2} < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \pi$  et  $0 < \varepsilon_4 + \varepsilon_5 < \frac{\pi}{2}$ .

Il existe  $\zeta_3$  et  $\zeta'_3$ ,  $0 < \zeta_3, \zeta'_3 < \frac{\pi}{2}$  tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) + \zeta_3 &= \frac{\pi}{2}; \quad \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_5\right) - \zeta'_3 = \frac{\pi}{2}; \\ \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_3\right) + \zeta_3 + \zeta'_3 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme on sait, on peut décomposer le polyèdre  $ABCDE$  de telle sorte que l'on a :

$$P_1 \sim \mu_1 \left[ A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1, \alpha_2; \psi_1\right) + A(\psi_2, \alpha_1; \alpha_2) - A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \psi_2; \psi_1\right) \right]$$

et des relations analogues pour les  $P_i$  (figure 7).

Par conséquent, le polyèdre  $P \sim P_1 + P_2 + P_3 \pm P_4 \pm P_5$  se laisse décomposer en polyèdres  $A$ , dont tous les dièdres sont égaux ou complémentaires, ou égaux à des dièdres  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$  liés par les relations 1, 2 ou 3. D'après la propriété démontrée plus haut, on peut, en soustrayant de  $P$  les polyèdres correspondants, éliminer ces dièdres  $\varepsilon$ . On introduit par là seulement d'autres dièdres deux à deux complémentaires. Les mêmes raisonnements s'appliquent aux polyèdres de section qui ont trois faces latérales et on peut donc énoncer le théorème suivant :

*Un polyèdre dont tous les dièdres sont droits se laisse décomposer en polyèdres  $A$  dont tous les dièdres sont égaux à  $n$  angles  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  ou aux angles complémentaires  $\frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n$ , les conditions de  $DEHN$  étant vérifiées par chacun des  $\gamma_i$ .*

2.5. On a donc

$$P \sim \Sigma \nu'_i A(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}; \beta_i), \quad \beta_j = \left\{ \gamma_1, \dots, \gamma_n, \frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n \right\}.$$

D'après une transformation plusieurs fois employée

$$\begin{aligned} P &\sim \Sigma \nu'_i \left[ A\left(\beta_{i_1}, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\beta}_{i_1}\right) + A\left(\beta_{i_2}, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\beta}_{i_2}\right) - A\left(\frac{\pi}{2} - \beta_i, \kappa; \frac{\pi}{2} - \beta_i^*\right) - \right. \\ &\quad \left. - A(\beta_i^*, \kappa; \beta_i^{**}) + A(\bar{\beta}_{i_1}, \bar{\beta}_{i_2}; \beta_i^{**}) \right] \\ &\sim \sum_{j=1}^n \mu_j A\left(\gamma_j, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_j\right) + \sum_{j=1}^n \mu_j^* A\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_j, \kappa; \frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_{n+j}\right) + \\ &\quad + \Sigma \nu_i [A(\bar{\gamma}_{i_1}, \bar{\gamma}_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\bar{\gamma}_{i_2}, \kappa; \varepsilon_i)]. \end{aligned}$$

Comme les conditions de DEHN sont vérifiées par les  $\gamma_j$ , on a

$$\mu_j \cotg \gamma_j - \mu_j^* \tg \gamma_j = 0$$

et par conséquent

$$P \sim \Sigma \mu'_j B \left( \frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_j; \frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_{n+j}; \kappa \right) + \Sigma \nu_i [A(\bar{\gamma}_{i_1}, \bar{\gamma}_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\bar{\gamma}_{i_3}, \kappa; \varepsilon_i)].$$

Un polyèdre dont tous les dièdres sont droits est équivalent à une somme de polyèdres  $B$  n'ayant que des dièdres  $\frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \bar{\gamma}_{2k}$  et un dièdre  $\kappa$ , et une somme de polyèdres  $A$  dont les dièdres sont égaux à  $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_{2k}$  ou à  $\kappa$ , les dièdres diagonaux  $\varepsilon_i$  ayant deux à deux même grandeur et même longueur.

**2.6.** Ajoutons ici une considération que nous emploierons plus tard.

Soient  $D_i \sim [A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\alpha_{i_3}, \varphi; \varepsilon_i)]$ ,  $i = 1, \dots, t$ ,  $t$  polyèdres de dièdres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , pour lesquels  $\alpha_i < \varphi$ . Ces dièdres sont liés par les relations

$$\sin \alpha_{i_1} \cdot \sin \alpha_{i_2} = \sin \alpha_{i_3} \cdot \sin \varphi$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sin \alpha_{i_1}}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \alpha_{i_2}}{\sin \varphi} \cdot \left( \frac{\sin \alpha_{i_3}}{\sin \varphi} \right)^{-1} = 1.$$

Désignons par  $\delta_j^i (= 1, -1, 0)$  l'exposant avec lequel le facteur  $\left( \frac{\sin \alpha_i}{\sin \varphi} \right)$  intervient dans le polyèdre  $D_j$ . On a donc

$$\prod_{i=1}^n \left( \frac{\sin \alpha_i}{\sin \varphi} \right)^{\delta_j^i} = 1, j = 1, \dots, t, \text{ c'est-à-dire } \sum_{i=1}^n \delta_j^i \ln \frac{\sin \alpha_i}{\sin \varphi} = 0, j = 1, \dots, t$$

ou encore, en posant

$$x_i = \ln \frac{\sin \alpha_i}{\sin \varphi} : \sum_{i=1}^n \delta_j^i x_i = 0, j = 1, \dots, t.$$

Comme  $\sin \varphi > \sin \alpha_i$  et puisque les polyèdres  $D_i$  existent, ce système de relations admet au moins une solution pour laquelle tous les  $x_i$  sont négatifs. S'il existe  $T$  solutions particulières entières  $(-R_1^t, \dots, -R_n^t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ , on peut, à cause de l'existence d'une solution purement négative, trouver ces  $T$  solutions de telle sorte que tous les  $R_i^j$  soient positifs. La solution générale aura donc la forme

$$x_i = - \sum_{t=1}^T \tau_t R_i^t, i = 1, \dots, n.$$

Comme  $R_i^{n_1} - k R_i^{n_2}$  est aussi une solution, on peut choisir les  $T$  solutions particulières de telle sorte que tous les  $\tau_t$  soient positifs et  $> 1$  et l'on aura, pour les polyèdres donnés  $D_1, \dots, D_t$ :

$$x_i = \sum_{t=1}^T (-\tau_t) R_i^t, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\sin \alpha_i}{\sin \varphi} = \prod_{t=1}^T (e^{-\tau_t})^{R_i^t}.$$

En posant enfin  $e^{-\tau_t} = \sin \beta_t$ , on aura

$$\sin \alpha_i = \sin \varphi \cdot \prod_{t=1}^T (\sin \beta_t)^{R_i^t}, \quad i = 1, \dots, n; \quad R_i^t = \text{entier positif.}$$

Notons que, les dièdres  $\alpha_i$  étant tous différents, on peut aussi supposer que les  $R_i^t$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont tous différents.

### Chapitre 3. Théorème SA

**3.1.** Nous avons établi dans un précédent article [8] les relations suivantes :

$$(a) \quad A(\alpha, \beta; \varepsilon_1) - A(\beta, \gamma; \varepsilon_2) + A(\gamma, \delta; \varepsilon_3) - A(\delta, \alpha; \varepsilon_4) \sim \\ \sim A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2, \frac{\pi}{2} - \varepsilon_4; \omega\right) - A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1, \frac{\pi}{2} - \varepsilon_3; \omega\right)$$

$$(b) \quad A(\alpha, \beta; \varepsilon_1) - A(\beta, \gamma; \varepsilon_2) + A(\gamma, \delta; \varepsilon_3) - A(\delta, \alpha; \varepsilon_4) \sim \\ \sim A(\alpha', \beta'; \varepsilon_1) - A(\beta', \gamma'; \varepsilon_2) + A(\gamma', \delta'; \varepsilon_3) - A(\delta', \alpha'; \varepsilon_4).$$

Nous nous proposons de les généraliser pour arriver au théorème fondamental SA qui exprime une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence à un cube de certains polyèdres constitués par des polyèdres  $A$ .

**3.2.** Considérons le polyèdre

$$P \sim A(\alpha_1, \alpha_2; \varepsilon_1) - A(\alpha_2, \alpha_3; \varepsilon_2) + \dots + A(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}; \varepsilon_{2k-1}) - A(\alpha_{2k}, \alpha_1; \varepsilon_{2k}).$$

Il existe un angle  $\varepsilon'_{2k-2}$  tel que  $\cos \varepsilon'_{2k-2} = \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_{2k-2}$  et par conséquent

$$P \sim [A(\alpha_1, \alpha_2; \varepsilon_1) - A(\alpha_2, \alpha_3; \varepsilon_2) + \dots + A(\alpha_{2k-3}, \alpha_{2k-2}; \varepsilon_{2k-3}) - A(\alpha_{2k-2}, \alpha_1; \varepsilon'_{2k-2})] + \\ + [A(\alpha_1, \alpha_{2k-2}; \varepsilon'_{2k-2}) - A(\alpha_{2k-2}, \alpha_{2k-1}; \varepsilon_{2k-2}) + A(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}; \varepsilon_{2k-1}) - A(\alpha_{2k}, \alpha_1; \varepsilon_{2k})].$$

Le polyèdre de la seconde parenthèse est indépendant de  $\alpha_1$  en vertu de la relation (b) et, par récurrence, il en sera de même pour  $P$ , le polyèdre de la première parenthèse étant d'un rang moins élevé. Par conséquent

$$\begin{aligned} & A(\alpha_1, \alpha_2; \varepsilon_1) - A(\alpha_2, \alpha_3; \varepsilon_2) + \dots + A(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k}; \varepsilon_{2k-1}) - A(\alpha_{2k}, \alpha_1; \varepsilon_{2k}) \sim \\ & \sim A(\alpha'_1, \alpha'_2; \varepsilon_1) - A(\alpha'_2, \alpha'_3; \varepsilon_2) + \dots + A(\alpha'_{2k-1}, \alpha'_{2k}; \varepsilon_{2k-1}) - A(\alpha'_{2k}, \alpha'_1; \varepsilon_{2k}) \sim \\ & \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \end{aligned}$$

cette notation étant justifiée, puisque les  $\alpha_i$  ne jouent plus de rôle. Nous pouvons écrire également

$$\begin{aligned} SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k-3}, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2k-2}, \varepsilon_{2k}} \right) & \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k-3}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2k-4}, \varepsilon'_{2k-2}} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_{2k-2}, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_{2k-2}, \varepsilon_{2k}} \right) \\ \text{et } SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3}{\varepsilon_2, \varepsilon_4} \right) & \sim A \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2, \frac{\pi}{2} - \varepsilon_4; \omega \right) - A \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1, \frac{\pi}{2} - \varepsilon_3; \omega \right). \end{aligned}$$

On peut donc décomposer tout  $SA$  en couples de polyèdres  $A$ . On aura de même

$$SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2s-1}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2s-2}, \varepsilon'_{2s}} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_{2s}, \varepsilon_{2s+1}, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_{2s}, \varepsilon_{2s+2}, \dots, \varepsilon_{2k}} \right).$$

D'après la définition de  $SA$ , on voit que

$$3.3. \quad SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim - SA \left( \frac{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k}}{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-1}} \right).$$

$$3.4. \quad SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_3, \varepsilon_5, \dots, \varepsilon_{2k-1}, \varepsilon_1}{\varepsilon_4, \varepsilon_6, \dots, \varepsilon_{2k}, \varepsilon_2} \right).$$

$$3.5. \quad SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3}{\varepsilon_2, \varepsilon_4} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_3, \varepsilon_1}{\varepsilon_2, \varepsilon_4} \right).$$

$$\begin{aligned} 3.6. \quad & SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_{2k-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \dots}{\varepsilon_{2k}, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots} \right) \sim \\ & \sim SA \left( \frac{\varepsilon_{2k-1}, \varepsilon_1}{\varepsilon_{2k}, \varepsilon'_2} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_2, \varepsilon_3, \dots}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_{2k}, \varepsilon'_2} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_2, \varepsilon_3, \dots}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots} \right) \sim \\ & \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \varepsilon_{2k-1}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-3}}{\varepsilon_{2k}, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k-2}} \right) \sim SA \left( \frac{\varepsilon_{2k-1}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2k-3}, \varepsilon_1}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2k-2}, \varepsilon_{2k}} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.7. \quad & SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2t-3}, \varepsilon_{2t-1}, \varepsilon_{2t+1}, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2t-2}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t+2}, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim \\
& \sim SA \left( \frac{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2t-3}, \varepsilon_{2t-1}}{\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2t-2}, \varepsilon'_{2t}} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_{2t}, \varepsilon_{2t+1}, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t+2}, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim \\
& \sim SA \left( \frac{\varepsilon_{2t-1}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2t-3}, \varepsilon_1}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2t-2}, \varepsilon'_{2t}} \right) + SA \left( \frac{\varepsilon'_{2t}, \varepsilon_{2t+1}, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t+2}, \dots, \varepsilon_{2k}} \right) \sim \\
& \sim SA \left( \frac{\varepsilon_{2t-1}, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2t-3}, \varepsilon_1, \varepsilon_{2t+1}, \dots, \varepsilon_{2k-1}}{\varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots, \varepsilon_{2t-2}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2t+2}, \dots, \varepsilon_{2k}} \right).
\end{aligned}$$

Théorème: Si, dans un polyèdre  $SA$ , on permute deux angles  $\varepsilon_{2s}$  et  $\varepsilon_{2t}$  ou deux angles  $\varepsilon_{2s-1}$  et  $\varepsilon_{2t-1}$ , on obtient un polyèdre équivalent au premier.

Et par conséquent, en répétant les permutations:

$$3.8. \quad \underline{SA \left( \frac{\alpha_1, \dots, \alpha_r}{\beta_1, \dots, \beta_r} \right) \sim SA \left( \frac{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}}{\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}} \right)}.$$

Certains des angles  $\alpha_i$  peuvent être égaux entre eux. On pourra donc écrire

$$SA \left( \frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta_1, \dots, \beta_n} \right) \sim SA \left( \frac{\alpha_{i_1}^{m_1}, \dots, \alpha_{i_r}^{m_r}}{\beta_{j_1}^{n_1}, \dots, \beta_{j_s}^{n_s}} \right), \quad \sum_{i=1}^r m_i = \sum_{j=1}^s n_j, \quad m_i, n_j \geq 0,$$

les  $\alpha_i$  et les  $\beta_i$  étant tous différents.

Remarquons que, si  $m_i = n_j = 0$ ,  $SA \left( \frac{\alpha_i^0}{\beta_i^0} \right) \sim 0$ .

3.9. Considérons dès lors un polyèdre  $SA \left( \frac{\alpha_{i_1}^{m_1}, \dots, \alpha_{i_r}^{m_r}}{\beta_{j_1}^{n_1}, \dots, \beta_{j_s}^{n_s}} \right)$  remplissant toutes les conditions de DEHN pour l'équivalence à un cube, pour tous les angles  $\alpha_i$  et  $\beta_j$ . Ces conditions se ramènent à

$$m_i \operatorname{tg} \alpha_i = n_j \operatorname{tg} \beta_j = 0. \quad \text{Donc} \quad m_i = n_j = 0.$$

Donc tout  $SA \left( \frac{\alpha_1, \dots, \alpha_r}{\beta_1, \dots, \beta_r} \right)$  qui remplit les conditions de DEHN est équivalent à un cube.

Considérons un polyèdre

$$P \sim \sum R_i A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \beta_i), \quad R_i \text{ entier}, \quad \alpha_i = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}.$$

Si  $P$  vérifie les conditions de DEHN pour  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , alors

$$P \sim \Sigma SA(\beta).$$

Si, de plus,  $\{\beta_i\} = \left\{ \frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n \right\}$ , on a, en remarquant que

$$\begin{aligned} A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \beta_i) &\sim A\left(\alpha_{i_1}, \xi; \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_{i_1}\right) + A\left(\alpha_{i_2}, \xi; \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}_{i_2}\right) - \\ &- A\left(\frac{\pi}{2} - \beta_i, \xi; \frac{\pi}{2} - \beta_i^*\right) - A(\beta_i^*, \xi; \bar{\beta}_i) + A(\bar{\alpha}_{i_1}, \bar{\alpha}_{i_2}; \bar{\beta}_i), \\ P &\sim \Sigma R_i \{A(\bar{\alpha}_{i_1}, \bar{\alpha}_{i_2}; \bar{\beta}_i) - A(\beta_i^*, \xi; \bar{\beta}_i)\} \sim \Sigma SA(\bar{\gamma}_i) \sim 0. \end{aligned}$$

**3.10.** Soit maintenant un polyèdre  $P \sim \Sigma \nu_i A_i(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}; \psi_i)$  tel que les angles  $\varphi_i$  et les angles  $\frac{\pi}{2} - \psi_i$  soient égaux à des angles  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$  linéairement indépendants. Supposons encore que  $P$  vérifie les conditions de DEHN pour l'équivalence à un cube. Ces conditions s'exprimeront par

$$\sum_{i=1}^N \nu_i \delta_j^i \cotg \gamma_j = 0, \quad j = 1, \dots, t,$$

où  $\delta_j^i = 1$  si  $\varphi_{i_1} = \gamma_j$  ou  $\varphi_{i_2} = \gamma_j$ ;  $\delta_j^i = -1$  si  $\psi_i = \frac{\pi}{2} - \gamma_j$ ;  $\delta_j^i = 0$

dans les autres cas.

Le système  $\sum_{i=1}^N \nu_i \delta_j^i = 0, j = 1, \dots, t$  a au moins une solution.

Les coefficients  $\delta_j^i$  étant rationnels, il existe  $N_0$  solutions particulières rationnelles  $\{\nu_1^h, \dots, \nu_N^h\}, h = 1, \dots, N_0$ , où nous pouvons supposer les  $\nu_i^h$  entiers. La solution générale aura donc la forme

$$\nu_i = \sum_{h=1}^{N_0} \mu_h \nu_i^h, \quad i = 1, \dots, N.$$

Par conséquent

$$P \sim \sum_{h=1}^{N_0} \mu_h \left\{ \sum_{i=1}^N \nu_i^h A_i(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}; \psi_i) \right\}.$$

Si l'on remarque que les  $\nu_i^h$  sont entiers et que le polyèdre

$$P_h \sim \sum \nu_i^h A_i(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}; \psi_i)$$

vérifie aussi les conditions de DEHN pour l'équivalence à un cube, on voit que

$$P_h \sim \Sigma SA \left( \frac{\gamma_{j_1}, \dots}{\gamma_{j_2}, \dots} \right) \sim \Sigma SA \left( \frac{\gamma_{i_1}^{m_{i1}}, \dots}{\gamma_{i_2}^{m_{i2}}, \dots} \right)$$

et par conséquent  $P_h \sim 0$ , donc aussi  $P \sim \sum \mu_h P_h \sim 0$ .



Nous pouvons énoncer le théorème *SA* :

*Si un polyèdre  $P \sim \Sigma v_i A_i(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}; \psi_i)$  est tel que les angles  $\varphi_i$  et  $\frac{\pi}{2} - \psi_i$  sont égaux à des angles  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$  et si ces dièdres  $\gamma_i$  vérifient les conditions de DEHN pour l'équivalence à un cube, alors le polyèdre  $P$  est effectivement équivalent à un cube.*

**3.11.** Supposons que  $\gamma_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1$ . Comme on le voit en appliquant la transformation habituelle  $A(\alpha, \beta; \gamma) \sim A\left(\alpha, \varrho; \frac{\pi}{2} - \bar{\alpha}\right) + \dots$ , l'équivalence subsiste si les conditions de DEHN sont vérifiées séparément pour  $\gamma_1$  et pour  $\frac{\pi}{2} - \gamma_1$ .

**3.12.** Reprenons les polyèdres  $D_i \sim \{A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\alpha_{i_3}, \varphi; \varepsilon_i)\}$  que nous avons considérés au paragraphe 2.6.

Nous avons établi que

$$\sin \alpha_i = \sin \varphi \prod_{t=1}^T (\sin \beta_t)^{R_{it}}.$$

Introduisons la notation suivante:

$$\begin{aligned} &A(\alpha_1, \alpha_2; \zeta_1) + A\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_1, \alpha_3; \zeta_2\right) + \dots + A\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_{s-1}, \alpha_s; \zeta_s\right) + \dots + \\ &+ A\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_{n-1}, \alpha_n; \zeta_n\right) \sim A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \zeta_n). \end{aligned}$$

Si  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k$ , nous aurons  $A(k \cdot \alpha_1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n; \zeta_n)$ .

Nous aurons en particulier

$$A\left(\varphi, R_{i_1}\beta_1, R_{i_2}\beta_2, \dots, R_{iT}\beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right).$$

En appliquant le théorème *SA*, on voit que

$$\begin{aligned} &A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\alpha_{i_3}, \varphi; \varepsilon_i) + A\left(\varphi, R_{i_1T}\beta_1, \dots, R_{i_1T}\beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_{i_1}\right) + \\ &+ A\left(\varphi, R_{i_2T}\beta_1, \dots, R_{i_2T}\beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_{i_2}\right) - A\left(\varphi, R_{i_3T}\beta_1, \dots, R_{i_3T}\beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_{i_3}\right) \sim 0 \end{aligned}$$

toutes les conditions de DEHN étant remplies puisque par construction

$$R_{i_1, s} + R_{i_2, s} = R_{i_3, s}.$$

**3.13.** Supposons de plus que, comme en 2.5.

$$P \sim \Sigma \mu_j B \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j}; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1}; \varphi \right) + \Sigma \nu_i \{ A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\alpha_{i_3}, \varphi; \varepsilon_i) \}$$

vérifie les conditions de DEHN pour tous les dièdres  $\alpha$ .

Remarquons que

$$B \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j}; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1}; \varphi \right) \sim \sin^2 \alpha_{2j} A \left( \varphi, \gamma_j; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j} \right) + \sin^2 \alpha_{2j-1} A \left( \varphi, \frac{\pi}{2} - \gamma_j; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1} \right).$$

Par conséquent

$$B \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j}; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1}; \varphi \right) \sim \sin^2 \alpha_{2j} \left\{ A \left( \varphi, R_{2j,1} \beta_1, \dots, R_{2j,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j} \right) - A \left( R_{2j,1} \beta_1, \dots, R_{2j,T} \beta_T; \gamma_j \right) \right\} + \sin^2 \alpha_{2j-1} \left\{ A \left( \varphi, R_{2j-1,1} \beta_1, \dots, R_{2j-1,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1} \right) - A \left( R_{2j-1,1} \beta_1, \dots, R_{2j-1,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \gamma_j \right) \right\}.$$

On a dès lors

$$P \sim \Sigma \mu_j B \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j}; \frac{\pi}{2} - \alpha_{2j-1}; \varphi \right) + \Sigma \nu_i \{ A(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}; \varepsilon_i) - A(\alpha_{i_3}, \varphi; \varepsilon_i) \} \\ \sim \Sigma \varrho_i A \left( \varphi, R_{i,1} \beta_1, \dots, R_{i,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i \right) + \Sigma K_j A(R_{2j,1} \beta_1, \dots, R_{2j,T} \beta_T; \gamma_j) + \\ + \Sigma K_j^* A \left( R_{2j-1,1} \beta_1, \dots, R_{2j-1,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \gamma_j \right).$$

Comme les conditions de DEHN sont vérifiées pour  $\alpha_i: \varrho_i = 0$ .

Pour  $\gamma_j: K_j \operatorname{tg} \gamma_j - K_j^* \operatorname{cotg} \gamma_j = 0$ , donc  $K_j = H_j \cos^2 \gamma_j$ ,  $K_j^* = H_j \sin^2 \gamma_j$ .

Pour  $\beta_i$ :

$$\Sigma K_j R_{2j,i} + \Sigma K_j^* R_{2j-1,i} = \Sigma H_j (R_{2j,i} \cos^2 \gamma_j + R_{2j-1,i} \sin^2 \gamma_j) = 0, i = 1, \dots, T.$$

Comme  $\Phi_j = \cos^2 \gamma_j + \sin^2 \gamma_j - 1 = \Pi_s (\sin^2 \beta_s)^{R_{2j,s}} + \Pi_s (\sin^2 \beta_s)^{R_{2j-1,s}} - 1 = 0$ ,

$$R_{2j,i} \cos^2 \gamma_j + R_{2j-1,i} \sin^2 \gamma_j = \frac{1}{\sin^2 \beta_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial [\sin^2 \beta_i]}.$$

Nous pouvons donc condenser les résultats précédents dans l'énoncé suivant :  
*Un polyèdre dont tous les dièdres sont droits est équivalent à un polyèdre*

$$P \sim \Sigma H_j \left\{ \cos^2 \gamma_j A(R_{2j,1} \beta_1, \dots, R_{2j,T} \beta_T; \gamma_j) + \right. \\ \left. + \sin^2 \gamma_j A \left( R_{2j-1,1} \beta_1, \dots, R_{2j-1,T} \beta_T; \frac{\pi}{2} - \gamma_j \right) \right\}$$

qui remplit les conditions suivantes :

$$\Phi_j = \prod_{s=1}^T (\sin^2 \beta_s)^{R_{2j,s}} + \prod_{s=1}^T (\sin^2 \beta_s)^{R_{2j-1,s}} - 1 = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^N H_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial (\sin^2 \beta_s)} = 0, \quad s = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Si  $N > T$ , les conditions (2) sont toujours remplies, car il existe alors des valeurs  $H$  ; par contre, les conditions (1) ne sont pas triviales, car elles demandent que  $N$  hypersurfaces de l'espace à  $T$  dimensions passent par un même point. Lorsque  $N \leq T$ , ce sont les conditions (1) qui admettent toujours une solution, alors qu'il n'existe pas nécessairement des valeurs  $H$  qui vérifient (2). On pourrait se demander quand le système des relations 1 et 2 admet une solution et quels sont alors les nombres entiers  $R$  qui entrent en ligne de compte. Montrons qu'un système au moins existe, à savoir

$$\Phi_1 = (\sin^2 \beta_1)^5 + (\sin^2 \beta_1) - 1 = 0$$

et

$$\Phi_2 = (\sin^2 \beta_1)^3 + (\sin^2 \beta_1)^2 - 1 = 0.$$

Les polyèdres  $P$  ne sont donc pas obligatoirement équivalents à un cube puisque certains systèmes (1) + (2) admettent des solutions non identiquement nulles.

#### Chapitre 4. Théorème *SB*

Établissons maintenant le théorème *SB* qui montre que les conditions de *DEHN* sont nécessaires et suffisantes dans le cas d'un polyèdre uniquement constitué de polyèdres  $B$ . Nous trouverons aussi pour les polyèdres  $B$  des propriétés assez semblables à celles des polyèdres  $A$ .

4.1. Montrons tout d'abord que

$$B(\alpha; \varepsilon; \beta) - B(\beta; \varphi; \gamma) + B\left(\gamma; \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \delta\right) - B\left(\delta; \frac{\pi}{2} - \varphi; \alpha\right) \sim 0.$$

En effet, en faisant tourner  $B(\alpha; \varepsilon; \beta)$  autour de l'arête  $\alpha$  et  $B(\beta; \varphi; \gamma)$  autour de l'arête  $\varphi$ , on peut obtenir un polyèdre semblable à  $B(\alpha'; \beta'; \gamma')$  et on déduit que

$$\begin{aligned} B(\alpha; \varepsilon; \beta) - B(\beta; \varphi; \gamma) &\sim \cos^2 \varepsilon \left[ A\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta'; \omega_1\right) - A\left(\alpha', \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \omega_1\right) \right] \\ &\quad + \cos^2 \beta \left[ A\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \gamma'; \omega_2\right) - A\left(\alpha', \frac{\pi}{2} - \beta; \omega_2\right) \right] \\ &\quad + \cos^2 \gamma \left[ A\left(\beta', \frac{\pi}{2} - \gamma; \omega_3\right) - A\left(\varphi, \frac{\pi}{2} - \alpha'; \omega_3\right) \right] \\ &\quad + \cos^2 \beta \left[ A\left(\beta', \frac{\pi}{2} - \beta; \omega_4\right) - A\left(\varphi, \frac{\pi}{2} - \gamma'; \omega_4\right) \right]. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} B\left(\gamma; \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \delta\right) - B\left(\delta; \frac{\pi}{2} - \varphi; \alpha\right) &\sim \\ &\sim \cos^2 \gamma \left[ A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \beta^*; \omega_1^*\right) - A\left(\alpha^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \omega_1^*\right) \right] \\ &\quad + \cos^2 \delta \left[ A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} - \gamma^*; \omega_2^*\right) - A\left(\alpha^*, \frac{\pi}{2} - \delta; \omega_2^*\right) \right] \\ &\quad + \sin^2 \varphi \left[ A\left(\beta^*, \varphi; \omega_3^*\right) - A\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha^*; \omega_3^*\right) \right] \\ &\quad + \cos^2 \delta \left[ A\left(\beta^*, \frac{\pi}{2} - \delta; \omega_4^*\right) - A\left(\alpha, \frac{\pi}{2} - \gamma^*; \omega_4^*\right) \right]. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta' &= \frac{\cos^2 \varepsilon}{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varphi}; \quad \cos^2 \alpha' = \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varphi}; \quad \cos^2 \gamma' = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varphi} \\ \cos^2 \beta^* &= \frac{\cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha^* = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha}; \quad \cos^2 \gamma^* = \frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Or  $\cos^2 \varepsilon + \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \sin^2 \varphi = \sin^2 \alpha + \cos^2 \gamma$ , donc

$$\alpha' = \beta^*; \quad \beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha^*.$$

Calculons les conditions de DEHN pour les différents angles:

$$l(\alpha) = \cos^2 \varepsilon + \cos^2 \beta - \sin^2 \varphi - \cos^2 \delta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi - \cos^2 \delta = 0$$

$$l(\varphi) = -\cos^2 \gamma - \cos^2 \beta + \sin^2 \varphi = 0$$

$$l\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = -\cos^2 \varepsilon + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 0$$

$$l(\alpha') = -\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \beta + \sin^2 \varphi + \cos^2 \delta = 0$$

$$l(\beta') = \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta - \sin^2 \varphi = 0$$

$$l\left(\frac{\pi}{2} - \beta'\right) = \cos^2 \varepsilon - \cos^2 \gamma - \cos^2 \delta = 0.$$

Toutes les conditions de DEHN sont vérifiées, séparément pour  $\beta'$  et  $\frac{\pi}{2} - \beta'$ ; d'après le théorème SA :

$$B(\alpha; \varepsilon; \beta) - B(\beta; \varphi; \gamma) + B\left(\gamma; \frac{\pi}{2} - \varepsilon; \delta\right) - B\left(\delta, \frac{\pi}{2} - \varphi; \alpha\right) \sim 0.$$

Cette propriété peut s'écrire également

$$\begin{aligned} & B\left(\alpha_1; \alpha_2; \frac{\pi}{2} - \beta_1\right) + B(\beta_1; \alpha_3; \alpha_4) \sim \\ & \sim B\left(\alpha_1; \alpha_3; \frac{\pi}{2} - \beta_2\right) + B(\beta_2; \alpha_2; \alpha_4) \sim \\ & \sim B\left(\alpha_1; \alpha_4; \frac{\pi}{2} - \beta_3\right) + B(\beta_3; \alpha_2; \alpha_3). \end{aligned}$$

#### 4.2. Considérons le polyèdre

$$P \sim B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) - B(\alpha_4; \gamma_4; \alpha_1).$$

Comme

$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \gamma_1 = \cos^2 \alpha_4 + \cos^2 \gamma_4 \text{ et } \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \gamma_2 = \cos^2 \alpha_4 + \cos^2 \gamma_3,$$

on a

$$K = \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_4 = \cos^2 \gamma_4 - \cos^2 \gamma_1 = \cos^2 \gamma_3 - \cos^2 \gamma_2.$$

Distinguons deux cas a)  $K = \cos^2 \Omega$  b)  $K = -\cos^2 \omega$ .

a) Il existe alors les polyèdres

$$B\left(\Omega; \frac{\pi}{2} - \alpha_2; \alpha_4\right), B\left(\Omega; \gamma_1; \frac{\pi}{2} - \gamma_4\right), B\left(\Omega; \gamma_2; \frac{\pi}{2} - \gamma_3\right).$$

b) Il existe alors les polyèdres

$$B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \alpha_4; \alpha_2\right), B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \gamma_4\right), B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_2; \gamma_3\right).$$

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & P + B\left(\Omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_3; \gamma_2\right) - B\left(\Omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_4; \gamma_1\right) \sim \\
& \sim B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) + B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_3; \gamma_2; \Omega\right) - \\
& \quad - B(\alpha_4; \alpha_1; \gamma_4) - B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_4; \gamma_1; \Omega\right) \sim \\
& \sim B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_2; \alpha_2) + B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2; \alpha_4; \Omega\right) - \\
& \quad - B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2; \alpha_4; \Omega\right) \sim 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad & P + B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \gamma_4\right) - B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \gamma_2; \gamma_3\right) \sim \\
& \sim B(\alpha_1; \alpha_2; \gamma_1) + B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1; \gamma_4; \omega\right) - B(\alpha_2; \alpha_3; \gamma_2) - B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2; \gamma_3; \omega\right) + \\
& \quad + B(\alpha_3; \alpha_4; \gamma_3) - B(\alpha_4; \alpha_1; \gamma_4) \sim \\
& \sim B(\alpha_1; \gamma_4; \alpha_4) + B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_4; \alpha_2; \omega\right) - B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) - B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_4; \alpha_2; \omega\right) + \\
& \quad + B(\alpha_3; \alpha_4; \gamma_3) - B(\alpha_4; \alpha_1; \gamma_4) \sim 0.
\end{aligned}$$

a) Si  $\cos^2 \gamma_4 - \cos^2 \gamma_1 > 0$ , donc  $\cos^2 \gamma_3 - \cos^2 \gamma_2 > 0$ ,

$$\begin{aligned}
& B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) - B(\alpha_4; \gamma_4; \alpha_1) \sim \\
& \sim B\left(\gamma_1; \frac{\pi}{2} - \gamma_4; \Omega\right) - B\left(\gamma_2; \frac{\pi}{2} - \gamma_3; \Omega\right).
\end{aligned}$$

b) Si  $\cos^2 \gamma_4 - \cos^2 \gamma_1 < 0$ , donc  $\cos^2 \gamma_3 - \cos^2 \gamma_2 < 0$ ,

$$\begin{aligned}
& B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) - B(\alpha_4; \gamma_4; \alpha_1) \sim \\
& \sim B\left(\gamma_3; \frac{\pi}{2} - \gamma_2; \omega\right) - B\left(\gamma_4; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \omega\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + B(\alpha_3; \gamma_3; \alpha_4) - B(\alpha_4; \gamma_4; \alpha_1) \sim \\
& \sim B(\beta_1; \gamma_1; \beta_2) - B(\beta_2; \gamma_2; \beta_3) + B(\beta_3; \gamma_3; \beta_4) - B(\beta_4; \gamma_4; \beta_1).
\end{aligned}$$

On montre sans peine que l'on a aussi

$$\begin{aligned} & B(\alpha_1; \gamma_1; \alpha_2) - B(\alpha_2; \gamma_2; \alpha_3) + \dots - B(\alpha_{2k}; \gamma_{2k}; \alpha_1) \sim \\ & \sim B(\beta_1; \gamma_1; \beta_2) - B(\beta_2; \gamma_2; \beta_3) + \dots - B(\beta_{2k}; \gamma_{2k}; \beta_1). \end{aligned}$$

**4.3.** Pour simplifier, appelons chaînon un polyèdre  $B(\alpha; \beta; \gamma)$ . Deux chaînons peuvent s'additionner ou se soustraire :

$$B(\alpha; \beta; \gamma) + B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma; \delta; \varepsilon\right) \text{ ou } B(\alpha; \beta; \gamma) - B(\gamma; \delta'; \varepsilon').$$

Une suite de chaînons de mêmes signes constitue un segment :

$$\begin{aligned} & B\left(\beta_0; \beta_1; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) + B\left(\varepsilon_1; \beta_2; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_2\right) + \dots + B(\varepsilon_{n-1}; \beta_n; \beta_{n+1}) \sim \\ & \sim B(\beta_0; \beta_1; \dots; \beta_n; \beta_{n+1}). \end{aligned}$$

Une suite de segments de signes différents constitue une chaîne. Une chaîne peut être ouverte ou fermée si  $\beta_0 \neq \beta_{n+1}$  ou si  $\beta_0 = \beta_{n+1}$ .

**4.4.** On peut permuter tous les dièdres  $\beta_1, \dots, \beta_n$  d'un segment sans changer l'équivalence.

$$B(\beta_0; \beta_1; \dots; \beta_n; \beta_{n+1}) \sim B(\beta_0; \beta_{i_1}; \beta_{i_2}; \dots; \beta_{i_n}; \beta_{n+1}).$$

En effet, d'après 4.1,  $B(\beta_0; \beta_1; \beta_2; \beta_3) \sim B(\beta_0; \beta_2; \beta_1; \beta_3)$ . Comme la permutation  $(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_n})$  peut être obtenue par un nombre fini de permutations simples, la propriété est vraie.

**4.5.** On a soit

$$B(\alpha; \beta_1; \gamma) - B(\gamma; \beta_2; \delta) \sim B\left(\frac{\pi}{2} - \gamma; \beta_1; \Omega\right) - B\left(\Omega; \beta_2; \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

soit

$$B(\alpha; \beta_1; \gamma) - B(\gamma; \beta_2; \delta) \sim B\left(\alpha; \frac{\pi}{2} - \beta_2; \omega\right) - B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \beta_1; \gamma\right)$$

puisque l'on a soit

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta_2 = \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta_1 = \cos^2 \Omega$$

soit

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta_2 = \cos^2 \gamma - \cos^2 \beta_1 = -\cos^2 \omega.$$

4.6. Etant donnée une chaîne quelconque, on peut déplacer un chaînon de dièdre  $\beta$  et l'amener en un point quelconque de la chaîne sans changer l'équivalence, le dièdre  $\beta$  conservant sa valeur ou prenant la valeur complémentaire  $\frac{\pi}{2} - \beta$ .

En effet, d'après 4.4., on peut d'abord amener le chaînon de dièdre  $\beta$  à l'extrémité (gauche par exemple) du segment qui le contient. Soit alors  $B(\alpha; \beta; \gamma)$  ce chaînon dans cette position et  $-B(\varepsilon; \delta; \alpha)$  le dernier chaînon du segment précédent.

Si

$$-B(\varepsilon; \delta; \alpha) + B(\alpha; \beta; \gamma) \sim -B\left(\varepsilon; \frac{\pi}{2} - \beta; \omega\right) + B\left(\omega; \frac{\pi}{2} - \delta; \gamma\right)$$

cela signifie que le dièdre  $\beta$  est remplacé par un dièdre  $\frac{\pi}{2} - \beta$  du segment précédent. Le dièdre  $\beta$  a avancé d'un segment vers la gauche.

Si

$$-B(\varepsilon; \delta; \alpha) + B(\alpha; \beta; \gamma) \sim B\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon; \beta; \Omega\right) - B\left(\Omega; \delta; \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

cela signifie qu'un chaînon de segment de gauche a passé à la droite du chaînon de dièdre  $\beta$ . En répétant la construction, on pourra soit faire passer un chaînon après l'autre à la droite du chaînon considéré, soit, si le premier cas se présente, faire avancer le chaînon de tout un segment vers la gauche, ce qui établit la propriété.

4.7. Si une chaîne fermée a ses dièdres égaux à des dièdres  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ,  $\frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n$ , et si chacun des dièdres  $\gamma_i$  vérifie les conditions de DEHN, cette chaîne est équivalente à un cube.

En effet, considérons un chaînon positif  $B(\varepsilon_1; \gamma_1; \varepsilon_2)$ . Pour que  $\gamma_1$  vérifie les conditions de DEHN, il faut qu'il existe soit un chaînon négatif  $-B(\varepsilon_3; \gamma_1; \varepsilon_4)$ , soit un chaînon positif  $+B\left(\varepsilon_5; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \varepsilon_6\right)$ . D'après 4.6., amenons le chaînon  $B(\varepsilon_1; \gamma_1; \varepsilon_2)$  à la droite de ces chaînons. On ne peut avoir que les cas logiques suivants:

a)  $\dots - B(\varepsilon_3; \gamma_1; \varepsilon_4) + B(\varepsilon_4; \gamma_1; \varepsilon_3) + \dots$

b)  $\dots - B(\varepsilon_3; \gamma_1; \varepsilon_4) - B\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_4; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \varepsilon_2'\right) \dots$

c)  $\dots + B\left(\varepsilon_5; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \varepsilon_6\right) - B\left(\varepsilon_6; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \varepsilon_5\right) \dots$

d)  $\dots + B\left(\varepsilon_5; \frac{\pi}{2} - \gamma_1; \varepsilon_6\right) + B\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_6; \gamma_1; \varepsilon_2''\right) \dots$



Les cas b) et d) sont exclus, car on devrait avoir simultanément

$$\cos^2 \varepsilon_3 + \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \varepsilon_4 = 1 \quad \text{et} \quad \cos^2 \varepsilon_2' + \sin^2 \gamma_1 + \sin^2 \varepsilon_4 = 1$$

avec des valeurs réelles pour  $\varepsilon_3$  et  $\varepsilon_2'$ . Par conséquent, seuls les cas a) et c) sont possibles et, dans ces cas, les deux chaînons s'éliminent. En répétant la construction, on trouve bien le résultat voulu.

#### 4.8. Considérons un polyèdre

$$P \sim \sum v_i B_i(\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; \alpha_{i_3})$$

tel que

$$\alpha_i = \left\{ \gamma_1, \dots, \gamma_n; \frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n \right\}$$

chacun des  $\gamma_i$  vérifiant les conditions de DEHN. Soit  $\delta_j^i$  une fonction égale à 1, -1 ou 0 selon que  $B_i$  contient le dièdre  $\gamma_j$ , le dièdre  $\frac{\pi}{2} - \gamma_j$ , ou ne contient ni l'un, ni l'autre. Les conditions de DEHN deviennent

$$\sum_i v_i \delta_j^i \cos \gamma_j \cdot \sin \gamma_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ce système admet  $T$  solutions particulières entières  $v_i^t = R_{t,i}$  et la solution générale est

$$v_i = \sum_{t=1}^T \mu_t R_{t,i}.$$

Dès lors

$$P \sim \sum_{t=1}^T \mu_t \{ \sum R_{t,i} B_i(\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; \alpha_{i_3}) \} \sim \sum \mu_t P_t.$$

$P$  est équivalent à une combinaison linéaire de  $T$  polyèdres à coefficients entiers qui vérifient tous les conditions de DEHN, puisque

$$\sum R_{t,i} \delta_j^i = 0, \quad (j = 1, \dots, h, t = 1, \dots, T).$$

Chacun des polyèdres

$$P_t \sim \sum R_{t,i} B(\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; \alpha_{i_3})$$

est donc équivalent à une somme de chaînes fermées.

**4.9.** Soient  $k$  chaînes fermées et supposons que la somme de ces  $k$  chaînes vérifie toutes les conditions de DEHN. Nous prétendons que cette somme est équivalente à un cube.

En effet, soit  $\varphi_1$  un dièdre de la première chaîne. Pour que  $\varphi_1$  vérifie les conditions de DEHN, il faut que  $\varphi_1$  ou  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$  apparaisse encore une fois. Si  $\varphi_1$  ou  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$  n'apparaît que dans la première chaîne, nous considérerons un deuxième dièdre  $\varphi_2$  de cette même chaîne. Si tous les dièdres de cette chaîne n'apparaissent pas dans les autres, cette chaîne vérifiera les conditions de DEHN pour tous ses dièdres et sera équivalente à un cube, à cause de 4.7.

Nous pouvons donc admettre que  $\varphi_1$  apparaît dans les deux premières chaînes.

a) La première chaîne a un chaînon  $B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2)$  et la deuxième un chaînon  $-B(\beta_1; \varphi_1; \beta_2)$ .

aa) Si  $\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta_1 = \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \alpha_2 = \cos^2 \Omega$ , il existe les polyèdres  $B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1; \Omega; \beta_1\right)$  et  $B\left(\alpha_2; \Omega; \frac{\pi}{2} - \beta_2\right)$  et l'on a

$$B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2) - B(\beta_1; \varphi_1; \beta_2) \sim B\left(\alpha_2; \Omega; \frac{\pi}{2} - \beta_2\right) - B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1; \Omega; \beta_1\right).$$

En remplaçant les deux chaînons  $B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2)$  et  $-B(\beta_1; \varphi_1; \beta_2)$  par les chaînons  $-B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1; \Omega; \beta_1\right)$  et  $B\left(\alpha_2; \Omega; \frac{\pi}{2} - \beta_2\right)$ , on transforme les deux chaînes fermées initiales en une seule chaîne fermée,

$$\dots [\text{chaîne 1}] + B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2) + [\text{chaîne 1}] \dots$$

et

$$\dots [\text{chaîne 2}] - B(\beta_1; \varphi_1; \beta_2) + [\text{chaîne 2}] \dots$$

devenant

$$\begin{aligned} \dots [\text{chaîne 1}] - B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1; \Omega; \beta_1\right) + [\text{chaîne 2}] + \\ + B\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2; \Omega; \alpha_2\right) + [\text{chaîne 1}] \dots \end{aligned}$$

ab) Si  $\cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta_1 = \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \alpha_2 = -\cos^2 \omega$ , il existe les polyèdres  $B\left(\alpha_1; \omega; \frac{\pi}{2} - \beta_1\right)$  et  $B\left(\beta_2; \omega; \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)$  tels que

$$B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2) - B(\beta_1; \varphi_1; \beta_2) \sim B\left(\alpha_1; \omega; \frac{\pi}{2} - \beta_1\right) - B\left(\beta_2; \omega; \frac{\pi}{2} - \alpha_2\right).$$

Un raisonnement semblable permet de souder également les deux premières chaînes.

b) La première chaîne a un chaînon  $B(\alpha_1; \varphi_1; \alpha_2)$  et la deuxième un chaînon  $B\left(\gamma_1; \frac{\pi}{2} - \varphi_1; \gamma_2\right)$ . Comme alors

$$B(\alpha_1; \alpha_2; \varphi_1) + B\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1; \gamma_1; \gamma_2\right) \sim B(\alpha_1; \gamma_1; \psi_1) + B\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1; \gamma_2; \alpha_2\right)$$

on pourra également souder les chaînes.

Par conséquent, si la somme de  $k$  chaînes fermées vérifie les conditions de DEHN, elle est équivalente à  $k'$  chaînes fermées qui vérifient chacune les conditions de DEHN, et qui sont donc équivalentes à un cube. On a donc le théorème SB:

*Si un polyèdre  $P \sim \sum \nu_i B_i(\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; \alpha_{i_3})$  est tel que*

$$\alpha_i = \left\{ \gamma_1, \dots, \gamma_n, \frac{\pi}{2} - \gamma_1, \dots, \frac{\pi}{2} - \gamma_n \right\}$$

*chacun des  $\gamma_i$  vérifiant les conditions de DEHN, alors ce polyèdre  $P$  est équivalent à un cube.*

## Chapitre 5. Relations entre les polyèdres $A$ et $B$ . Théorème SAB

### 5.1. Notation:

$$\begin{aligned} & B(\alpha_1; \alpha_2; \omega_1) + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1; \alpha_3; \omega_2\right) + \dots \\ & \dots + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_{i-1}; \alpha_{i+1}; \omega_i\right) + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_i; \alpha_{i+2}; \omega_{i+1}\right) + \dots \\ & \dots + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_{n-3}; \alpha_{n-1}; \alpha_n\right) \sim B(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_{n-1}; \alpha_n). \end{aligned}$$

En particulier, si

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k, B(\alpha_1; \alpha_1; \dots; \alpha_1; \alpha_{k+1}; \dots; \alpha_n) \sim B(k \cdot \alpha_1; \alpha_{k+1}; \dots; \alpha_n).$$

### 5.2.

$$\begin{aligned} & B(\alpha; \beta; \gamma) + \cos^2 \alpha A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \Theta; \alpha'\right) + \cos^2 \beta A\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \Theta; \beta'\right) - \sin^2 \gamma A(\gamma, \Theta; \gamma'') \sim \\ & \underline{\underline{\sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B\left(\alpha'; \beta'; \frac{\pi}{2} - \gamma''\right)}}. \end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que

$$\cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' - \cos^2 \gamma'' = \sin^2 \Theta (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \gamma) = 0$$

donc  $B\left(\alpha'; \beta'; \frac{\pi}{2} - \gamma''\right)$  existe.

D'autre part, toutes les conditions de DEHN sont vérifiées. Or:

$$B(\alpha; \beta; \gamma) \sim \cos^2 \alpha A(\psi, \gamma; \alpha) + \cos^2 \beta A\left(\frac{\pi}{2} - \psi, \gamma; \beta\right)$$

$$B\left(\alpha'; \beta'; \frac{\pi}{2} - \gamma''\right) \sim \cos^2 \alpha' A\left(\zeta, \frac{\pi}{2} - \gamma''; \alpha'\right) + \cos^2 \beta' A\left(\frac{\pi}{2} - \zeta, \frac{\pi}{2} - \gamma''; \beta'\right).$$

On a

$$\sin \psi \cdot \sin \gamma = \cos \alpha; \quad \sin \zeta \cos \gamma'' = \cos \alpha'; \quad \cos \gamma'' = \sin \gamma \sin \Theta,$$

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \cdot \sin \Theta, \quad \sin \zeta \sin \gamma \sin \Theta = \cos \alpha \cdot \sin \Theta,$$

donc

$$\sin \zeta = \sin \psi.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha A(\psi, \gamma; \alpha) + \cos^2 \beta A\left(\frac{\pi}{2} - \psi, \gamma; \beta\right) + \cos^2 \alpha' A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \Theta; \alpha'\right) + \\ & + \cos^2 \beta' A\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \Theta; \beta'\right) - \cos^2 \gamma A(\gamma, \Theta; \gamma'') - \cos^2 \alpha' A\left(\psi, \frac{\pi}{2} - \gamma''; \alpha'\right) - \\ & - \cos^2 \beta' A\left(\frac{\pi}{2} - \psi, \frac{\pi}{2} - \gamma''; \beta'\right) \sim 0. \end{aligned}$$

L'équivalence a lieu en vertu du lemme SA, puisque toutes les conditions de DEHN sont vérifiées, séparément pour  $\psi$  et pour  $\frac{\pi}{2} - \psi$ .

5.3.

$$\begin{aligned} & B(\alpha; \beta; \gamma) + \cos^2 \alpha A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \Theta; \alpha'\right) + \cos^2 \beta A\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \Theta; \beta'\right) + \\ & \underline{\quad \quad \quad} \\ & \underline{\quad \quad \quad} + \cos^2 \gamma A\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, \Theta; \gamma'\right) \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B(\alpha'; \beta'; \gamma'; \Theta). \end{aligned}$$

En effet, d'après 5.2

$$\begin{aligned} & B(\alpha; \beta; \gamma) + \cos^2 \alpha A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \Theta; \alpha'\right) + \cos^2 \beta A\left(\frac{\pi}{2} - \beta, \Theta; \beta'\right) - \sin^2 \gamma A(\gamma, \Theta; \gamma'') + \\ & \quad + \sin^2 \gamma A(\gamma, \Theta; \gamma'') + \cos^2 \gamma A\left(\frac{\pi}{2} - \gamma, \Theta; \gamma'\right) \sim \\ & \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B\left(\alpha'; \beta'; \frac{\pi}{2} - \gamma''\right) + \frac{1}{\sin^2 \Theta} B(\Theta; \gamma'; \gamma'') \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B(\alpha'; \beta'; \gamma'; \Theta). \end{aligned}$$

5.4. Plus généralement, on a

$$B(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k) + \sum_{i=1}^k \cos^2 \alpha_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \Theta; \alpha'_i\right) \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B(\alpha'_1; \alpha'_2; \dots; \alpha'_k; \Theta).$$


---

En effet,

$$\begin{aligned} & B(\alpha_1; \dots; \alpha_k) + \sum_{i=1}^k \cos^2 \alpha_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \Theta; \alpha'_i\right) \sim \\ & \sim B(\alpha_1; \alpha_2; \omega_1) + \cos^2 \alpha_1 A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1, \Theta; \alpha'_1\right) + \cos^2 \alpha_2 A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2, \Theta; \alpha'_2\right) - \\ & \quad - \sin^2 \omega_1 A(\omega_1, \Theta; \omega_1'') + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1; \alpha_3; \omega_2\right) + \sin^2 \omega_1 A(\omega_1, \Theta; \omega_1'') + \\ & \quad + \cos^2 \alpha_3 A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3, \Theta; \alpha'_3\right) - \sin^2 \omega_2 A(\omega_2, \Theta; \omega_2'') + \dots + \\ & \quad + B\left(\frac{\pi}{2} - \omega_{k-3}; \alpha_{k-1}; \alpha_k\right) + \sin^2 \omega_{k-3} A(\omega_{k-3}, \Theta; \omega_{k-3}'') + \\ & + \cos^2 \alpha_{k-1} A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{k-1}, \Theta; \alpha'_{k-1}\right) - \sin^2 \alpha_k A(\alpha_k, \Theta; \alpha_k'') + \sin^2 \alpha_k A(\alpha_k, \Theta; \alpha_k'') + \\ & + \cos^2 \alpha_k A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_k, \Theta; \alpha'_k\right) \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left\{ B(\alpha'_1; \alpha'_2; \frac{\pi}{2} - \omega_1'') + B(\omega_1''; \alpha'_3; \frac{\pi}{2} - \omega_2'') + \right. \\ & \left. + \dots + B(\omega_{k-3}''; \alpha'_{k-1}; \frac{\pi}{2} - \alpha_k'') + B(\alpha_k''; \alpha'_k; \Theta) \right\} \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B(\alpha'_1; \alpha'_2; \dots; \alpha'_k; \Theta). \end{aligned}$$

5.5. On établit de même que

$$\begin{aligned} & B(\alpha_1; \dots; \alpha_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \cos^2 \alpha_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \Theta; \alpha'_i\right) - \sin^2 \alpha_k A(\alpha_k, \Theta; \alpha_k'') \sim \\ & \sim \frac{1}{\sin^2 \Theta} B\left(\alpha'_1; \alpha'_2; \dots; \alpha'_{k-1}; \frac{\pi}{2} - \alpha_k''\right). \end{aligned}$$


---

5.6. Si l'on a un ensemble de polyèdres  $\Sigma C_i B(\alpha_{i_1}; \alpha_{i_2}; \alpha_{i_3})$ , il lui correspond un certain polynôme  $p = \Sigma C_i (\cos^2 \alpha_{i_1} + \cos^2 \alpha_{i_2} + \cos^2 \alpha_{i_3} - 1) = 0$ . Inversement, nous allons attribuer à un polynôme

$$p = \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i - \Sigma M_j \cos^2 \beta_j = 0, \quad (N_i, M_j \text{ entiers positifs})$$

un certain polyèdre  $P(p)$ . Soit  $T$  un entier arbitrairement grand :

$$\cos^2 \alpha_i^* = \frac{\cos^2 \alpha_i}{T}, \quad \cos^2 \beta_j^* = \frac{\cos^2 \beta_j}{T}, \quad \cos^2 \omega = \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i^*.$$

Définition :

$$\begin{aligned} P(p) \sim & \Sigma N_i B\left(T \cdot \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) - \Sigma M_j B\left(T \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \beta_j\right) + \\ & + T \Sigma B\left(N_i \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \delta_i\right) - T \Sigma B\left(M_j \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_j\right) + \\ & + TB\left(\delta_1; \delta_2; \dots; \delta_{n_1}; \frac{\pi}{2} - \omega\right) - TB\left(\varepsilon_1; \varepsilon_2; \dots; \varepsilon_{n_2}; \frac{\pi}{2} - \omega\right). \end{aligned}$$

Remarquons que  $\cos^2 \delta_i = N_i \cos^2 \alpha_i^* = \frac{N_i}{T} \cos^2 \alpha_i$  existe, de même que  $\cos^2 \varepsilon_j$ , à cause du choix de  $T$ .

Dans la suite, nous considérerons en particulier des polynômes

$$p = \Sigma K_{R_1 R_2 \dots R_T} x_1^{R_1} x_2^{R_2} \dots x_T^{R_T} = 0$$

avec

$$0 < x_i < 1, \quad (R_1, \dots, R_T) \neq (0, \dots, 0); \quad (R_1, \dots, R_T) \neq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$$

Nous désignerons alors par  $\sin^2 \tau_i = x_i$  et par  $\cos^2 \gamma_{R_1 \dots R_T} = \Pi (\sin^2 \tau_s)^{R_s}$  et nous pourrons également définir le polyèdre  $P(p[x_1, \dots, x_T])$  en fonction des angles  $\gamma$  et  $\tau$ .

5.7. Rappelons que nous avons introduit la notation suivante :

$$\begin{aligned} A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k; \gamma) \sim & A(\alpha_1, \alpha_2; \varepsilon_2) + A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_2, \alpha_3; \varepsilon_3\right) + \dots + \\ & + A\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{k-1}, \alpha_k; \gamma\right). \end{aligned}$$

Nous allons convenir d'une deuxième correspondance :

Au polynôme  $q = \Sigma L_{S_1 \dots S_T} x_1^{S_1} \dots x_T^{S_T} \{L \text{ entiers, } (S_1, \dots, S_T) \neq (0, \dots, 0), (S_1, \dots, S_T) \neq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)\}$ , ( $q$  n'étant pas nécessairement nul) correspond le polyèdre

$$R(q) \sim \Sigma L_{S_1 \dots S_T} \cdot \cos^2 \gamma_{S_1 \dots S_T} \cdot A(S_1 \cdot \tau_1, S_2 \cdot \tau_2, \dots, S_T \tau_T; \gamma_{S_1 \dots S_T}).$$

### 5.8. Propriétés générales des $P$ et des $R$ .

5.8.1. Si  $p \equiv 0$ , alors  $P(p) \sim 0$  en vertu de  $SB$ .

5.8.2.  $P(p_1 + p_2) \sim P(p_1) + P(p_2)$ .

5.8.3. Si  $K_1$  et  $K_2$  sont entiers,  $P(K_1 p_1 + K_2 p_2) \sim K_1 P(p_1) + K_2 P(p_2)$ .

5.8.4. Si  $\frac{\partial q}{\partial x_i} = 0$ ,  $R(q)$  vérifie les conditions de DEHN pour  $\tau_i$ , puisqu'alors  $\Sigma_{(S_1 \dots S_T)} S_i L_{S_1 \dots S_T} \cos^2 \gamma_{S_1 \dots S_T} = 0$ .

5.8.5. Si  $p = 0$  et si  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots$ ,  $P(p) + R(p)$  vérifie toutes les conditions de DEHN (pour les angles  $\gamma$  et pour les angles  $\tau$ ).

5.8.6. Si  $p \equiv 0$  et si  $\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots$ , alors  $P(p) + R(p) \sim 0$ .

5.9. Considérons le polynôme  $p = \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i - \Sigma M_j \cos^2 \beta_j - N = 0$ . Il lui correspond un polyèdre

$$\begin{aligned} P(p) \sim & \Sigma N_i B\left(T \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) - \Sigma M_j B\left(T \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \beta_j\right) - NB(T \Theta_T^*) - \\ & - T \Sigma B\left(N_i \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \omega_i\right) + T \Sigma B\left(M_j \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \Omega_j\right) + TB\left(N \Theta_T^*; \frac{\pi}{2} - \vartheta\right) - \\ & - TB(\omega_1; \omega_2; \dots; \varrho) + TB(\Omega_1; \Omega_2; \dots; \vartheta; \varrho). \end{aligned}$$

Appliquons à chacun des termes les transformations 5.2 à 5.5.

$$\begin{aligned} & \Sigma N_i B\left(T \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + \Sigma T N_i \cos^2 \alpha_i^* A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \varepsilon_i^*\right) - \\ & - \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \frac{\pi}{2} - \gamma; \varepsilon_i\right) - \Sigma M_j B\left(T \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \beta_j\right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Sigma T M_j \cos^2 \beta_j^* A \left( \frac{\pi}{2} - \beta_j^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \sigma_j^* \right) + \Sigma M_j \cos^2 \beta_j A \left( \frac{\pi}{2} - \beta_j, \frac{\pi}{2} - \gamma; \sigma_j \right) - \\
& \quad - NB(T \Theta_T^*) - NT \cos^2 \Theta_T^* A \left( \frac{\pi}{2} - \Theta_T^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \psi_T^* \right) - \\
& \quad - T \Sigma B \left( N_i \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \omega_i \right) - \Sigma T N_i \cos^2 \alpha_i^* A \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_i^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \varepsilon_i^* \right) + \\
& \quad + T \Sigma \cos^2 \omega_i A \left( \frac{\pi}{2} - \omega_i, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\omega}_i \right) + T \Sigma B \left( M_j \beta_j^*; \frac{\pi}{2} - \Omega_j \right) + \\
& + \Sigma T M_j \cos^2 \beta_j^* A \left( \frac{\pi}{2} - \beta_j^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \sigma_j^* \right) - T \Sigma \cos^2 \Omega_j A \left( \frac{\pi}{2} - \Omega_j, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\Omega}_j \right) + \\
& \quad + TB \left( N \Theta_T^*; \frac{\pi}{2} - \vartheta \right) + TN \cos^2 \Theta_T^* A \left( \frac{\pi}{2} - \Theta_T^*, \frac{\pi}{2} - \gamma; \psi_T^* \right) - \\
& \quad - T \cos^2 \vartheta A \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\vartheta} \right) - TB(\omega_1; \omega_2; \dots; \varrho) - \\
& \quad - T \Sigma \cos^2 \omega_i A \left( \frac{\pi}{2} - \omega_i, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\omega}_i \right) + T \sin^2 \varrho A \left( \varrho, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\varrho} \right) + \\
& \quad + TB(\Omega_1; \Omega_2; \dots; \vartheta; \varrho) + T \Sigma \cos^2 \Omega_j A \left( \frac{\pi}{2} - \Omega_j, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\Omega}_j \right) + \\
& \quad + T \cos^2 \vartheta A \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\vartheta} \right) - T \sin^2 \varrho A \left( \varrho, \frac{\pi}{2} - \gamma; \bar{\varrho} \right) \\
& \sim P(p) - \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i A \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_i, \frac{\pi}{2} - \gamma; \varepsilon_i \right) + \Sigma M_j \cos^2 \beta_j A \left( \frac{\pi}{2} - \beta_j, \frac{\pi}{2} - \gamma; \sigma_j \right) \sim \\
& \sim \frac{1}{\cos^2 \gamma} \left\{ \Sigma N_i B \left( T \varepsilon_i^*; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_i \right) - \Sigma M_j B \left( T \sigma_j^*; \frac{\pi}{2} - \sigma_j \right) - NB \left( T \psi_T^*; \frac{\pi}{2} - \gamma \right) - \right. \\
& \quad - T \Sigma B \left( N_i \varepsilon_i^*; \frac{\pi}{2} - \bar{\omega}_i \right) + T \Sigma B \left( M_j \sigma_j^*; \frac{\pi}{2} - \bar{\Omega}_j \right) + \\
& \quad \left. + TB \left( N \psi_T^*; \frac{\pi}{2} - \bar{\vartheta} \right) - TB \left( \bar{\omega}_1; \bar{\omega}_2; \dots; \frac{\pi}{2} - \bar{\varrho} \right) + TB \left( \bar{\Omega}_1; \dots; \bar{\vartheta}; \frac{\pi}{2} - \bar{\varrho} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Considérons d'autre part le polynôme

$$p^* = \cos^2 \gamma \cdot p = \Sigma N_i \cos^2 \alpha_i \cos^2 \gamma - \Sigma M_j \cos^2 \beta_j \cos^2 \gamma - N \cos^2 \gamma = 0.$$

Si l'on pose  $\cos^2 \alpha_i \cos^2 \gamma = \cos^2 \varepsilon_i$  et  $\cos^2 \beta_j \cdot \cos^2 \gamma = \cos^2 \sigma_j$ , on voit que la parenthèse du dernier terme ci-dessus est équivalente à  $P(p^*)$ .



$$P(\cos^2 \gamma \cdot p) \sim \cos^2 \gamma \cdot P(p) - \sum N_i \cos^2 \varepsilon_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \frac{\pi}{2} - \gamma; \varepsilon_i\right) + \\ + \sum M_j \cos^2 \sigma_j A\left(\frac{\pi}{2} - \beta_j, \frac{\pi}{2} - \gamma; \sigma_j\right).$$

5.10. Soit encore  $\Phi(\gamma_i) = \sum V_i \cos^2 \gamma_i$ . On vérifie que

$$P(\Phi \cdot p) \sim \Phi(\gamma_i) \cdot P(p) - \sum_{i,j} N_i V_j \cos^2 \varepsilon_{ij} A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i; \frac{\pi}{2} - \gamma_j; \varepsilon_{ij}\right) + \\ + \sum_{i,j} M_i V_j \cos^2 \sigma_{ij} A\left(\frac{\pi}{2} - \beta_i, \frac{\pi}{2} - \gamma_j; \sigma_{ij}\right).$$

5.11. Considérons en particulier le cas où

$$p = \sum N_i \cos^2 \gamma_{R_{i1}, \dots, R_{iT}} = 0 \quad \text{et} \quad \Phi = \sum V_j \cos^2 \gamma_{S_{j1}, \dots, S_{jT}}$$

(où  $\cos^2 \gamma_{a_1, \dots, a_T} = \prod_{s=1}^T (\sin^2 \tau_s)^{a_s}$ ). On a alors

$$P(\Phi p) \sim \Phi P(p) - \sum_{i,j} N_i V_j \cos^2 \gamma_{R_{i1} + S_{j1}, \dots, R_{iT} + S_{jT}} \\ A\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{R_{i1}, \dots, R_{iT}}, \frac{\pi}{2} - \gamma_{S_{j1}, \dots, S_{jT}}; \gamma_{R_{i1} + S_{j1}, \dots, R_{iT} + S_{jT}}\right)$$

$$\sim \Phi \cdot P(p) -$$

$$- \sum_{i,j} N_i V_j \cos^2 \gamma_{R_{i1} + S_{j1}, \dots, R_{iT} + S_{jT}} A([R_{i1} + S_{j1}] \tau_1, \dots, [R_{iT} + S_{jT}] \tau_T; \gamma_{R_i + S_j}) + \\ + \sum N_i V_j \cos^2 \gamma_{R_{i1}, \dots, R_{iT}} \cdot \cos^2 \gamma_{S_{j1}, \dots, S_{jT}} A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \gamma_{R_{i1}, \dots, R_{iT}}) + \\ + \sum N_i V_j \cos^2 \gamma_{R_{i1}, \dots, R_{iT}} \cdot \cos^2 \gamma_{S_{j1}, \dots, S_{jT}} A(S_{j1} \tau_1, \dots, S_{jT} \tau_T; \gamma_{S_{j1}, \dots, S_{jT}})$$

$$\sim \Phi P(p) - R(\Phi p) + \sum_j V_j \cos^2 \gamma_{S_j} \cdot R(p) + \sum_i N_i \cos^2 \gamma_{R_i} \cdot R(\Phi)$$

$$P(\Phi p) \sim \Phi P(p) - R(\Phi p) + \Phi R(p).$$

Nous obtenons le théorème central:

$$\underline{\underline{P(\Phi \cdot p) + R(\Phi \cdot p) \sim \Phi \cdot \{P(p) + R(p)\}}}$$

Autre notation:

$$[P + R](\Phi p) \sim \Phi \cdot \{[P + R](p)\}.$$

De plus

$$P(\Sigma \Phi_i p_i) + R(\Sigma \Phi_i p_i) \sim \Sigma \Phi_i \{P(p_i) + R(p_i)\}.$$

Cas particulier:  $\Sigma \Phi_i p_i \equiv 0$ . D'après la remarque 5.8.1 :

$$P(\Sigma \Phi_i p_i) + R(\Sigma \Phi_i p_i) \sim 0, \text{ donc } \Sigma \Phi_i \{P(p_i) + R(p_i)\} \sim 0.$$

5.12. Si  $\Phi = 0$ , alors  $P(\Phi p) + R(\Phi p) \sim 0$ . Cas particulier: Comme  $p = 0$ , alors  $P(p^2) + R(p^2) \sim 0$ .

5.13. Considérons le polynôme  $p(x) = \sum_{s=2}^n N_s x^s$ . Supposons que

$$p(y_1) = \frac{dp(y_1)}{dx} = 0.$$

Il existe alors deux polynômes entiers  $\psi(x)$  et  $\psi_1(x)$ , sans facteur commun, de degré minimum, tel que:

$$\psi(x) \cdot p(x) + \psi_1(x) p'(x) \equiv 0.$$

Une des deux valeurs  $\psi(y_1)$  ou  $\psi_1(y_1)$  est différente de 0, sinon il existerait deux autres polynômes  $\zeta(x)$  et  $\zeta_1(x)$  tels que

$$\zeta_1(x) \psi(x) - \zeta(x) \psi_1(x) \equiv 0$$

et l'on aurait  $\psi \zeta_1 p + \psi_1 \zeta_1 p' \equiv \zeta \psi_1 p + \psi_1 \zeta_1 p' \equiv 0$ ,  $\zeta p + \zeta_1 p' \equiv 0$ .  $\zeta$  et  $\zeta_1$  étant de degrés plus petits que  $\psi_1$  et  $\psi$ , il y a contradiction.

Comme

$$\psi' \cdot p + \psi \cdot p' + \psi_1' \cdot p' + \psi_1 \cdot p'' \equiv 0, \quad \psi_1(y_1) p''(y_1) = 0.$$

Si  $\psi_1(y_1) \neq 0$ , alors  $p''(y_1) = 0$ . Mais on montrerait de même que  $p'''(y_1) = 0, \dots, p^{(s)}(y_1) = 0$ . Une des dérivées doit pourtant être non nulle, la  $n^e$  entre autre. On a donc  $\psi_1(y_1) = 0$  et par conséquent  $\psi(y_1) \neq 0$ .

En appliquant les résultats obtenus précédemment, on trouve:

$$[P + R](\psi p(x) + \psi_1 p'(x)) \sim 0 \text{ puisque } \psi p + \psi_1 p' \equiv 0$$

$$[P + R](\psi p(x)) + [P + R](\psi_1 p'(x)) \sim 0 \text{ en vertu de 5.8.2}$$

$$\psi(x)[P + R](p(x)) + \psi_1(x)[P + R](p'(x)) \sim 0 \text{ en vertu de 5.11}$$

$$\psi(y_1)[P + R](p(y_1)) \sim 0 \text{ puisque } \psi_1(y_1) = 0$$

$$[P + R](p(y_1)) \sim 0 \text{ puisque } \psi(y_1) \neq 0$$

$$P(p(y_1)) + R(p(y_1)) \sim 0.$$

5.14. Nous allons démontrer le théorème général par induction. Considérons le polynôme  $p(x_1, \dots, x_{s-1}) = \Sigma N_{r_1, \dots, r_{s-1}} x_1^{r_1}, \dots, x_{s-1}^{r_{s-1}}$ . Nous supposons que, si

$$p(y_1, \dots, y_{s-1}) = \frac{\partial p}{\partial x_\varrho} (y_1, \dots, y_{s-1}) = 0, \quad \varrho = 1, \dots, s-1,$$

alors

$$[P + R](p[y_1, \dots, y_{s-1}]) \sim 0.$$

Ce théorème, vrai pour  $s = 1$  et supposé vrai pour  $(s - 1)$ , peut être démontré pour  $s$ . Il sera donc vrai généralement.

a) Il existe deux polynômes  $\psi_{11}$  et  $\psi_{11}^*$ , et un polynôme  $\Phi_{11}(x_2, \dots, x_s)$  tels que

$$\psi_{11}(x_1, \dots, x_s) \cdot p(x_1, \dots, x_s) + \psi_{11}^*(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_s) \equiv \Phi_{11}(x_2, \dots, x_s).$$

On peut supposer que  $\psi_{11}$  et  $\psi_{11}^*$  ne s'annulent pas simultanément pour  $(y_1, \dots, y_n)$ . Supposons en effet que  $\psi_{11}(y) = \psi_{11}^*(y) = 0$ .  $\psi_{11}$  et  $\psi_{11}^*$  se laissent décomposer en facteurs irréductibles:  $\psi_{11}(x) = \Pi \psi_{1i}$ ,  $\psi_{11}^* = \Pi \psi_{2j}$ . Si  $\psi_{1i}(y) = 0$  et  $\psi_{2j}(y) = 0$ , alors  $\psi_{1i} \equiv \psi_{2j}$ .  $\psi_{1i}$  étant irréductible, il divise aussi  $\Phi(x_2, \dots, x_n)$ . On peut dès lors remplacer  $\psi_{11}$  par  $\frac{\psi_{11}}{\psi_{1i}}$  et  $\psi_{11}^*$  par  $\frac{\psi_{11}^*}{\psi_{1i}}$ .

b) Comme

$$\frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_1} \cdot p + \psi_{11} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_{11}^*}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} + \psi_{11}^* \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} \equiv 0$$

on a

$$\psi_{11}^*(y_1, \dots, y_s) \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(y_1, \dots, y_s) = 0.$$

Si  $\psi_{11}^*(y_1, \dots, y_s) \neq 0$ , alors  $\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(y) = 0$ , et on montre de même que

$$\frac{\partial^3 p}{\partial x_1^3}(y) = \dots = \frac{\partial^r p}{\partial x_1^r}(y) = 0.$$

c) De manière analogue, il existe des polynômes

$$\psi_{jk}(x_1, \dots, x_s), \psi_{jk}^*(x_1, \dots, x_s), \Phi_{jk}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_k)$$

tels que

$$\begin{aligned} & \psi_{jk}(x_1, \dots, x_s) p(x_1, \dots, x_s) + \\ & + \psi_{jk}^*(x_1, \dots, x_s) \frac{\partial p}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_s) \equiv \Phi_{jk}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s). \end{aligned}$$

Si tous les

$$\psi_{jk}^*(y_1, \dots, y_s) \neq 0, \text{ alors } \frac{\partial^t p}{\partial x_1^{t_1} \partial x_2^{t_2}, \dots, \partial x_s^{t_s}} = 0.$$

Par conséquent, un des  $\psi_{jk}^*$  au moins s'annule pour  $(y_1, \dots, y_s)$ . Supposons que ce soit  $\psi_{11}^*(y_1, \dots, y_s) = 0$ . On a alors  $\psi_{11}(y_1, \dots, y_s) \neq 0$ .

Comme

$$\psi_{11} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x_j} \cdot p + \psi_{11}^* \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_j} + \frac{\partial \psi_{11}^*}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_j}$$

on a

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_j}(y_2, \dots, y_s) = 0, \quad j = 1, \dots, s \text{ et } \Phi_{11}(y_2, \dots, y_s) = 0.$$

Toutes les hypothèses tout vérifiées pour le polynôme  $\Phi_{11}$  à  $(s - 1)$  variables, donc, par hypothèse d'itération,  $[R + P](\Phi_{11}[y_2, \dots, y_s]) \sim 0$ .

D'autre part:

$$[P + R] \left( \psi_{11} p(x) + \psi_{11}^* \frac{\partial p}{\partial x_1}(x) - \Phi_{11}(x) \right) \sim 0 \quad \text{à cause de 5.8.1}$$

$$[P + R](\psi_{11} p(x)) + [P + R] \left( \psi_{11}^* \frac{\partial p}{\partial x_1}(x) \right) \sim 0 \quad \text{à cause de 5.8.2}$$

$$\psi_{11}(x) [P + R](p(x)) + \psi_{11}^*(x) [P + R] \left( \frac{\partial p}{\partial x_1}(x) \right) \sim 0 \quad \text{à cause de 5.11}$$

$$\psi_{11}(y_1, \dots, y_s) [P + R](p[y]) \sim 0 \quad \text{puisque } \psi_{11}^*(y) = 0$$

$$[P + R](p[y]) \sim 0 \quad \text{puisque } \psi_{11}(y) \neq 0.$$

Le théorème général *SAB* vaut donc dans tous les cas:

Si

$$\underline{p(x_1, \dots, x_s) = \sum N_{v_1, \dots, v_s} x_1^{v_1}, \dots, x_s^{v_s}} \left\{ \begin{array}{l} (v_1, \dots, v_s) \neq (0, \dots, 0) \\ (v_1, \dots, v_s) \neq (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \end{array} \right\}$$

et si

$$\underline{p(y_1, \dots, y_s) = 0, \frac{\partial p}{\partial x_j}(y_1, \dots, y_s) = 0, \quad j = 1, \dots, s}$$

alors

$$\underline{P(p[y]) + R(p[y]) \sim 0.}$$

## Chapitre 6. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence

6.1. Appliquons le théorème général 5.14 à un cas particulier important :  
Supposons que l'on ait

$$\cos^2 \alpha_i = (\sin^2 \tau_1)^{R_{i1}} \dots (\sin^2 \tau_T)^{R_{iT}}$$

$$\text{et } \sin^2 \alpha_i = (\sin^2 \tau_1)^{S_{i1}} \dots (\sin^2 \tau_T)^{S_{iT}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Posons  $\sin^2 \tau_i = x_i$  et introduisons les polynômes

$$f_i(x_1, \dots, x_T) = x_1^4 [x_1^{R_{i1}} \dots x_T^{R_{iT}} + x_1^{S_{i1}} \dots x_T^{S_{iT}} - 1], \quad i = 1, \dots, N.$$

Supposons qu'il existe un point  $(y_1, \dots, y_T)$  et des valeurs  $\nu_1, \dots, \nu_N$  tels que

$$f_i(y_1, \dots, y_T) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y_1, \dots, y_T) = 0, \quad j = 1, \dots, T.$$

Comme on a aussi  $\sum \nu_i f_i(y_1, \dots, y_T) = 0$ , on a alors

$$P(\sum \nu_i f_i) + R(\sum \nu_i f_i) \sim 0, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$\sum [P + R](\nu_i f_i) \sim \sum \nu_i [P + R](f_i) \sim \sum \nu_i \{P(f_i) + R(f_i)\} \sim 0.$$

Posons encore

$$\sin^4 \tau_1 \cdot \cos^2 \alpha_i = \cos^2 \sigma_i, \quad \sin^4 \tau_1 \cdot \sin^2 \alpha_i = \cos^2 \varrho_i \quad \text{et} \quad \sin^4 \tau_1 = \cos^2 \tau_{11}.$$

D'après nos définitions et nos théorèmes :

$$\begin{aligned} & P(f_i) \sim P(\cos^2 \sigma_i + \cos^2 \varrho_i - \cos^2 \tau_{11}) \sim \\ & \sim \sin^4 \tau_1 \left\{ B\left(T \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + B(T \alpha_i^{**}; \alpha_i) - B(T \Theta_i^*) - TB\left(\alpha_i^*; \alpha_i^{**}; \frac{\pi}{2} - \Theta_i^*\right) \right\} - \\ & \quad - \cos^2 \sigma_i A\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i, \frac{\pi}{2} - \tau_{11}; \sigma_i\right) - \cos^2 \varrho_i A\left(\alpha_i, \frac{\pi}{2} - \tau_{11}; \varrho_i\right). \end{aligned}$$

Or

$$\left\{ B\left(T \alpha_i^*; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + B(T \alpha_i^{**}; \alpha_i) - B(T \Theta_i^*) - TB\left(\alpha_i^*; \alpha_i^{**}; \frac{\pi}{2} - \Theta_i^*\right) \right\} \sim 0$$

en vertu du théorème *SB*.

D'autre part

$$\begin{aligned}
R(f_i) &\sim \cos^2 \sigma_i A(\tau_1, \tau_1, R_{i1} \tau_1, R_{i2} \tau_2, \dots, R_{iT} \tau_T; \sigma_i) + \\
&+ \cos^2 \varrho_i A(\tau_1, \tau_1, S_{i1} \tau_1, S_{i2} \tau_2, \dots, S_{iT} \tau_T; \varrho_i) - \\
&- \cos^2 \tau_{11} A(\tau_1, \tau_1; \tau_{11}) \sim \\
&\sim \cos^2 \sigma_i \left\{ A(\tau_1, \tau_1; \tau_{11}) + A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \alpha_i) + A\left(\frac{\pi}{2} - \tau_{11}, \frac{\pi}{2} - \alpha_i; \sigma_i\right) \right\} + \\
&+ \cos^2 \varrho_i \left\{ A(\tau_1, \tau_1; \tau_{11}) + A\left(S_{i1} \tau_1, \dots, S_{iT} \tau_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + A\left(\frac{\pi}{2} - \tau_{11}, \alpha_i; \varrho_i\right) \right\} - \\
&- (\cos^2 \sigma_i + \cos^2 \varrho_i) A(\tau_1, \tau_1; \tau_{11}) \sim \\
&\sim \cos^2 \sigma_i \left\{ A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \alpha_i) + A\left(\frac{\pi}{2} - \tau_{11}, \frac{\pi}{2} - \alpha_i; \sigma_i\right) \right\} + \\
&+ \cos^2 \varrho_i \left\{ A\left(S_{i1} \tau_1, \dots, S_{iT} \tau_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) + A\left(\frac{\pi}{2} - \tau_{11}, \alpha_i; \varrho_i\right) \right\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
P(f_i) + R(f_i) &\sim \cos^2 \sigma_i A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \alpha_i) + \\
&+ \cos^2 \varrho_i A\left(S_{i1} \tau_1, \dots, S_{iT} \tau_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\Sigma v_i [P + R](f_i) &\sim \Sigma v_i \cos^2 \sigma_i A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \alpha_i) + \\
&+ \Sigma v_i \cos^2 \varrho_i A\left(S_{i1} \tau_1, \dots, S_{iT} \tau_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) \sim 0.
\end{aligned}$$

Comme

$$\cos^2 \sigma_i = \sin^4 \tau_1 \cdot \cos^2 \alpha_i \text{ et } \cos^2 \varrho_i = \sin^4 \tau_1 \cdot \sin^2 \alpha_i$$

on a

$$\Sigma \varrho_i \left\{ \cos^2 \alpha_i A(R_{i1} \tau_1, \dots, R_{iT} \tau_T; \alpha_i) + \sin^2 \alpha_i A\left(S_{i1} \tau_1, \dots, S_{iT} \tau_T; \frac{\pi}{2} - \alpha_i\right) \right\} \sim 0.$$

**6.2.** Si nous comparons enfin les résultats des paragraphes 3.13 et 6.1, nous obtenons le théorème final:

*Tout polyèdre à dièdres droits est équivalent à un cube.*

Exprimons encore ce résultat en détail :

Soit un polyèdre  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ ; désignons par  $\alpha_i$  et par  $l(\alpha_i)$  l'angle et la longueur de l'arête d'un de ses dièdres. On peut exprimer  $\alpha_i$  rationnellement en fonction de  $\pi$  et de  $n$  angles indépendants  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  :

$$\alpha_i = r_{i0} \pi + \sum_{j=1}^n r_{ij} \gamma_j, \quad i = 1, \dots, s.$$

Pour que le polyèdre  $P$  soit équivalent à un cube, il faut et il suffit que

$$\sum_{i=1}^s r_{ij} l(\alpha_i) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

En particulier, pour que deux polyèdres  $P_1$  et  $P_2$  soient équivalents, c'est-à-dire pour que  $P_1$  se laisse décomposer en polyèdres partiels avec lesquels on peut construire  $P_2$ , il faut et il suffit que  $P_1$  et  $P_2$  aient même volume et que  $P_1 - P_2$  vérifie les conditions précédentes.

Plus brièvement, nous dirons :

*Dans l'espace euclidien à trois dimensions, les conditions de DEHN sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres.*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. HILBERT: *Mathematische Probleme*. Nachr. Ges. Wiss., Göttingen 1900, 266–267. Ges. Abh. 3, 290 (Springer, Berlin 1935).
- [2] M. DEHN: *Über den Rauminhalt*. Math. Ann. 55, 465–478 (1902). Cf. DEHN, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen 1900, 345–354.
- [3] J.-P. SYDLER: Comment. Math. Helv. 16, 266–273 (1942/43).
- [4] H. HADWIGER: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Berlin 1957.
- [5] L. KIEFFER: Archives Lux. Nouv. série 24, 161–171 (1957).
- [6] J.-P. SYDLER: Elem. Math. 7, 49–53 (1952).
- [7] J.-P. SYDLER: Elem. Math. 8, 75–79 (1953).
- [8] J.-P. SYDLER: Elem. Math. 14, 100–109 (1959).

Reçu le 22 février 1965