Tabellen reduzierter, positiver quaternärer quadratischer Formen.

Autor(en): **Germann, Kurt**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **38 (1963-1964)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29437

Tabellen reduzierter, positiver quaternärer quadratischer Formen

von KURT GERMANN, Schaffhausen

Einleitung

Für viele Untersuchungen über quadratische Formen ist es nützlich, wenn man über Beispiele verfügt. Eine Tabelle der binären Formen kann leicht aufgestellt werden, für positive ternäre Formen existieren die Tabellen von BRANDT-INTRAU [2], für positive quaternäre Formen wurde von TOWNES [5] eine Tabelle der geraden Formen für kleinere Diskriminanten publiziert.

Die vorliegende Arbeit bringt nun eine *Tabelle aller Klassen positiver quaternärer quadratischer Formen* bis Diskriminante $d = 61$. Sie ist aufgebaut auf der Tafel der ternären Formen von BRANDT-INTRAU (die übrigens nach der hier dargestellten Methode leicht berechnet werden kann), und vor allem auf der Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen, wie sie in der Arbeit [6] meines verehrten Lehrers, Herrn Prof. B.L. VAN DER WAERDEN, dargestellt ist.

Im ersten Kapitel werden daher kurz die Grundlagen und wichtigsten Ergebnisse der Reduktionstheorie zusammengestellt.

Das zweite Kapitel bringt dann die Darstellung der Methode, die der Berechnung der Tabelle zugrunde liegt, sowie eine erste Zusammenstellung der gefundenen Formen.

Im dritten Kapitel folgen Untersuchungen über Äquivalenz und hinreichende Kriterien für die Inäquivalenz von zwei Formen, und schließlich die Aufstellung des endgültigen Repräsentantensystems.

Das vierte Kapitel bringt dann noch Untersuchungen über eigentliche und uneigentliche Äquivalenz von Formen.

1. Kapitel

1. Bezeichnungen. Eine *positive quadratische Form* in n Variabeln, eine sog. n-äre quadratische Form, mit ganzrationalen Koeffizienten wird im folgenden kurz als Form bezeichnet.

$$f = f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \leq k}}^{n} f_{ik} x^i x^k \quad \text{mit } f_{ik} \text{ ganzrational.}$$

Die Form kann auch symmetrisch geschrieben werden, wozu neue Koeffizienten g_{ik} eingeführt werden:

$$f = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} x^i x^k \qquad \text{wobei } g_{ii} = f_{ii}$$
$$g_{ik} = g_{ki} = \tfrac{1}{2} f_{ik} \text{ für } i < k .$$

Die *Diskriminante* D_n der Form wird definiert als die Determinante der Koeffizientenmatrix (g_{ik}).

$$D_n = \text{det.}\,(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} \cdot \cdot \cdot \cdot g_{1n} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ g_{n1} \cdot \cdot \cdot \cdot g_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

Es gilt nun eine erste Ungleichung für Diskriminante:

$$D_n \leq f_{11} f_{22} \ldots f_{nn} \tag{1.2}$$

2. Äquivalenz von Formen. Führt man durch eine ganzrationale Transformation neue Variable $\bar{x}^i$ ein

$$x^i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \bar{x}^k \qquad t_{ik} \text{ ganzrational}$$

so transformiert sich auch die Form f auf eine Form $\bar{f}$:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \bar{f}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$$

Wenn sich umgekehrt auch die $\bar{x}^k$ ganzrational durch die x^i ausdrücken lassen, so erhält man aus $\bar{f}$ wiederum f durch eine ganzrationale Transformation. Notwendig und hinreichend dafür ist, daß die Transformationsmatrix (t_{ik}) unimodular ist, d. h.

$$|\,T\,| = \text{det.}\,(t_{ik}) = \pm 1$$

Die Form $\bar{f}$ *heißt nun äquivalent zur Form* f, wenn man $\bar{f}$ aus f durch eine unimodulare Transformation der x^i erhält. Da die Äquivalenz eine reflexive, symmetrische und transitive Relation darstellt, liefert sie uns die Möglichkeit, *alle Formen in Klassen äquivalenter Formen* einzuteilen. Ferner zeigt es sich, daß sich die Diskriminante einer Form bei einer Variabelntransformation mit dem Quadrat der Determinante der Transformationsmatrix (t_{ik}) multipliziert. *Also haben äquivalente Formen gleiche Diskriminante.*

Äquivalente Formen stellen z. B. die gleichen Zahlen dar, so daß man sich häufig nur für die Formenklassen, nicht aber für die einzelnen Formen einer Klasse interessiert. Eine Klasse wird durch irgendeine ihrer Formen repräsentiert. Die Reduktionstheorie liefert uns nun ein Mittel, möglichst einfache Repräsentanten zu finden. Als Vorbereitung dazu müssen wir uns kurz mit der Gittertheorie im R^n befassen.

3. Gittertheorie. Unter einem *Gitter* in einem n-dimensionalen linearen Raum R^n versteht man die Gesamtheit aller ganzrationalen Linearkombinationen von n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$. Diese Vektoren $\mathfrak{e}_i$ bilden eine *Basis des Gitters.* Jeder Gittervektor $\mathfrak{x}$ läßt sich also schreiben als

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_i x^i \qquad \text{mit } x^i \text{ ganzrational.}$$

Hat man nun eine n-äre Form f, so kann man vorerst bei fester Gitterbasis eine *Metrik* einführen:

$$N(\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x}) = f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i \leqslant k} f_{ik} x^i x^k \tag{1.3}$$

Die positive ganze Zahl $N(\mathfrak{x})$ heißt die *Norm von* $\mathfrak{x}$, die positive Quadratwurzel daraus die *Länge des Vektors* $\mathfrak{x}$:

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{N(\mathfrak{x})} = \sqrt{f(\mathfrak{x})}$$

Gleichzeitig führt man so natürlich auch das *Skalarprodukt von zwei Gittervektoren* $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ein:

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i} f_{ii} x^i y^i + \tfrac{1}{2} \sum_{i<k} f_{ik}(x^i y^k + x^k y^i) \tag{1.4}$$

Betrachtet man nun eine neue Basis $\mathfrak{e}'_1, \ldots, \mathfrak{e}'_n$ desselben Gitters, so drücken sich die alten Basisvektoren $\mathfrak{e}_i$ natürlich ganzrational durch die neuen aus:

$$\mathfrak{e}_i = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{e}'_k t_{ik}$$

Umgekehrt drücken sich auch die neuen Basisvektoren ganzrational durch die alten aus

$$\mathfrak{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_i t'_{ki}$$

Notwendig und hinreichend dafür ist aber

$$|T| = \det. (t_{ik}) = \pm 1$$

Eine Basistransformation bewirkt aber auch eine *Transformation der Koordinaten* eines Gittervektors:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_i x^i = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{e}'_k \bar{x}^k \quad \text{mit} \quad \bar{x}^k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} x^i$$

Verlangt man nun die Invarianz der Norm eines Gittervektors gegenüber Basistransformationen, so bewirkt also eine *Basistransformation des Gitters den Übergang von einer Form* f *zu einer äquivalenten Form* $\bar{f}$.

Wir sehen also: *Verschiedenen Basen desselben Gitters entsprechen äquivalente Formen und umgekehrt. Einer ganzen Formenklasse entspricht somit nur ein Gitter.*

Nun sucht man möglichst einfache Gitterbasen, denen dann auch möglichst einfache Repräsentanten einer Formenklasse entsprechen.

4. Reduktionstheorie. Als Vorbereitung brauchen wir den Begriff des primitiven Systems:

k linear unabhängige Gittervektoren bilden ein *primitives System*, wenn es in dem von ihnen aufgespannten linearen Raum keine Gittervektoren außer ihren ganzrationalen Linearkombinationen gibt $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Es gilt nun der **Satz**: *Ein primitives System kann zu einer Basis des Gitters ergänzt werden.*

Eine Gitterbasis heißt *reduziert*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $\mathfrak{e}_1$ ist der kürzeste unter allen primitiven Gittervektoren.

2) $\mathfrak{e}_k$ ist der kürzeste unter allen Gittervektoren, die mit $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{k-1}$ ein primitives System bilden $(k = 2, \ldots, n)$.

Man kann nun zeigen, daß in *jedem Gitter eine reduzierte Basis existiert. Eine Form, die einer reduzierten Basis entspricht, heißt auch reduziert.* Also ist *jede Form äquivalent zu einer reduzierten Form, d.h. jede Formenklasse kann durch eine reduzierte Form repräsentiert werden.*

Die Reduktionsbedingungen können noch so umgeformt werden, daß man Bedingungen für die Koeffizienten der Form bekommt:

$$f(\mathfrak{e}_k) \leq f(\mathfrak{s}) \quad \text{für alle Gittervektoren } \mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{e}_i s^i \text{ mit } ggT(s^k, \ldots, s^n) = 1$$

oder

$$f_{kk} \leq f(s^1, \ldots, s^n) \quad \text{für alle ganzrationalen } s^i \text{ mit } ggT(s^k, \ldots, s^n) = 1$$

Durch spezielle Wahl der s^i erhält man folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} f_{11} \leq f_{22} \leq \cdots\cdots \leq f_{nn} \\ |f_{ik}| \leq f_{ii} \quad \text{für } i < k \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Ferner kann man zeigen: *Jede reduzierte quadratische Form mit* $f_{11} > 0$ *ist positiv.*

5. Sukzessive Minima einer Form oder eines Gitters:

N_1 = Norm eines kürzesten Gittervektors $\mathfrak{s} \neq 0$

N_k = Norm eines kürzesten Gittervektors $\mathfrak{s}$, der von $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{k-1}$ linear unabhängig ist.

Die Zahlen $N_1, N_2, \ldots, N_n$ heißen die *sukzessiven Minima der Form* f und sind durch das Gitter eindeutig bestimmt. Die Vektoren $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_n$ heißen die *Minimalvektoren.* Sie bilden für $n \leq 4$ eine Basis des Gitters mit Ausnahme der Formenklasse der Diskriminante $D_4 = 1/4$ und ihrer Vielfachen.

Falls die Form f reduziert ist, gilt für $n \leq 4$:

$$N_k = f_{kk} \tag{1.6}$$

Ferner gilt die *fundamentale Ungleichung der Reduktionstheorie*:

$$f_{11}\, f_{22} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_{nn} \leq \lambda_n\, D_n \tag{1.7}$$

mit $\lambda_2 = 4/3$
$\lambda_3 = 2$
$\lambda_4 = 4$

Für die Beweise der hier erwähnten Sätze aus der Reduktionstheorie sei auf die Arbeit [6] von B. L. VAN DER WAERDEN über die *Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen* verwiesen.

2. Kapitel

1. Vorbemerkungen. Von jetzt an betrachten wir nur noch reduzierte quaternäre und ternäre Formen. Jede quaternäre Form kann aufgebaut werden aus einer ternären Form f_0. Umgekehrt erhält man aus der quaternären Form auch wieder die ternäre, indem man setzt: $x^4 = 0$.

$$f(x^1, x^2, x^3, x^4) = f_0(x^1, x^2, x^3) + a\,x^1\, x^4 + b\,x^2\, x^4 + c\,x^3\, x^4 + f_{44}\, x^4\, x^4$$

Das Tripel (a, b, c) wird auch mit (y_1, y_2, y_3) bezeichnet, wenn das eine Vereinfachung bringt.

Die *Diskriminante* D_4 der quaternären Form wird nun einfach mit D, diejenige der ternären Form mit Δ bezeichnet. Dann gilt:
$D = d/16$ wobei d ganzrational
$\Delta = \delta/4$ wobei δ ganzrational und $\delta > 1$
Ist die quaternäre Form reduziert, dann natürlich auch die ternäre, und die *Reduktionsbedingungen* können nun in der folgenden Form geschrieben werden:
a) f_0 soll reduziert sein
b) $f_{33} \leq f_{44}$
c) $f(-s^1, -s^2, -s^3, 1) \geq f_{44}$ für ganzrationale s^i
Nach MINKOWSKI [4] Seite 78 genügt es, die $s^i \doteq 0$ oder ± 1 anzunehmen. Für gegebenes f_0 folgt aus c)

$$f_0(s^1, s^2, s^3) \geq a s^1 + b s^2 + c s^3 \tag{2.1}$$

2. Methode zur Bestimmung eines vollständigen Repräsentantensystems
a) Man beschränkt die Diskriminante $d < 64$;
b) Nach der fundamentalen Ungleichung der Reduktionstheorie (1.7) gilt:

$$f_{11}\, f_{22}\, f_{33}\, f_{44} \leq 4D \leq d/4 < 16$$

Ferner ist nach (1.5)

$$f_{11} \leq f_{22} \leq f_{33} \leq f_{44}$$

also gibt es folgende Möglichkeiten für f_{11}, f_{22}, f_{33}:

$$\left.\begin{matrix} f_{11} = 1 & f_{22} = 1 & f_{33} = 1, 2, 3 \\ f_{11} = 1 & f_{22} = 2 & f_{33} = 2 \end{matrix}\right\} \tag{2.2}$$

c) Aus der Ungleichung (1.2) folgt:

$$\delta = 4\Delta \leq 4 f_{11} f_{22} f_{33}$$

also folgt aus (2.2): $\delta \leq 16$

d) Zu jedem δ sucht man aus der Tabelle von Brandt-Intrau [2] alle Klassen *ternärer Formen* und nimmt je eine reduzierte Form als Repräsentanten. Dabei läßt man die Formen mit nicht zulässigen Werten von f_{33} weg.

Bezeichnungen:

$$f_0(x^1, x^2, x^3) = \sum_{i \leqq k} f_{ik}\, x^i\, x^k \quad \text{oder kurz} \quad f_0 = \begin{matrix} f_{11} & f_{22} & f_{33} \\ f_{12} & f_{13} & f_{23} \end{matrix}$$

So ergibt sich folgende Tabelle ternärer Formen, geordnet nach der Diskriminante δ:

$\delta = 2$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 3$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 4$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 5$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 6$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 7$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 8$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 9$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 10$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$

$\delta = 11$: $\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 12$: $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

$\delta = 13$: $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$

$\delta = 14$: $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$

$\delta = 15$: $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

$\delta = 16$: $\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

e) Zu jedem f_0 berechnet man nun alle zulässigen Tripel (a, b, c). Nach Ungleichung (1.5) gilt

$$|y_i| \leq f_{ii}$$

also ergeben sich nur wenige Möglichkeiten für y_i, d. h. für a, b, c.

Am besten stellt man sich nun eine Wertetabelle für $f_0(s^1, s^2, s^3)$ auf, für alle Werte $s^i = 0$ oder ± 1. Weil aber $f_0(-s) = f_0(s)$, kann man sich auf die Tripel (s^1, s^2, s^3) beschränken, für die $s^1 > 0$, oder $s^1 = 0$ und $s^2 > 0$, oder $(0, 0, 1)$.

Dann untersucht man für jedes Tripel (a, b, c), ob es den Reduktionsbedingungen (2.1) genügt. Dabei stellt man sich gleichzeitig noch eine Tabelle der Tripel (s^1, s^2, s^3) zusammen, für die in (2.1) das Gleichheitszeichen gilt. Diese Tabelle wird später für die ersten Äquivalenzuntersuchungen gebraucht.

3. Erste Äquivalenzuntersuchungen. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen setze ich hier $(a, b, c) = (y_1, y_2, y_3)$.

Sei E^3 der von $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ aufgespannte lineare Raum. Man zerlegt nun $\mathfrak{e}_4 = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ wobei $\mathfrak{p}$ in E^3, $\mathfrak{q} \perp E^3$. Dann gilt:

$$2\mathfrak{e}_k\mathfrak{p} = y_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

Nun führt man die *dualen Basisvektoren* $\mathfrak{e}^k$ ein, die definiert sind durch

$$\mathfrak{e}_i\mathfrak{e}^k = \delta_i^k \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Dann heißt die Lösung von (2.3)

$$\mathfrak{p} = \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \mathfrak{e}^k y_k \tag{2.5}$$

Die Beziehungen zwischen $\mathfrak{e}_i$ und $\mathfrak{e}^k$ sind

$$\mathfrak{e}_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\, \mathfrak{e}^k \tag{2.6}$$

Die Reduktionsbedingungen besagen nun

$$N(\mathfrak{e}_4 - \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{e}_i s^i) \geq N(\mathfrak{e}_4) \tag{2.7}$$

oder, wenn man setzt $\mathfrak{e}_4 = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{e}_i\, s^i$

$$N(\mathfrak{p} - \mathfrak{s}) \geq N(\mathfrak{p}) \tag{2.8}$$

d. h. der Punkt $\mathfrak{p}$ liegt von 0 nicht weiter entfernt als von irgendeinem anderen Gitterpunkt $\mathfrak{s}$.

Gilt in einer Reduktionsbedingung (2.8) das Gleichheitszeichen, so kann man $\mathfrak{p}$ durch den gleich langen Vektor $\mathfrak{p} - \mathfrak{s}$ ersetzen, und man erhält eine neue Gitterbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4' = \mathfrak{e}_4 - \mathfrak{s}$ desselben Gitters, also auch *eine äquivalente Form.* Gilt in mehreren Bedingungen (2.8) das Gleichheitszeichen, so hat man natürlich mehrere Möglichkeiten für $\mathfrak{s}$, man erhält also auch mehrere äquivalente Formen. Diese $\mathfrak{s}$ bestimmt man mit der Wertetabelle von f_0 gleichzeitig mit der Bestimmung der reduzierten Tripel (a, b, c).

Aus (2.5) und (2.6) folgt nun

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} - \mathfrak{s} = \tfrac{1}{2}\sum_k \mathfrak{e}^k y_k' = \tfrac{1}{2}\sum_k \mathfrak{e}^k (y_k - 2\sum_i g_{ik} s^i)$$

also werden beim Übergang zur äquivalenten Form die y_k ersetzt durch y_k'

$$y_k' = y_k - 2\sum_i g_{ik}\, s^i \tag{2.9}$$

Mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4$ ist aber auch $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4' = -\mathfrak{e}_4$ eine reduzierte Basis des Gitters, also erhält man auch eine äquivalente reduzierte Form, wenn man die y_k durch $-y_k$ ersetzt.

$$y_k' = -y_k \tag{2.10}$$

4. Die Rechnung geht nun folgendermaßen vor sich:

a) Zuerst bestimmt man zu jedem f_0 die reduzierten Tripel (a, b, c) und gleichzeitig die $\mathfrak{s}$, für die in (2.1) bzw. in (2.8) das Gleichheitszeichen gilt, mit Hilfe der Wertetabelle von $f_0(\mathfrak{s})$.

b) Nun berechnet man nach (2.9) und (2.10) alle Tripel (a', b', c'), die auf äquivalente reduzierte Formen führen, und erhält so eine *Klasse von Tripeln.*

c) Aus jeder Klasse wählt man einen Repräsentanten (a, b, c) aus.

d) Nun berechnet man die Diskriminante d, und scheidet alle Klassen mit $d \geq 64$ aus. Die verbleibenden reduzierten Formen ordnet man in eine *erste Tabelle ein.*

e) Falls $f_{33} = 3$ zeigt die Rechnung, daß es keine quaternären Formen mit $d < 64$ gibt. In diesen Fällen berechnet man daher zuerst d und kann dann direkt feststellen, daß für $d < 64$ keine reduzierten Tripel (a, b, c) existieren.

f) Für größere Werte von δ erhält man sehr viele Formen mit $d \geq 64$. Deshalb berechnet man auch hier zuerst d und teilt dann nur die Tripel in Äquivalenzklassen ein, für die $d < 64$. Auf diese Weise erhält man dann nur noch die gewünschten Formen.

Die Methode wird nun am Beispiel der Diskriminanten $\delta = 6$ und $\delta = 14$ gezeigt. Für die restlichen Diskriminanten gebe ich einfach die Resultate der Rechnung an.

5. Beispiele

a) Für $\delta = 6$ hat man die ternäre Form $f_0 = \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

also ergibt sich: $a, b = 1,\ 0,\ -1.$

$c = 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2$

Wertetabelle:

$f_0(\mathfrak{s}) = 6$ für $\mathfrak{s} = (1, 1, 1)$

$= 4$ für $\mathfrak{s} = (1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (0, 1, 1)$

$= 2$ für $\mathfrak{s} = (1, 1, 0), (1, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0),$
$(0, 1, -1), (0, 0, 1)$

$= 1$ für $\mathfrak{s} = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$

Nun werden die Reduktionsbedingungen (2.1) für alle möglichen Tripel (a, b, c) untersucht:

1) $(a, b, c) = (1, 1, 2)$: $s^1 + s^2 + 2s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(1, 1, 2), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (0, 0, -2),$
$(-1, -1, 0), (-1, -1, -2), (-1, 1, -1),$
$(1, -1, -1), (0, 0, 2), (1, 1, 0)$.

2) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ $s^1 + s^2 + s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, 1, 0)$. $(-1, -1, -1)$.

3) $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ $s^1 + s^2 - s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$
Die Reduktionsbedingungen sind nicht erfüllt für $\mathfrak{s} = (1, 1, -1)$,
analog fallen weg: $(1, 1, -1), (1, 1, -2), (1, 0, -2), (0, 1, -2),$
$(-1, 0, 2), (0, -1, 2), (-1, -1, 1), (-1, -1, 2)$.

4) $(a, b, c) = (1, 0, 2)$ $s^1 + 2s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(1, 0, 2), (-1, 0, 1), (0, -1, -2), (-1, 0, -2),$
$(1, 0, -1), (0, 1, 2), (0, 1, -1), (0, -1, 1)$.

5) $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ $s^1 + s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (1, 0, 0), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(1, 0, 1), (-1, 0, 0), (-1, 0, -1), (1, 0, 0)$.

6) $(a, b, c) = (1, -1, 2)$ $s^1 - s^2 + 2s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$.
Die Reduktionsbedingungen sind nicht erfüllt für $\mathfrak{s} = (0, -1, 1)$.
Analog fallen weg: $(1, -1, 2), (0, -1, 2), (-1, -1, 2), (-1, 1, -2)$
$(0, 1, -2), (1, 1, -2)$.

7) $(a, b, c) = (1, -1, -2)$ $s^1 - s^2 - 2s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$.
Die Reduktionsbedingungen sind nicht erfüllt für $\mathfrak{s} = (1, 0, -1)$.
Analog fallen weg: $(1, -1, -2), (-1, 1, 2)$.

8) $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ $s^2 + s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$.
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (0, 1, 0), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(0, 1, 1), (0, -1, 0), (0, -1, -1), (0, 1, 0)$.

9) $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ $s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$.
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Äquivalente Tripel: $(0, 0, 1), (0, 0, -1)$.

10) $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.

Aus $f_0 = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$ erhält man also 7 Klassen quaternärer Formen.

b) Für $\delta = 14$ hat man die ternäre Form $f_0 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$
also ergibt sich: $a = 1, 0, -1$

$b, c = 2, 1, 0, -1, -2$

Wertetabelle:

$f_0(\mathfrak{s}) = 6$ für $\mathfrak{s} = (1, 1, 1), (1, 1, -1)$
$= 4$ für $\mathfrak{s} = (1, 1, 0), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, -1)$
$= 3$ für $\mathfrak{s} = (1, 0, 1), (1, 0, -1)$
$= 2$ für $\mathfrak{s} = (1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
$= 1$ für $\mathfrak{s} = (1, 0, 0)$

Nun berechnet man zuerst die Diskriminante d, als Resultat ergibt sich:

$$d = 56 f_{44} - (16a^2 + 8b^2 - 8ab + 7c^2) < 64$$

Daraus ergibt sich folgende Bedingung:

$$16a^2 + 8b^2 - 8ab + 7c^2 > 48$$

Jetzt werden wieder alle möglichen Tripel (a, b, c) untersucht.

1) $(a, b) = (1, 2)$: $32 + 7c^2 > 48$
also $c = 2, -2$
a) $(1, 2, 2)$ $s^1 + 2s^2 + 2s^3 \leq f_0(\mathfrak{s})$.
Die Reduktionsbedingungen sind für alle $\mathfrak{s}$ erfüllt.
Gleichheit für $\mathfrak{s} = (0, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 0)$.
Äquivalente Tripel: $(1, 2, 2), (0, -2, -2), (-1, 1, -2), (0, -2, 2), (1, 2, -2), (-1, 1, 2), (1, -1, -2), (-1, -2, 2), (0, 2, -2), (1, -1, 2), (0, 2, 2), (-1, -2, -2)$.
b) $(1, 2, -2)$ ist äquivalent zu $(1, 2, 2)$

2) $(a, b) = (1, 1)$ $16 + 7c^2 > 48$ unmöglich

3) $(a, b) = (1, 0)$ $16 + 7c^2 > 48$ unmöglich

4) $(a, b) = (1, -1)$ $32 + 7c^2 > 48$
also $c = 2, -2$
a) $(1, -1, 2)$ ist äquivalent zu $(1, 2, 2)$
b) $(1, -1, -2)$ ist äquivalent zu $(1, 2, 2)$

5) $(a, b) = (1, -2)$ genügt den Reduktionsbedingungen nicht
für $\mathfrak{s} = (1, -1, 0)$

6) $(a, b) = (0, 2)$ $\qquad 32 + 7c^2 > 48$

also $c = 2, -2$

a) $(0, 2, 2)$ ist äquivalent zu $(1, 2, 2)$

b) $(0, 2, -2)$ ist äquivalent zu $(1, 2, 2)$

7) $(a, b) = (0, 1)$ $\qquad 8 + 7c^2 > 48$ unmöglich

8) $(a, b) = (0, 0)$ $\qquad 7c^2 > 48$ unmöglich

Aus $f_0 = \begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ erhält man also eine Klasse quaternärer Formen.

6. Resultate der Rechnung. In der nachstehenden Tabelle werden nun die Resultate der Rechnungen zusammengestellt.

f_0	(a, b, c)	d
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 0)$	$8f_{44} - 4$ $8f_{44} - 3$ $8f_{44}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$(1, 0, 1)$ $(1, 0, 0)$ $(0, 0, 1)$ $(0, 0, 0)$	$12f_{44} - 7$ $12f_{44} - 4$ $12f_{44} - 3$ $12f_{44}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$(1, 1, 1)$ $(1, 1, 0)$ $(1, 0, 1)$ $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 1)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 0, 1)$ $(0, 0, 0)$	$16f_{44} - 12$ $16f_{44} - 8$ $16f_{44} - 8$ $16f_{44} - 4$ $16f_{44} - 8$ $16f_{44} - 4$ $16f_{44} - 4$ $16f_{44}$
$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$	$(1, 1, 2)$ $(1, 0, 0)$ $(0, 1, 0)$ $(0, 1, 1)$ $(0, 0, 1)$ $(0, 0, 0)$	$20f_{44} - 15$ $20f_{44} - 8$ $20f_{44} - 7$ $20f_{44} - 12$ $20f_{44} - 3$ $20f_{44}$

f_0	(a, b, c)	d
1 1 2 0 1 1	(1, 1, 0) (1, 1, 1) (1, 0, 2) (1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1) (0, 0, 0)	$24f_{44} - 16$ $24f_{44} - 12$ $24f_{44} - 15$ $24f_{44} - 7$ $24f_{44} - 7$ $24f_{44} - 4$ $24f_{44}$
1 1 2 1 0 0	(1, 0, 2) (1, 1, 1) (1, 0, 0) (1, 0, 1) (0, 0, 2) (0, 0, 1) (0, 0, 0)	$24f_{44} - 20$ $24f_{44} - 11$ $24f_{44} - 8$ $24f_{44} - 11$ $24f_{44} - 12$ $24f_{44} - 3$ $24f_{44}$
1 1 2 0 1 0	(0, 1, 2) (1, 1, 0) (0, 0, 2) (1, 0, 0) (0, 1, 1) (0, 1, 0) (0, 0, 1) (0, 0, 0)	$28f_{44} - 23$ $28f_{44} - 15$ $28f_{44} - 16$ $28f_{44} - 8$ $28f_{44} - 11$ $28f_{44} - 7$ $28f_{44} - 4$ $28f_{44}$
1 1 2 0 0 0	(1, 1, 2) (1, 1, 1) (1, 1, 0) (1, 0, 2) (1, 0, 1) (1, 0, 0) (0, 1, 2) (0, 1, 1) (0, 1, 0) (0, 0, 2) (0, 0, 1) (0, 0, 0)	$32f_{44} - 32$ $32f_{44} - 20$ $32f_{44} - 16$ $32f_{44} - 24$ $32f_{44} - 12$ $32f_{44} - 8$ $32f_{44} - 24$ $32f_{44} - 12$ $32f_{44} - 8$ $32f_{44} - 16$ $32f_{44} - 4$ $32f_{44}$

f_0	(a, b, c)	d
1 2 2 1 0 2	$(0, 2, 0)$	$40f_{44} - 32$
	$(0, 2, 1)$	$40f_{44} - 23$
	$(0, 0, 2)$	$40f_{44} - 28$
	$(1, 1, 1)$	$40f_{44} - 15$
	$(1, 0, 0)$	$40f_{44} - 12$
	$(1, 0, 1)$	$40f_{44} - 23$
	$(0, 1, 2)$	$40f_{44} - 20$
	$(0, 1, 1)$	$40f_{44} - 7$
	$(0, 1, 0)$	$40f_{44} - 8$
	$(0, 0, 1)$	$40f_{44} - 7$
	$(0, 0, 0)$	$40f_{44}$
1 2 2 1 1 0	$(1, 2, 2)$	$48f_{44} - 48$
	$(0, 1, 2)$	$48f_{44} - 39$
1 2 2 0 0 2	$(1, 2, 0)$	$48f_{44} - 44$
	$(1, 2, 1)$	$48f_{44} - 36$
	$(1, 1, 2)$	$48f_{44} - 36$
	$(1, 1, -1)$	$48f_{44} - 36$
1 2 2 1 0 1	$(1, 0, 2)$	$52f_{44} - 47$
	$(0, 2, 2)$	$52f_{44} - 44$
1 2 2 1 0 0	$(0, 2, 2)$	$56f_{44} - 60$
1 2 2 0 0 1	$(1, 2, 2)$	$60f_{44} - 63$
1 2 2 0 0 0	$(1, 2, 2)$	$64f_{44} - 80$

6. Erste Tabelle quaternärer Formen. Aus der vorangehenden Zusammenstellung kann man sich nun eine *erste Tabelle quaternärer Formen* zusammenstellen, die sicher alle Klassen repräsentiert. Diese Tabelle enthält aber noch äquivalente Formen, die später eliminiert werden. In dieser Tabelle zeigt sich auch, daß folgende *Einschränkungen für die Diskriminante* d bestehen:

$$d \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod 4 \quad \text{und} \quad d > 1$$

Umgekehrt gibt es auch zu jeder Zahl n, die diesen Bedingungen genügt, eine positive quaternäre Form mit der Diskriminante $d = n$. Diese Tatsache wurde bewiesen von OSKAR WEBER [8].

Die Formen werden nun durch das Schema ihrer 10 Koeffizienten angegeben:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{i \leqslant k} f_{ik} x^i x^k \quad \text{oder kurz} \quad f = \begin{matrix} f_{11} & f_{22} & f_{33} & f_{44} \\ f_{12} & f_{13} & f_{23} & \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & \end{matrix}$$

	1 1 1 1	1 1 1 1			
$d = 4$:	1 1 0	0 0 0			
	1 0 0	1 1 1			
	1 1 1 1	1 1 1 1			
$d = 5$:	1 1 0	1 0 0			
	0 1 0	1 0 1			
	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
$d = 8$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
	0 0 0	1 0 0	1 1 0	1 0 1	0 1 1
	1 1 1 1				
$d = 9$:	1 0 0				
	0 0 1				
	1 1 1 2	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
$d = 12$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
	1 0 0	0 0 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1
	1 1 1 2				
$d = 13$:	1 1 0				
	0 1 0				
	1 1 1 2	1 1 1 1			
$d = 16$:	1 1 0	0 0 0			
	0 0 0	0 0 0			
	1 1 1 2				
$d = 17$:	1 0 0				
	1 0 1				
	1 1 1 3	1 1 1 2	1 1 1 2		
$d = 20$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0		
	1 0 0	1 0 0	1 1 1		

$$d = 21: \quad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{matrix}$$

$$d = 24: \quad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 1&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 0&1&1 \end{matrix}$$

$$d = 25: \quad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 1&1&2 \end{matrix}$$

$$d = 28: \quad \begin{matrix} 1&1&1&4\\ 1&1&0\\ 1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 0&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&0&0\\ 1&0&2 \end{matrix}$$

$$d = 29: \quad \begin{matrix} 1&1&1&4\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&0&0\\ 1&0&1 \end{matrix}$$

$$d = 32: \quad \begin{matrix} 1&1&1&4\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&0&0\\ 1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&2\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 0&1&1\\ 1&1&0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1&1&2&2\\ 0&0&0\\ 1&1&2 \end{matrix}$$

$$d = 33: \quad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&0&0\\ 0&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 0&1&1\\ 1&0&2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 0&1&0\\ 0&1&2 \end{matrix}$$

$$d = 36: \quad \begin{matrix} 1&1&1&5\\ 1&1&0\\ 1&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 1&0&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 0&0&0\\ 1&1&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 0&1&1\\ 1&1&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&0&0\\ 0&0&2 \end{matrix}$$

$$d = 37: \quad \begin{matrix} 1&1&1&5\\ 1&1&0\\ 0&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 0&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&0&0\\ 1&1&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&0&0\\ 1&0&1 \end{matrix}$$

$$d = 40: \quad \begin{matrix} 1&1&1&5\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 0&0&0\\ 1&1&0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 0&0&0\\ 1&0&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&1&3\\ 0&0&0\\ 0&1&1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1&1&2&2\\ 1&1&0\\ 0&0&0 \end{matrix}$$

	1 1 2 2	1 1 2 2	1 1 2 2	1 1 2 2	
	1 0 0	0 1 0	0 0 0	0 0 0	
	1 0 0	0 0 2	1 0 2	0 1 2	
	1 1 1 4	1 1 2 2	1 1 2 2	1 1 2 2	
$d = 41$:	1 0 0	0 1 1	0 1 1	0 1 0	
	1 0 1	1 0 0	0 1 0	1 1 0	
	1 1 1 6	1 1 1 4	1 1 1 3	1 1 1 3	1 1 1 3
$d = 44$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
	1 0 0	1 0 0	1 0 0	0 1 0	0 0 1
	1 1 2 2	1 1 2 2			
	0 1 1	0 0 0			
	0 0 1	1 1 1			
	1 1 1 6	1 1 1 4	1 1 2 3	1 1 2 2	1 1 2 2
$d = 45$:	1 1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0	0 1 0
	0 1 0	0 0 1	1 1 2	0 0 1	0 1 1
	1 1 1 6	1 1 1 4	1 1 1 3	1 1 2 3	1 1 2 2
$d = 48$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	1 1 0	0 1 1
	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 1	0 0 0
	1 1 2 2	1 1 2 2	1 1 2 2	1 1 2 2	1 2 2 2
	1 0 0	0 1 0	0 0 0	0 0 0	1 0 2
	0 0 0	1 0 0	1 1 0	0 0 2	0 2 0
	1 2 2 2	1 2 2 2			
	1 1 0	0 0 0			
	1 2 2	1 2 2			
	1 1 2 2				
$d = 49$:	0 1 0				
	0 1 0				
	1 1 1 7	1 1 1 4	1 1 2 3	1 1 2 3	1 1 2 2
$d = 52$:	1 1 0	0 0 0	1 1 0	1 0 0	0 1 0
	1 0 0	1 1 1	1 0 0	1 0 2	0 0 1
	1 1 2 2	1 1 2 2	1 2 2 2	1 2 2 2	1 2 2 2
	0 0 0	0 0 0	1 0 2	0 0 2	1 0 0
	1 0 1	0 1 1	0 0 2	1 2 0	0 2 2
	1 1 1 7	1 1 1 5	1 1 2 3		
$d = 53$:	1 1 0	1 0 0	1 1 0		
	0 1 0	1 0 1	0 1 0		

$$d = 56:\quad \begin{matrix}1&1&1&7\\1&1&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&5\\1&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\1&1&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\0&1&1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&1&2&3\\0&1&1\\1&1&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&2\\0&1&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&2\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&2\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}$$

$$d = 57:\quad \begin{matrix}1&1&1&5\\1&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\1&1&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\0&1&1\\1&0&2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\1&0&2\\1&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\1&0&2\\0&2&1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2&2&2\\1&1&0\\0&1&2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\1&0&1\\1&0&2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\0&0&1\\1&2&2\end{matrix}$$

$$d = 60:\quad \begin{matrix}1&1&1&8\\1&1&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&5\\1&0&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\1&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&1&4\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&1&2&3\\1&1&0\\0&0&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\0&1&1\\1&1&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\1&0&0\\0&0&2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&2\\0&0&0\\0&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\1&0&2\\0&1&2\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2&2&2\\0&0&2\\1&2&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\0&0&2\\1&1&2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\0&0&2\\1&1&-1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&2&2&2\\1&0&1\\0&2&2\end{matrix}$$

$$d = 61:\quad \begin{matrix}1&1&1&8\\1&1&0\\0&1&0\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\1&0&0\\1&1&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\1&0&0\\1&0&1\end{matrix}\qquad \begin{matrix}1&1&2&3\\0&1&0\\0&1&2\end{matrix}$$

3. Kapitel

In diesem Kapitel folgen nun weitere *Äquivalenzuntersuchungen* sowie hinreichende Kriterien für die Inäquivalenz von zwei Formen. Als Endresultat erhält man dann ein *vollständiges Repräsentantensystem von inäquivalenten reduzierten Formen.*

1. Weitere Äquivalenzuntersuchungen. Es werden nun vier Sätze aufgestellt über Äquivalenz und Inäquivalenz von Formen.

Satz 1. *Eine Form f geht in eine äquivalente über, wenn man die x^i in irgendeiner Weise permutiert.*

Satz 2. *Eine Form f geht in eine äquivalente über, wenn man das Tripel (a, b, c) durch ein äquivalentes ersetzt und dann die x^i permutiert.*

Satz 3. *Zwei äquivalente reduzierte quaternäre Formen stimmen in den Diagonalkoeffizienten f_{ii} überein.*

Beweis: Nach Gleichung (1.6) gilt:

$$N_k = f_{kk} \quad \text{für} \quad k = 1, 2, 3, 4 .$$

wo N_k die sukzessiven Minima der Form bedeuten, die durch das Gitter eindeutig bestimmt sind. Zu äquivalenten Formen gehören aber gleiche Gitter, also gleiche N_k, also gleiche f_{kk}.

Definition. Unter der zu einer quaternären Form *zugehörigen ternären bzw. binären Form* verstehe ich die Form, die entsteht, wenn man $x^4 = 0$ bzw. $x^3 = x^4 = 0$ setzt.

Satz 4. *Zwei reduzierte quaternäre Formen mit übereinstimmenden Diagonalkoeffizienten f_{kk} sind inäquivalent, wenn*

a) $f_{22} < f_{33}$ *und die zugehörigen binären Formen inäquivalent sind.*

b) $f_{33} < f_{44}$ *und die zugehörigen ternären Formen inäquivalent sind.*

Beweis: indirekt. Seien f und f' zwei äquivalente, reduzierte quaternäre Formen, und $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{e}'_k$ die entsprechenden reduzierten Gitterbasen.

a) Sei ferner $f_{22} = f'_{22} = |\mathfrak{e}_2|^2 = |\mathfrak{e}'_2|^2 < f_{33} = f'_{33} = |\mathfrak{e}_3|^2 = |\mathfrak{e}'_3|^2$

Dann spannen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ dieselbe Ebene auf wie $\mathfrak{e}'_1$ und $\mathfrak{e}'_2$, denn wäre z.B. $\mathfrak{e}'_1$ von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ linear unabhängig, so würde gelten:

$$N_3 \leq |\mathfrak{e}'_1|^2 < |\mathfrak{e}_3|^2 = f_{33} = N_3 \quad \text{also} \quad N_3 < N_3$$

Dem von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{e}'_1$ und $\mathfrak{e}'_2$ aufgespannten Gitter entsprechen aber die zu f bzw. f' zugehörigen binären Formen. Weil die Gitter gleich sind, müssen aber diese Formen äquivalent sein.

Sind also die binären Formen inäquivalent, so sind es auch die quaternären.

b) Der Beweis für den Fall $f_{33} < f_{44}$ verläuft genau gleich.

2. Beispiele. Mittels der Sätze 1 und 2 kann nun die Äquivalenz von einzelnen Formen der Tabelle am Schluß des 2. Kapitels gezeigt werden. Wir wollen das an zwei Beispielen erläutern:

$d = 5$: Die erste Form geht in die zweite über bei der Permutation
$x^1 = \bar{x}^4,\ x^2 = \bar{x}^1,\ x^3 = \bar{x}^3,\ x^4 = \bar{x}^2 .$

$d = 32$: Die beiden letzten Formen sind äquivalent. Man ersetzt nämlich zuerst das Tripel $(1, 1, 0)$ durch das äquivalente $(0, 0, \bar{2})$. Dann permutiert man: $x^1 = \bar{x}^2,\ x^2 = \bar{x}^1,\ x^3 = \bar{x}^4,\ x^4 = \bar{x}^3 .$

Von den so als äquivalent erkannten Formen nimmt man wieder je einen Repräsentanten und erhält folgende *neue Tabelle:*

3. Tabellen reduzierter, positiver quaternärer quadratischer Formen. Die Formen werden wieder durch das Schema ihrer 10 Koeffizienten angegeben.

$$f = \sum_{i \leqq k} f_{ik}\, x^i\, x^k = \begin{array}{llll} f_{11} & f_{22} & f_{33} & f_{44} \\ f_{12} & f_{13} & f_{23} & \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & \end{array}$$

$$d = 4: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$d = 5: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$d = 8: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$d = 9: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$d = 12: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$d = 13: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$d = 16: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$d = 17: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$d = 20: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$d = 21: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

	1 1 1 3	1 1 1 2	1 1 1 2		
$d = 24$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0		
	0 0 0	0 0 0	1 1 0		
	1 1 2 2				
$d = 25$:	1 1 0				
	1 1 2				
	1 1 1 4	1 1 1 2	1 1 2 2		
$d = 28$:	1 1 0	0 0 0	1 1 0		
	1 0 0	1 0 0	0 1 1		
	1 1 1 4	1 1 1 3			
$d = 29$:	1 1 0	1 0 0			
	0 1 0	1 0 1			
	1 1 1 4	1 1 1 3	1 1 1 2	1 1 2 2	1 1 2 2
$d = 32$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	1 1 0	0 1 1
	0 0 0	1 0 0	0 0 0	1 0 0	1 1 0
	1 1 1 3	1 1 2 2	1 1 2 2		
$d = 33$:	1 0 0	1 1 0	0 1 0		
	0 0 1	0 1 0	0 1 2		
	1 1 1 5	1 1 1 3	1 1 1 3	1 1 2 2	1 1 2 2
$d = 36$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	0 1 1	1 0 0
	1 0 0	0 0 0	1 1 1	1 1 1	0 0 2
	1 1 1 5	1 1 2 2			
$d = 37$:	1 1 0	1 1 0			
	0 1 0	0 0 1			
	1 1 1 5	1 1 1 3	1 1 2 2	1 1 2 2	
$d = 40$:	1 1 0	0 0 0	1 1 0	0 1 0	
	0 0 0	1 1 0	0 0 0	0 0 2	
	1 1 1 4	1 1 2 2			
$d = 41$:	1 0 0	0 1 1			
	1 0 1	1 0 0			
	1 1 1 6	1 1 1 4	1 1 1 3	1 1 2 2	
$d = 44$:	1 1 0	1 0 0	0 0 0	0 1 1	
	1 0 0	1 0 0	1 0 0	0 0 1	
	1 1 1 6	1 1 1 4	1 1 2 3	1 1 2 2	1 1 2 2
$d = 45$:	1 1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0	0 1 0
	0 1 0	0 0 1	1 1 2	0 0 1	0 1 1

$$d = 48:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;6\\1\;1\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;4\\1\;0\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;3\\0\;0\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;1\;0\\0\;1\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;1\;1\\0\;0\;0\end{array}$$

$$\begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\1\;0\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;1\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;0\;0\\0\;0\;2\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;2\;2\;2\\1\;0\;2\\0\;2\;0\end{array}$$

$$d = 49:\quad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;1\;0\\0\;1\;0\end{array}$$

$$d = 52:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;7\\1\;1\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;4\\0\;0\;0\\1\;1\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;1\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;0\;0\\1\;0\;2\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;1\;0\\0\;0\;1\end{array}$$

$$\begin{array}{l}1\;2\;2\;2\\1\;0\;2\\0\;0\;2\end{array}$$

$$d = 53:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;7\\1\;1\;0\\0\;1\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;5\\1\;0\;0\\1\;0\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;1\;0\\0\;1\;0\end{array}$$

$$d = 56:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;7\\1\;1\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;5\\1\;0\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;4\\0\;0\;0\\1\;1\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\0\;1\;1\\1\;1\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;1\;0\\0\;0\;0\end{array}$$

$$d = 57:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;5\\1\;0\;0\\0\;0\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;1\;0\\0\;0\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\0\;1\;1\\1\;0\;2\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;2\;2\;2\\1\;0\;2\\1\;0\;1\end{array}$$

$$d = 60:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;8\\1\;1\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;5\\1\;0\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;1\;4\\0\;0\;0\\1\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;1\;0\\0\;0\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\0\;1\;1\\1\;1\;1\end{array}$$

$$\begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;0\;0\\0\;0\;2\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;2\\0\;0\;0\\0\;0\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;2\;2\;2\\1\;0\;2\\0\;1\;2\end{array}$$

$$d = 61:\quad \begin{array}{l}1\;1\;1\;8\\1\;1\;0\\0\;1\;0\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\1\;0\;0\\1\;0\;1\end{array}\qquad \begin{array}{l}1\;1\;2\;3\\0\;1\;0\\0\;1\;2\end{array}$$

4. Beweis der Inäquivalenz. Die Sätze 3 und 4 zeigen uns nun, daß *alle in die vorstehende Tabelle aufgenommenen Formen inäquivalent sind.* Nur bei der Diskriminante $d = 48$ versagen unsere Kriterien für zwei

Formenpaare, für die die Inäquivalenz nun auf anderem Wege bewiesen werden soll.

a) Die *achte Form* ist eine sogenannte *gerade Form*, d.h. alle Koeffizienten f_{ik} sind gerade für $i \neq k$. Somit ist sie sicher inäquivalent zur fünften und zur siebenten Form, denn nach BACHMANN [1] Seite 425 sind gerade und ungerade Formen sogar in verschiedenen Ordnungen.

b) Somit bleibt nur noch die *Inäquivalenz der fünften und siebenten Form* zu zeigen. Die zu den beiden Formen zugehörigen binären Formen sind identisch, ferner ist $f_{22} < f_{33}$. Wären die beiden Formen äquivalent, so würden wieder die von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bzw. die von $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ aufgespannten Ebenen übereinstimmen (Beweis wie bei Satz 4), wobei $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{e}_k'$ die zu den Formen zugehörigen reduzierten Gitterbasen sind.

Bei der Äquivalenztransformation, die die eine Form in die andere überführt, geht die binäre Form in sich über. Nach DIRICHLET-DEDEKIND [3] Seite 152 sind die einzigen Automorphismen dieser Form die folgenden:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1 &= \pm\, \mathfrak{e}_1' \text{ oder } \pm\, \mathfrak{e}_2' \\ \mathfrak{e}_2 &= \pm\, \mathfrak{e}_2' \text{ oder } \pm\, \mathfrak{e}_1' \\ \mathfrak{e}_3 &= \sum_{i=1}^{4} a_i\, \mathfrak{e}_i' \\ \mathfrak{e}_4 &= \sum_{k=1}^{4} b_k\, \mathfrak{e}_k' \end{aligned}$$

Wenn die beiden Formen äquivalent sind, muß eine ganzrationale Lösung a_i und b_k existieren.

$$|\mathfrak{e}_4|^2 = 2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_3^2 + 2b_4^2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 \tag{1}$$

$$|\mathfrak{e}|_3^2 = 2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2 + 2a_4^2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 \tag{2}$$

$$(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_3) = \tfrac{1}{2} = \pm\,(a_1 + \tfrac{1}{2}a_3) \tag{3}$$

$$(\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3) = 0 = \pm\,(a_2 + \tfrac{1}{2}a_3) \tag{4}$$

$$(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_4) = \tfrac{1}{2} = \pm\,(b_1 + \tfrac{1}{2}b_3) \tag{5}$$

$$(\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_4) = 0 = \pm\,(b_2 + \tfrac{1}{2}b_3) \tag{6}$$

Dies gilt, falls $\mathfrak{e}_1 = \pm\,\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2 = \pm\,\mathfrak{e}_2'$. Im anderen Falle vertauschen sich die linken Seiten von (3) bis (6). Aus (1) und (2) erhält man nun:

$$2 = (b_1 + \tfrac{1}{2}b_3)^2 + (b_2 + \tfrac{1}{2}b_3)^2 + 3/2\, b_3^2 + 2b_4^2$$

$$2 = (a_1 + \tfrac{1}{2}a_3)^2 + (a_2 + \tfrac{1}{2}a_3)^2 + 3/2\, a_3^2 + 2a_4^2$$

Durch einsetzen von (3) bis (6) erhält man dann:

$$6a_3^2 + 8a_4^2 = 7$$
$$6b_3^2 + 8b_4^2 = 7$$

Diesen Gleichungen sieht man aber unmittelbar an, daß es *keine ganzrationale Lösung* a_i und b_k gibt. *Also sind die beiden Formen inäquivalent.*

Untersucht man diese Gleichungen noch etwas genauer, so zeigt der Satz von LAGRANGE, daß sie *nicht einmal rational lösbar sind.* Also sind die beiden betrachteten Formen nicht nur inäquivalent, sondern sogar in *verschiedenen Geschlechtern.* Dieses Resultat hätte man auch direkt durch Untersuchung der sogenannten Geschlechtscharaktere erhalten können.

5. Kontrollen

a) Die Tabellen von BRANDT-INTRAU wurden für die benötigten ternären Formen nochmals durchgerechnet.

b) Von S.B. TOWNES erschien eine *Tabelle der geraden positiven quaternären Formen* bis $D = 25$. Damit konnten die Formen meiner Tabelle bis $d = 25$ verglichen werden. Mit Ausnahme der Diskriminante $d = 5$ stimmen sie bis auf Äquivalenz mit den Formen von TOWNES überein. Für $d = 5$ sind bei TOWNES nur 9 statt 10 Koeffizienten angegeben.

4. Kapitel

1. Bezeichnungen. Der Äquivalenzbegriff kann noch verfeinert werden, indem man *eigentliche und uneigentliche Äquivalenz* unterscheidet. *Man nennt zwei Formen eigentlich äquivalent, wenn die Determinante der Transformationsmatrix den Wert* $+1$ *hat, und uneigentlich äquivalent, wenn sie den Wert* -1 *hat.* So kann man die Formen nun in *Klassen im engeren Sinn* einteilen, indem man in eine Äquivalenzklasse nur eigentlich äquivalente Formen aufnimmt. Dieses Kapitel soll nun Aufschluß geben über die Klasseneinteilung im engeren Sinn.

Dazu brauchen wir den Begriff der *zweiseitigen Formenklasse: Eine Formenklasse heißt zweiseitig, wenn ihre Formen gleichzeitig eigentlich und uneigentlich äquivalent sind.* Die Formenklasse ist dann gleichzeitig eine Klasse im engeren Sinn und eine Klasse im weiteren Sinn.

Wir wollen nun nochmals alle Formenklassen der Tabelle des 3. Kapitels durchgehen und die zweiseitigen Klassen heraussuchen. Alle übrigen Klassen zerfallen dann in je 2 Klassen im engeren Sinn.

2. Matrixschreibweise einer quadratischen Form. Im folgenden ist es bequem, wenn man sich der *Matrixschreibweise* einer Form bedient, wie sie z.B. von WATSON [7] verwendet wird.

Bezeichnet man die Matrix der Koeffizienten g_{ik} einer Form mit G, einen Zeilenvektor mit den Komponenten $x^1, \ldots, x^n$ mit $\mathfrak{x}$, den analogen Spaltenvektor mit $\mathfrak{x}'$, so kann die Form, unter Benützung der bekannten Matrixmultiplikation, geschrieben werden als

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \mathfrak{x} \cdot G \cdot \mathfrak{x}'$$

Geht man nun zu einer eigentlich oder uneigentlich äquivalenten Form $\bar{f}$ über, und bezeichnet man die Transformationsmatrix mit T, so gilt:

$$\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}} \cdot T \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}' = T' \cdot \bar{\mathfrak{x}}'$$

wobei T' die zu T transponierte Matrix bedeutet, und

$$\det T = |T| = |T'| = \pm 1$$

Dann schreibt sich $\bar{f}$ als

$$\bar{f} = \bar{\mathfrak{x}} \cdot \overline{G} \cdot \bar{\mathfrak{x}}' \quad \text{mit} \quad \overline{G} = T \cdot G \cdot T'$$

3. Ambige Formen. *Eine Form f heißt ambig, wenn sie zu sich selbst uneigentlich äquivalent ist,* d.h. wenn ein Automorphismus mit Determinante -1 existiert.

Man sieht leicht ein, daß die Eigenschaft, ambig zu sein, nicht nur einer Form f zukommt, *sondern der ganzen Formenklasse im weiteren Sinn,* die durch f repräsentiert wird.

Denn sei G die Koeffizientenmatrix von f, $\overline{G}$ diejenige einer äquivalenten Form $\bar{f}$, so gilt:

$$\overline{G} = T \cdot G \cdot T' \quad \text{mit} \quad |T| = |T'| = \pm 1\,.$$

Ist nun A ein Automorphismus von f mit $|A| = -1$, so gilt:

$$G = A \cdot G \cdot A'$$

Dann ist aber $\overline{A} = T \cdot A \cdot T^{-1}$ ein Automorphismus von $\bar{f}$, denn

$$\begin{aligned} \overline{A} \cdot \overline{G} \cdot \overline{A}' &= (T \cdot A \cdot T^{-1}) \cdot (T \cdot G \cdot T') \cdot (T \cdot A \cdot T^{-1})' \\ &= T \cdot A \cdot T^{-1} \cdot T \cdot G \cdot T' \cdot (T')^{-1} \cdot A' \cdot T' \\ &= T \cdot G \cdot T' = \overline{G} \end{aligned}$$

und es ist

$$|\overline{A}| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = |T|^2 \cdot |A| = -1$$

Damit ist also auch $\bar{f}$ ambig, wenn f ambig ist.

4. Zweiseitige Formenklassen. Alle Untersuchungen über zweiseitige Formenklassen können zurückgeführt werden auf Untersuchungen über ambige Formen, denn es gilt der

Satz: *Eine Formenklasse ist genau dann zweiseitig, wenn sie durch eine ambige Form repräsentiert wird.*

Beweis:

a) f und $\bar{f}$ seien zwei Formen aus einer zweiseitigen Formenklasse. Dann gibt es also eine Äquivalenztransformation T mit $|T| = 1$ und eine andere, S, mit $|S| = -1$. Dann ist aber $A = T^{-1} \cdot S$ ein Automorphismus von f, denn

$$A \cdot G \cdot A' = T^{-1} \cdot S \cdot G \cdot S' \cdot (T')^{-1}$$
$$= T^{-1} \cdot \overline{G} \cdot (T')^{-1} = G$$

und es ist

$$|A| = |T^{-1}| \cdot |S| = -1$$

also ist f ambig.

b) Sei f eine ambige Form, und $\bar{f}$ eine zu f äquivalente Form. Dann sind f und $\bar{f}$ sowohl eigentlich als auch uneigentlich äquivalent, d. h. die durch f repräsentierte Formenklasse ist zweiseitig. Denn ist

$$\overline{G} = T \cdot G \cdot T' \quad \text{mit} \quad |T| = +1$$

und

$$G = A \cdot G \cdot A' \quad \text{mit} \quad |A| = -1$$

so ist $S = T \cdot A$ eine uneigentliche Äquivalenztransformation.

$$S \cdot G \cdot S' = T \cdot A \cdot G \cdot A' \cdot T' = T \cdot G \cdot T' = \overline{G}$$

und

$$|S| = |T| \cdot |A| = -1 .$$

Genau gleich kann man aus einer uneigentlichen Äquivalenztransformation T eine eigentliche konstruieren.

5. Erste Untersuchungen der Tabelle des 3. Kapitels. Man kann einigen der tabellierten Formen direkt ansehen, daß sie ambig sind.

a) Ersetzt man z. B. x^4 durch $-x^4$, so ist das eine *uneigentliche Äquivalenztransformation.* Sind nun aber $f_{14} = f_{24} = f_{34} = 0$, so ist diese Transformation ein Automorphismus, die Form also ambig. Diese Transformation kann benützt werden für $d = 8, 12, 16, 24, 32, 36, 40, 48, 56, 60$. *Analog kann man natürlich auch die anderen x^i durch $-x^i$ ersetzen.*

b) Eine weitere einfache *uneigentliche Äquivalenztransformation* ist das *Vertauschen von zwei Variabeln.* Ist die Form invariant gegenüber einer solchen Transformation, so ist sie ambig.

Das soll am Beispiel von $d = 9$ erläutert werden: Durch Vertauschen von x^1 und x^2 vertauschen sich f_{11} und f_{22}, f_{13} und f_{23}, f_{14} und f_{24}. Bei der angegebenen Form ist aber $f_{11} = f_{22}$, $f_{13} = f_{23}$, $f_{14} = f_{24}$. Also ist diese Form invariant gegenüber der Vertauschung, also ambig.

c) Man kann nun auch noch in einer tabellierten Form zuerst das Tripel (a, b, c) durch ein äquivalentes ersetzen (siehe 2. Kapitel), also *zu einer äquivalenten Form übergehen*, und dann die unter a) und b) angegebenen Methoden benützen.

Dieses Verfahren geht z. B. bei der letzten Form von $d = 28$. Man ersetzt das Tripel $(0, 1, 1)$ durch das äquivalente $(1, 0, 2)$ und sieht dann, daß die Form invariant gegenüber Vertauschung von x^3 und x^4 geworden ist, also ambig ist.

Die Methoden a), b) und c) führen schon bei recht vielen der tabellierten Formen zum Ziel. Bei den restlichen kommt man durch *Berechnung aller Automorphismen* zu einem Ergebnis.

6. Berechnung aller Automorphismen einer vorgegebenen reduzierten Form. Im 1. Kapitel, Abschnitt 5 haben wir gesehen, daß die Minimalvektoren eines Gitters (mit Ausnahme der Formenklasse mit Diskriminante $d = 4$ und ihrer Vielfachen) immer auch eine Gitterbasis bilden, und umgekehrt die Vektoren einer reduzierten Gitterbasis Minimalvektoren sind. Die *Minimalvektoren können aber leicht berechnet werden*, indem man alle Lösungen der Gleichung

$$f(\mathfrak{x}) = N_i \qquad i = 1, 2, 3, 4 .$$

sucht. Dazu bringt man am besten die Form f mittels *quadratischer Ergänzung* auf die Gestalt

$$f = \sum_{i=1}^{4} a_i y_i^2$$

In dieser Form findet man dann leicht alle Minimalvektoren.

Nimmt man nun für $\mathfrak{e}_1'$ einen Minimalvektor mit der Norm N_1, für $\mathfrak{e}_2'$ einen mit der Norm N_2, der von $\mathfrak{e}_1'$ linear unabhängig ist usw., so erhält man für jede zulässige Wahl von $(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3', \mathfrak{e}_4')$ eine *neue reduzierte Gitterbasis*, also eine *äquivalente Form*. Unter allen diesen Äquivalenztransformationen kann man nun noch diejenigen heraussuchen, für die die *Skalarprodukte invariant* sind, das heißt

$$(\mathfrak{e}_i', \mathfrak{e}_k') = (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k) \qquad i, k = 1, 2, 3, 4 .$$

So erhält man das *vollständige System aller Automorphismen* einer vorgegebenen Form. Gibt es unter ihnen solche mit Determinante -1, so ist die Form ambig, im anderen Falle nicht. *Also kann man von jeder Form entscheiden, ob sie ambig ist oder nicht.*

Diese Untersuchung wurde für $d = 5$ von O. Weber [8] durchgeführt. Wir wollen am Beispiel der Diskriminante $d = 45$ (dritte Form) sehen, wie die Rechnung im einzelnen aussieht. Zur Vereinfachung setze ich:

$$x^1 = x, \ x^2 = y, \ x^3 = z, \ x^4 = u .$$

$$f = x^2 + y^2 + 2z^2 + 3u^2 + xy + xz + xu + yu + 2zu$$

Durch quadratische Ergänzung erhält man:

$$60f = 15(2x + y + z + u)^2 + 5(3y - z + u)^2 + (10z + 7u)^2 + 111u^2$$

Nun sucht man alle Lösungen von $f = 1$, $f = 2$ und $f = 3$.
Man erhält so die *folgenden Minimalvektoren:*

$$\text{Norm 1:} \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_1 = \pm(1, 0, 0, 0) \\ \mathfrak{s}_2 = \pm(0, 1, 0, 0) \\ \mathfrak{s}_3 = \pm(1, -1, 0, 0) \end{cases}$$

$$\text{Norm 2:} \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_4 = \pm(0, 0, 1, 0) \\ \mathfrak{s}_5 = \pm(1, 0, -1, 0) \\ \mathfrak{s}_6 = \pm(1, -1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\text{Norm 3:} \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_7 = \pm(1, 0, 0, -1) \\ \mathfrak{s}_8 = \pm(0, 0, 0, 1) \\ \mathfrak{s}_9 = \pm(0, 1, 0, -1) \end{cases}$$

Bei den Vektoren der Norm 3 muß man nur diejenigen berücksichtigen, die von allen anderen linear unabhängig sind, also nur diejenigen, deren vierte Komponente nicht Null ist. Nun rechnet man sich die nötigen Skalarprodukte aus, wobei z.B. 1.2 das Skalarprodukt $(+\mathfrak{s}_1, +\mathfrak{s}_2)$ bedeuten soll.

$1.2 = \frac{1}{2}$	$2.3 = -\frac{1}{2}$	$3.4 = \frac{1}{2}$	$4.7 = -\frac{1}{2}$
$1.3 = \frac{1}{2}$	$2.4 = 0$	$3.5 = 0$	$4.8 = 1$
$1.4 = \frac{1}{2}$	$2.5 = \frac{1}{2}$	$3.6 = \frac{1}{2}$	$4.9 = -1$
$1.5 = \frac{1}{2}$	$2.6 = -\frac{1}{2}$	$3.7 = \frac{1}{2}$	$5.7 = 1$
$1.6 = 0$	$2.7 = 0$	$3.8 = 0$	$5.8 = -\frac{1}{2}$
$1.7 = \frac{1}{2}$	$2.8 = \frac{1}{2}$	$3.9 = 0$	$5.9 = \frac{1}{2}$
$1.8 = \frac{1}{2}$	$2.9 = \frac{1}{2}$		$6.7 = 1$
$1.9 = 0$			$6.8 = -1$
			$6.9 = \frac{1}{2}$

Dann sucht man eine neue Basis $(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3', \mathfrak{e}_4')$ so zu bestimmen, daß die neuen Skalarprodukte der Basisvektoren mit denen der gegebenen Form übereinstimmen. So findet man z. B. die folgende neue Basis

$$(\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \mathfrak{e}_3', \mathfrak{e}_4') = (\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_3, \mathfrak{s}_5, \mathfrak{s}_7)$$

Die Transformationsmatrix T heißt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und man sieht, daß $|T| = -1$. *Also ist die betrachtete Form ambig.*

7. Resultate. Mit den in den Abschnitten 5 und 6 dargestellten Methoden findet man:

Alle Formen der Tabelle im 3. Kapitel sind ambig, d.h. alle Formenklassen bis $d = 61$ *sind zweiseitig.*

Also ändert sich bei den betrachteten Formenklassen nichts, wenn man der Klasseneinteilung die eigentliche Äquivalenz zugrunde legt.

LITERATUR

[1] P. BACHMANN, *Die Arithmetik der quadratischen Formen.* Leipzig 1898.

[2] BRANDT-INTRAU, *Tabellen reduzierter, positiver ternärer quadratischer Formen.* Akademie Verlag Berlin 1958.

[3] DIRICHLET-DEDEKIND: *Vorlesungen über Zahlentheorie.* 1893.

[4] H. MINKOWSKI, *Gesammelte Abhandlungen II,* Herausgegeben von D. HILBERT. G. TEUBNER, Leipzig und Berlin 1911.

[5] S.B. TOWNES, *Table of reduced positive quaternary quadratic forms.* Ann. of Math., *41* (1940), 57–58.

[6] B.L. VAN DER WAERDEN, *Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen.* Acta math. *96* (1956), 265–309.

[7] G.L. WATSON, *Integral quadratic forms.* Cambridge University Press 1960.

[8] O. WEBER, *Über die Reduktion und die Darstellungen positiver quaternärer quadratischer Formen.* Comment. Math. Helv. *36* (1962), 181–213.

(Eingegangen den 8. Februar 1963)