Sur les théorèmes de Kolmogorov et Smirnov dans le cas d'une distribution discontinue

Par Henri Carnal, Zurich

Introduction

Les théorèmes de Kolmogorov et Smirnov qui ont trait à l'écart, l'un entre une loi de distribution empirique et une loi de distribution théorique continue, l'autre entre deux distributions empiriques furent démontrés pour la première fois en 1933, respectivement 1939. Kolmogorov [1] base sa démonstration sur un lemme qui généralise le théorème de la limite centrale. D'autres démonstrations des mêmes théorèmes furent publiées par Feller [2] et par Doob [3] et Donsker [4]. Feller utilise les fonctions génératrices et Doob emploie la théorie des processus stochastiques.

Ces théorèmes furent généralisés dans le cas discontinu par M. P. Schmid [5], en utilisant la méthode de démonstration de Kolmogorov. Dans ce travail, nous nous proposons d'étendre également au cas discontinu la méthode de Feller.

Dans le paragraphe 1, nous définissons les fonctions $\Phi(z, f_1, \ldots, f_n)$ et $\Phi^*(z, f_1, \ldots, f_n)$ qui caractérisent l'écart entre les lois de distribution théorique et empirique. Les paragraphes 2 et 4 sont consacrés aux calculs, le paragraphe 3 à un théorème sur les transformations de Laplace utilisé par Feller [2]. Le paragraphe 5 contient les expressions pour Φ et Φ^*. Dans le paragraphe 6, nous démontrons que l'écart entre deux distributions empiriques peut aussi être caracténsé par la fonction Φ.

Note: Cette étude représente la deuxième partie d'un travail de diplôme présenté en juin 1961 à l'EPF de Zurich. Le sujet de ce travail de diplôme m'a été proposé par M. le professeur W. Saxer.

1. Enoncé du problème

Soit $F(x)$ une loi de distribution présentant des discontinuités en $x_1, \ldots, x_n$. Nous posons:

$$f_0 = 0\,; \qquad f_{2n+1} = 1$$
$$f_{2\nu-1} = F(x_\nu - 0)\,; \qquad f_{2\nu} = F(x_\nu + 0) \qquad \nu = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Soient $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes réparties suivant la loi de distribution $F(x)$ définie ci-dessus. Nous posons:

$$S_N(x) = \frac{1}{N}\,(\text{Nombre de } X_i\,;\; X_i \leq x)\,.$$

Si $F(x+a) = F(x)$ pour $a > 0$, la probabilité : $Pr\{x < X_i \leq x + a\}$ est nulle. Donc, si $F(x) \geq F(X_i)$, on a avec la probabilité 1, $x \geq X_i$.

Donc, avec probabilité 1 :

$$S_N(x) = \frac{1}{N}(\text{Nombre de } X_i \leq x) = \frac{1}{N}(\text{Nombre de } F(X_i) \leq F(x)) = S_N^0(y).$$

A la variable $y = F(x)$ correspond la loi de distribution suivante:

$$F^0(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leq 0 \\ y & \text{pour } f_{2\nu} \leq y \leq f_{2\nu+1} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n \\ f_{2\nu-1} & \text{pour } f_{2\nu-1} \leq y < f_{2\nu} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \\ 1 & \text{pour } y \geq 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Alors, avec la probabilité 1:

$$S_N(x) - F(x) = S_N^0(y) - F^0(y) = S_N^0(y) - y \qquad y = F(x)$$

Désignons par I la réunion des intervalles fermés $[f_{2\nu}, f_{2\nu+1}]$, où $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Pour tout $x, y(x) = F(x) \in I$.

On a par conséquent:

$$Pr\{\sup_{-\infty < x < \infty} |S_N(x) - F(x)| < A\} = Pr\{\sup_{y \in I} |S_N^0(y) - y| < A\}$$

Cette expression ne dépend pas de la forme particulière de $F(x)$, mais uniquement de A, $f_1, \ldots, f_{2n}$. Le problème particulier que nous traitons consiste à chercher:

$$\lim_{N \to \infty} Pr\{\sup_{-\infty < x < \infty} |S_N(x) - F(x)| < zN^{-1/2}\} = \Phi(z, f_1, \ldots, f_{2n})$$

respectivement

$$\lim_{N \to \infty} Pr\{\sup_{-\infty < x < \infty} (S_N(x) - F(x)) < zN^{-1/2}\} = \Phi^*(z, f_1, \ldots, f_{2n})$$

Puisque ces expressions ne dépendent pas de la forme particulière de $F(x)$ entre les points de discontinuité, nous supposerons que $F(x)$ y est monotone croissante, comme par exemple la loi de distribution définie en (1.2). Donc, pour $f_{2\nu} \leq y \leq f_{2\nu+1}$, $F^{-1}(y)$ est défine univoquement.

2. Réduction du problème

Nous poserons:

$$f_j - f_{j-1} = h_j \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

$$s_{2\nu} = S_N(x_\nu + 0) \qquad s_{2\nu-1} = S_N(x_\nu - 0) \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

$$s_0 = 0 \qquad s_{2n+1} = 1$$

Soit $h_{2\mu_1+1} = \ldots = h_{2\mu_i+1} = \ldots = h_{2\mu_p+1} = 0$.

Nous désignerons par $j_1, \ldots, j_{2n-p+1}$, où $j_1 < j_2 < \ldots < j_{2n-p+1}$, tous les indices: $1, \ldots, 2n+1$ à l'exception de $2\mu_1+1, \ldots, 2\mu_p+1$, par $\nu_0, \ldots, \nu_{n-p}$ avec $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{n-p}$ tous les indices $0, \ldots, n$ à l'exception de $\mu_1, \ldots, \mu_p$. Soit finalement $a_j = s_j - s_{j-1}$ $\quad j = j_1, \ldots, j_{2n-p+1}$.

Les a_j ont une loi de distribution polynomiale:

$$Pr\left\{a_{j_1} = k_1/N, \ldots, a_{j_{2n-p+1}} = \frac{1}{N} k_{2n-p+1}\right\} = \frac{N!}{(k_1)! \ldots (k_{2n-p+1})!} h_{j_1}^{k_1} \ldots h_{j_{2n-p+1}}^{k_{2n-p+1}}$$

avec $k_1 + \ldots + k_{2n-p+1} = N$.

En faisant tendre N vers l'infini, et en posant:

$$y_j = (a_j - h_j)\sqrt{N} \qquad j = j_1, \ldots, j_{2n-p}$$

on obtient la densité de probabilité suivante:

$$\lim \quad f(y_{j_1}, \ldots, y_{j_{2n-p}}) = c \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2} \sum_{j,k=j_1}^{j_{2n-p}} L_{jk} y_j y_k\right)$$

où

$$L_{jk} = \frac{1}{h_{j_{2n-p+1}}} \qquad j \neq k$$

$$L_{jj} = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j_{2n-p+1}}} \qquad j = j_1, \ldots, j_{2n-p}.$$

En posant encore:

$$z_{j_k} = \sum_{i=1}^{k} y_{j_i} = (s_{j_k} - f_{j_k})\sqrt{N} \qquad k = 1, \ldots, 2n-p$$

en ajoutant $z_{j_0} = z_{j_{2n-p+1}} = 0$ et en remarquant que $y_{j_k} = z_{j_k} - z_{j_{k-1}}$ et que le déterminant de la transformation est 1, on obtient finalement:

$$\lim_{N \to \infty} f(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{2n-p}}) = f_L(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{2n-p}}) = \tag{2.1}$$

$$= c \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-p+1} \frac{1}{h_{j_i}} (z_{j_i} - z_{j_{i-1}})^2\right)$$

$$c = (2\pi)^{-\left(n-\frac{p}{2}\right)} \prod_{i=1}^{2n-p+1} h_{j_i}^{-\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

A la limite, les y_{j_K} répondent à une loi de distribution normale à $(2n-p)$ dimensions. Puisque $E(y_{j_K}) = 0$, la fonction caractéristique correspondante sera l'exponentielle d'une forme quadratique des $t_1, \ldots, t_{2n-p}$. On peut en dire autant de la fonction caractéristique correspondant aux variables

$$z_{j_1}, \ldots, z_{j_{2n-p}}.$$

Celles-ci sont en effet des formes linéaires des y_{jK}. Cette remarque nous sera utile ultérieurement (paragraphe 6).

Etant donnés, pour $h_{2\nu+1} > 0$, $z_{2\nu} = Z_{2\nu}$ et $z_{2\nu+1} = Z_{2\nu+1}$, nous montrerons au paragraphe suivant que

$$\lim_{N\to\infty} Pr\{ \sup_{x_\nu < x < x_{\nu+1}} | S_N(x) - F(x)| < zN^{-\frac{1}{2}} | z_{2\nu} = Z_{2\nu}, z_{2\nu+1} = Z_{2\nu+1}\} =$$

$$= \Delta(z, Z_{2\nu}, Z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1}) . \tag{2.3}$$

Cette grandeur ne dépend donc pas des valeurs de z_k pour

$$k \neq 2\nu, k \neq 2\nu + 1 .$$

On peut donc écrire, en ajoutant $x_0 = -\infty$, $x_{2n+1} = +\infty$, $z_0 = z_{2n+1} = 0$,

$$\lim_{N\to\infty} Pr\{ \sup_{-\infty<x<\infty} | S_N(x) - F(x)| < zN^{-\frac{1}{2}} | z_j = Z_j ; j = j_1, \ldots, j_{2n-p}\} =$$

$$= \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta(z, Z_{2\nu}, Z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1}) .$$

Comme cette fonction Δ est naturellement nulle pour $Z_{2\nu} \geq z$ et pour $Z_{2\nu+1} \geq z$, on obtient:

$$\Phi(z, f_1, \ldots, f_{2n}) =$$

$$= \int_{|zj i| < z} \ldots \int f_L(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{2n-p}}) \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})\, dz_{j_1} \ldots dz_{j_{2n-p}} \tag{2.4}$$

respectivement

$$\Phi^*(z, f_1, \ldots, f_{2n}) =$$

$$= \int_{zj i < z} \ldots \int f_L(z_{j_1}, \ldots, z_{j_{2n-p}}) \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta^*(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})\, dz_{j_1} \ldots dz_{j_{2n-p}} \tag{2.4'}$$

Le problème consiste à chercher maintenant les fonctions Δ, respectivement Δ^*. A cet effet, nous emploierons un raisonnement analogue à celui de FELLER, et en particulier le même théorème relatif à la transformée de LAPLACE d'une fonction $f(t)$.

3. Théorème auxiliaire

Etant donnée, pour $t > 0$, une fonction $f(t)$, soit $\Phi(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ sa transformée de LAPLACE. On écrit également: $\Phi(s) = \mathsf{L}\, f(t)$.

Pour une suite $u_1, \ldots, u_k, \ldots$ nous définissons: $u(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda^k$.
Soit $f^\delta(t) = u_k$ pour $(k-1)\delta \leq t < k\delta$.

$$\Phi_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_\delta(t) dt = \sum_{k=1}^\infty \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} e^{-st} \cdot u_k dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{u_k (e^{-(k-1)\delta s}\, e^{-k\delta s})}{s} =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{s} (e^{\delta s} - 1)\, u_k\, e^{k-\delta s} = \frac{1}{s} (e^{\delta s} - 1)\, u(e^{-\delta s}).$$

Hypothèse: $\delta u(e^{-\delta s}) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \Phi(s)$ (3.1)

Conclusion: Pour tout $t > 0$, $u_k \xrightarrow[k\delta \to t]{} f(t)$ (3.2)

Réciproquement, (3.2) entraîne (3.1).

4. Calcul de $\Delta(z, a, b, h)$

Définitions: $\binom{n}{k} = C(n, k)$

$$C(n, k)\, p^k (1 - p)^{n-k} = B(n, k, p).$$

$\bar{A}$ est la négation de l'événement A.

Soient x' et x'' deux points de discontinuité voisins et

$$F(x' + 0) = F_1; \qquad F(x'' - 0) = F_2$$

$$h = F_1 - F_2 > 0$$

$$i = [NF_1] + 1; \qquad j = [NF_2]$$

Lorsque N est suffisamment grand, $j > i$.

$F(x)$ étant continue et monotone croissante pour $x' \leq x \leq x''$, il est possible de trouver des points $x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_s$, $s = j - i$, tels que

$$F(x_k) = \frac{i + k}{N}; \; k = 0, 1, \ldots, s.$$

Posons, pour simplifier, $S_N(x) - F(x) = C_N(x)$. Sur l'intervalle

$$x' < x \leq x'', \; NC_N(x)$$

ne prend des valeurs entières qu'aux points $x = x_0, \ldots, x = x_k, \ldots, x = x_s$. Posons $N \cdot C_N(x_0) = p$, $N \cdot C_N(x_s) = q$, et cherchons pour un entier c, tel que $c > 0$, $c > |p|$, $c > |q|$:

$$Pr\left\{ \max_{x_0 \leq x \leq x_s} |C_N| < \frac{c}{N} \,\middle|\, C_N(x_0) = \frac{p}{N}, C_N(x_s) = \frac{q}{N} \right\}$$

Si $N \cdot C_N(x) \geq c$, pour $x_0 < x < x_s$, cette relation sera valable pour un intervalle maximum contenant x et contenu dans $[x_0, x_s]$. A l'extrémité droite de cet intervalle, on aura $N \cdot C_N(x) = c$. Comme c est entier, cette extrémité sera l'un des x_k. Le même raisonnement est valable lorsqu'on remplace c par $-c$ et que l'on considère l'extrémité gauche de l'intervalle. Nous désignons par $A_k(c)$ l'événement $N \cdot C_N(x) = c$. En posant:

$$U_r = \overline{A}_1(c)\overline{A}_1(-c)\dots\overline{A}_{r-1}(-c)A_r(c)$$

$$V_r = \overline{A}_1(c)\overline{A}_1(-c)\dots\overline{A}_{r-1}(-c)\overline{A}_r(c)A_r(-c) \tag{4.1}$$

nous aurons donc, suivant notre raisonnement, et puisque les événements $U_1, \dots, U_r, \dots$ et $V_1, \dots, V_r, \dots$ s'excluent mutuellement:

$$Pr\left\{\max_{x_0 \leq x \leq x_s} |C_N(x)| \geq \frac{c}{N}\right\} = \sum_{r=1}^{s} Pr\{U_r\} + \sum_{r=1}^{s} Pr\{V_r\} \tag{4.2}$$

$$Pr\{A_k(c)\} = \sum_{r=1}^{k} Pr\{U_r\} \cdot Pr\{A_k(c) \mid A_r(c)\} + \sum_{r=1}^{k} Pr\{V_r\} \cdot Pr\{A_k(c) \mid A_r(-c)\}$$

$$Pr\{A_k(-c)\} = \sum_{r=1}^{k} Pr\{U_r\} \cdot Pr\{A_k(-c) \mid A_r(c)\} + \sum_{r=1}^{k} Pr\{V_r\} \cdot Pr\{A_k(-c) \mid A_r(-c)\} \tag{4.3}$$

Nous pouvons calculer les facteurs de ce système de $2s$ équations pour les $2s$ inconnues $Pr\{U_r\}$ et $Pr\{V_r\}$. Posons encore $m = j + q - (i + p)$. Alors:

$$Pr\{A_k(c)\} = B\left(m, k + c - p, \frac{k}{s}\right)$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(c)\} = B\left(m - r - c + p, k - r, \frac{k - r}{s - r}\right)$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(-c)\} = B\left(m - r + c + p, k - r + 2c, \frac{k - r}{s - r}\right). \tag{4.4}$$

Ces relations valent aussi pour $c < 0$. Posons, pour k et c entiers,

$$p_k(c) = e^{-k} \frac{k^{k+c}}{(k + c)!} . \tag{4.5}$$

Les relations (4.4) deviennent alors:

$$Pr\{A_k(c)\} = \frac{p_k(c - p)\, p_{s-k}(m - c + p - s)}{p_s(m - s)}$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(c)\} = \frac{p_{k-r}(0)\, p_{s-k}(m - c + p - s)}{p_{s-r}(m - c + p - s)} \tag{4.6}$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(-c)\} = \frac{p_{k-r}(2c)\, p_{s-k}(m - c + p - s)}{p_{s-r}(m + c + p - s)}$$

En posant encore:

$$u_r = Pr\{U_r\} \frac{p_s(m-s)}{p_{s-r}(m-c+p-s)} = Pr\{U_r\} \frac{p_s(q-p)}{p_{s-r}(q-c)}$$

$$v_r = Pr\{V_r\} \frac{p_s(m-s)}{p_{s-r}(m+c+p-s)} = Pr\{V_r\} \frac{p_s(q-p)}{p_{s-r}(q+c)} \tag{4.7}$$

on obtient, à partir de (4.3)

$$p_k(c-p) = \sum_{r=1}^{k} u_r p_{k-r}(0) + \sum_{r=1}^{k} v_r p_{k-r}(2c)$$

$$p_k(-c-p) = \sum_{r=1}^{k} u_r p_{k-r}(-2c) + \sum_{r=1}^{k} v_r p_{k-r}(0). \tag{4.8}$$

La dernière équation est obtenue à partir de la précédente en remplaçant c par $-c$.

Nous passons maintenant aux fonctions génératrices. Il est important de remarquer que $p_k(c)$ est défini pour tout k et que le système (4.8) définit par conséquent les inconnues u_r et v_r pour tout $r > 0$.

$$u(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \lambda^k \qquad v(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \lambda^k$$

$$p(\lambda, c) = N^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(c) \lambda^k.$$

Les équations (4.8) deviennent alors:

$$p(\lambda, c-p) = u(\lambda) p(\lambda, 0) + v(\lambda) p(\lambda, 2c)$$

$$p(\lambda, -c-p) = u(\lambda)\, p(\lambda, -2c) + v(\lambda)\, p(\lambda, 0)\,. \tag{4.9}$$

Nous transformons encore l'équation (4.2) en posant

$$\xi_k = \frac{1}{p_s(q-p)} \sum_{r=1}^{k} u_r p_{k-r}(q-c)$$

$$\eta_k = \frac{1}{p_s(q-p)} \sum_{r=1}^{k} v_r p_{k-r}(q+c)$$

$$Pr\left\{ \max_{x_0 \le x \le x_s} |C_N(x)| \ge \frac{c}{N} \right\} = \xi_s + \eta_s \tag{4.10}$$

$$\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \lambda^k = \frac{u(\lambda)\, p(\lambda, q-c)\, N^{\frac{1}{2}}}{p_s(q-p)}$$

$$\eta(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \lambda^k = \frac{v(\lambda)\, p(\lambda, q+c)\, N^{\frac{1}{2}}}{p_s(q-p)}\,.$$

En passant à la limite, $N \to \infty$, nous posons:

$$\begin{aligned} & c = zN^{\frac{1}{2}} \; ; \; (z > 0) \\ & p = aN^{\frac{1}{2}} \; ; \; (|a| < z) \qquad q = bN^{\frac{1}{2}} \; ; \; (|b| < z) \\ & \frac{s}{N} \to h \qquad \frac{k}{N} \to t > 0 . \end{aligned} \tag{4.11}$$

La distribution $p_k(c)$ définie en (4.5) a la fonction caractéristique

$$\varphi_c(\tau) = \exp\left(k(e^{i\tau} - i\tau - 1)\right)$$

$$\varphi_z(\tau) = \exp\left(k(e^{i\tau N^{-\frac{1}{2}}} - i\tau N^{-\frac{1}{2}} - 1)\right) \sim \exp\left(-\frac{k\tau^2}{2N}\right) \sim \exp\left(-\frac{t\tau^2}{2}\right).$$

Donc

$$N^{\frac{1}{2}} p_k(c) \xrightarrow[N \to \infty]{} (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right). \tag{4.12}$$

Nous utilisons la réciproque du théorème du paragraphe 3 et posons $\delta = 1/N$, $u_k = N^{\frac{1}{2}} p_k(c)$. (4.12) entraîne

$$p(e^{-\frac{\sigma}{N}}, zN^{\frac{1}{2}}) \to \int_0^\infty (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-t\sigma - \frac{z^2}{2t}\right) dt = (2\sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-(2\sigma z^2)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{4.13}$$

Les équations (4.9) deviennent alors

$$\begin{aligned} \exp\left(-(z-a)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) &= \lim_{N\to\infty} u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) + \lim_{N\to\infty} v(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \cdot \exp\left(-2z(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) \\ \exp\left(-(z+a)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) &= \lim_{N\to\infty} u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \cdot \exp\left(-2z(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) + \lim_{N\to\infty} v(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous tirons également de (4.12), puisque $s/N \to h$:

$$p_s(q-p) \to (2\pi N h)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(a-b)^2}{2h}\right)$$

Nous aurons alors:

$$\begin{aligned} \lim N^{-1} \xi(e^{-\frac{\sigma}{N}}) &= \left(\frac{2\pi}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right) \cdot \\ &\cdot \lim u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \cdot \exp\left(-(z-b)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) = \varphi(\sigma) \\ \lim N^{-1} \eta(e^{-\frac{\sigma}{N}}) &= \left(\frac{2\pi}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right) \cdot \\ &\cdot \lim v(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \exp\left(-(z+b)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) = \psi(\sigma). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Posons, pour simplifier les calculs,

$$\begin{aligned} \exp\left(-2z(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) &= X < 1 \\ \exp\left(-a(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) &= A \\ \exp\left(-b(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) &= B \end{aligned}$$

Nous résolvons alors les équations (4.14):

$$\lim u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) = \frac{X^{\frac{1}{2}}A^{-1} - X^{\frac{1}{2}}A}{1 - X^2}; \qquad \lim v(e^{-\frac{\sigma}{N}}) = \frac{X^{\frac{1}{2}}A - X^{\frac{3}{2}}A^{-1}}{1 - X^2}$$

$$\lim u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \exp\left(-(z-b)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{XB^{-1}A(A^{-2} - X)}{1 - X^2} =$$

$$= B^{-1}A^{-1}\frac{X}{1 - X^2} - B^{-1}A\frac{X^2}{1 - X^2} =$$

$$= B^{-1}A^{-1}(X + X^3 + X^5 + \ldots) - B^{-1}A(X^2 + X^4 + \ldots).$$

De même

$$\lim v(e^{-\frac{\sigma}{N}}) \exp\left(-(z+b)(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) = BA(X + X^3 + \ldots) - BA^{-1}(X + X^2 \ldots)$$

Lorsque $|\alpha| = |\beta| = 1$:

$$\left(\frac{2\pi}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} A^\alpha B^\beta X^n = L\left\{ t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(2nz + \alpha\ a + \beta b)^2}{2t}\right)\right\}. \quad \text{(cf. (4.13))}$$

Donc

$$\varphi(\sigma) = L\left[h^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right) t^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2(2\nu+1)z - a - b)^2}{2t}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(4\nu z + a - b)^2}{2t}\right)\right\}\right] = L\, f(t)$$

$$\psi(\sigma) = L\left[h^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right) t^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{2(2\nu+1)z + a + b)^2}{2t}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(4\nu z - a + b)^2}{2t}\right)\right\}\right] = L\, g(t).$$

En employant le théorème du paragraphe 3, nous obtenons:

$$\xi_s \to f(s/N) \sim f(h); \quad \eta_s \to g(s/N) \sim g(h)$$

$$\lim_{N\to\infty} Pr\{\max_{x_0 \le x \le x_s} N^{\frac{1}{2}}|C_N(x)| < z | N^{\frac{1}{2}}C_N(x_0) \to a,\ N^{\frac{1}{2}}C_N(x_s) \to b\} =$$

$$= 1 - f(h) - g(h) = 1 - \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(2(2\nu+1)z-a-b)^2}{2h}\right)+\exp\left(-\frac{(2(2\nu+1)z+a+b)^2}{2h}\right)\right]$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(4\nu z+a-b)^2}{2h}\right)+\exp\left(-\frac{(4\nu z-a+b)^2}{2h}\right)\right]\Bigg]\Bigg\} =$$

$$= \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right)\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\nu \exp\left(-\frac{(2\nu z+(-1)^\nu\cdot a-b)^2}{2h}\right) = \Delta_1(z,a,b,h) \tag{4.16}$$

Les calculs se simplifient lorsqu'il s'agit de déterminer $\Delta_1^+(z,a,b,h)$. Nous obtenons alors les expressions suivantes:

$$U_r = \bar{A}_1(c)\bar{A}_2(c)\ldots\bar{A}_{r-1}(c)A_r(c) \tag{4.1'}$$

$$Pr\,\{A_k(c)\} = \sum_{r=1}^{k} Pr\,\{U_r\}\,Pr\,\{A_k(c)\,|\,A_r(d)\} \tag{4.3'}$$

$$p(\lambda, c-p) = u(\lambda)\,p(\lambda, 0) \tag{4.9'}$$

$$\lim_{N\to\infty} u(e^{-\frac{\sigma}{N}}) = \exp\left(-(z-a)\,(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{4.14'}$$

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\xi(e^{-\frac{\sigma}{N}}) = h^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right)\left(\frac{2\pi}{2\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(2z-a-b)\,(2\sigma)^{\frac{1}{2}}\right) = \varphi^+(\sigma) \tag{4.15'}$$

$$\varphi^+(\sigma) = L\left[h^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right)\exp\left(-\frac{(2z-a-b)^2}{2t}\right)\right] = L\,f^+(t)$$

$$\lim_{N\to\infty} Pr\{\max_{x_0\le x\le x_s} N^{\frac{1}{2}}\cdot C_N(x) < z\,|\,N^{\frac{1}{2}}C_N(x_0)\to a,\ N^{\frac{1}{2}}C_N(x_s)\to b\} = 1 - f^+(h) =$$

$$= \exp\left(\frac{(a-b)^2}{2h}\right)\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^\nu\exp\left(-\frac{(2\nu z+(-1)^\nu a-b)^2}{2h}\right) = \Delta_1^+\,(z,a,b,h)\,. \tag{4.16'}$$

Revenons maintenant aux points x' et x''. F_1 a la forme

$$\frac{i-1+\theta}{N}\,(0<\theta\le 1)\,.$$

$S_N(x'+0)$ a la forme $\dfrac{i+\pi}{N}$ $(\pi \le p)$ et $S_N(x''-0)$ la forme $\dfrac{j+\gamma}{N}$ $(\gamma \ge q)$.

$$Pr\left\{C_N(x_0) = \frac{p}{N}\,\middle|\,S_N(x'+0) = \frac{i+\pi}{N},\ S_N(x''-0) = \frac{j+\gamma}{N}\right\} =$$

$$= B\left(s+\gamma-\pi,\, p-\pi,\, \frac{\theta}{N}\right) = \frac{(s+\gamma-\pi)!}{(p-\pi)!\,(s+\gamma-p)!}\left(\frac{\theta}{N}\right)^{p-\pi}\left(1-\frac{\theta}{N}\right)^{s+\gamma-p}$$

Comme $s+\gamma-\pi \leq N$, $\dfrac{(s+\gamma-\pi)!}{(s+\gamma-p)!} \leq N^{p-\pi}$, et la probabilité cherchée est plus petite que $\dfrac{1}{(p-\pi)!}$. En posant $\pi = \alpha N^{\frac{1}{2}}$, $p = aN^{\frac{1}{2}}$, et

$$|a-\alpha| \geq \varepsilon > 0,$$

$\lim\limits_{N\to\infty} Pr\,\{|\,C_N(x_0) - C_N(x'+0)|\,N^{\frac{1}{2}} \geq \varepsilon\} \leq \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n\geq\varepsilon N^{\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{n!} = 0$, aussi petit que soit ε. Même raisonnement pour $(C_N(x''-0) - C_N(x_s))\,N^{\frac{1}{2}} \sim \beta - b$.

En notant par $g_L(a,b)\,dadb$ la probabilité limite pour que

$$a \leq N^{\frac{1}{2}} C_N(x_0) < a + da, \quad b \leq N^{\frac{1}{2}} C_N(x_s) < b + db\,,$$

et en considérant (2.3) et (4.16):

$$\begin{aligned} \Delta(z,\alpha,\beta,h) &= \iint \Delta_1(z,a,b,h)\,g_L(a,b\,|\,\alpha,\beta)\,da\,db = \\ &= \Delta_1(z,\alpha,\beta,h) + \iint\limits_{\substack{|b-\beta|<\varepsilon\\ |a-\alpha|<\varepsilon}} [\Delta_1(z,a,b,h) - \Delta_1(z,\alpha,\beta,h)]\,g_L(a,b\,|\,\alpha,\beta)\cdot da\cdot db\,. \end{aligned}$$

La dernière intégrale peut être rendue aussi petite que l'on veut car la valeur entre crochets peut être rendue plus petite que $\delta\,(\delta>0)$ par un choix judicieux de ε, indépendamment de a et de b, et $\iint g_L\,da\cdot db = 1$. Ceci rend l'intégrale plus petite que δ, arbitrairement petit. Donc

$$\Delta\;(z,\alpha,\beta,h) = \Delta_1(z,\alpha,\beta,h) \tag{4.17}$$

$$\Delta^+(z,\alpha,\beta,h) = \Delta_1^+(z,\alpha,\beta,h) \text{ (Même raisonnement)} \tag{4.17'}$$

5. Résultats finaux

Nous tirons de (2.1), (2.4), (4.16) et (4.17)

$$\begin{aligned} \Phi(z,f_1,\ldots,f_{2n}) = c\cdot \int\limits_{|z_{ji}|<z}\!\!\ldots\!\int dz_{j_1}\ldots dz_{j_{2n-p}} \exp\Bigg[&-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n-p+1} \frac{1}{h_{ji}}(z_{ji} - z_{ji-1})^2 + \\ &+ \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \frac{(z_{2\nu+1}-z_{2\nu})^2}{h_{2\nu+1}} - \tfrac{1}{2}\sum_{l_{\nu_0},\ldots,l_{\nu_{n-p}}=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\sum\limits_{i=0}^{n-p} l_{\nu_i}}\cdot \\ &\cdot\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \frac{(2l_\nu z + (-1)^{l_\nu} z_{2\nu} - z_{2\nu+1})^2}{h_{2\nu+1}} \Bigg]. \end{aligned}$$

En permutant encore les signes $\int\ldots\int$ et Σ, on obtient le résultat final:

$$\Phi(z,f_1,\ldots,f_{2n}) = \sum_{l_{\nu_0},\ldots,l_{\nu_{n-p}}=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\sum\limits_{i=0}^{n-p} l_{\nu_i}}\, c\cdot \int\ldots\int \exp$$

$$\left[-\tfrac{1}{2}\sum_{ji=2,4,6\ldots}^{2n} \frac{(z_{ji}-z_{ji-1})^2}{h_{ji}} - \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \frac{(2l_\nu z + (-1)^{l_\nu} z_{2\nu} - z_{2\nu+1})^2}{h_{2\nu+1}} \right]\cdot dz_{j_1}\ldots dz_{j_{2n-p}} \tag{5.1}$$

c est défini en (2.2) et $h_j = f_j - f_{j-1}$. La formule (5.1) coïncide avec la formule (25) du travail de M.P.SCHMID, à condition de poser $h_j > 0$ pour $j = 1, 2, \ldots, 2n+1$ c'est-à-dire $p = 0$. Dans ce cas, $j_{i-1} = j_i - 1$.

On trouve de la même façon:

$$\Phi^+(z, f_1, \ldots, f_{2n}) = \sum_{l_{\nu_0}, \ldots, l_{\nu_{n-p}}=0}^{1} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-p} l_{\nu_i}} c \cdot \int \ldots \int_{z_{ji}<z} \exp$$

$$\left[-\frac{1}{2} \sum_{ji=2,4,6\ldots}^{2n} \frac{(z_{ji} - z_{ji-1})^2}{h_{ji}} - \frac{1}{2} \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \frac{(2l_\nu z + (-1)^{l_\nu} z_{2\nu} - z_{2\nu+1})^2}{h_{2\nu+1}} \right] dz_{j_1} \ldots dz_{j_{2n-p}} \, . \tag{5.1'}$$

6. Deux ensembles de variables aléatoires indépendantes

Soient $X_1, \ldots, X_{M_1}$ et $Y_1, \ldots, Y_{M_2}$ deux ensembles de variables aléatoires indépendantes possédant la même loi de distribution discontinue $F(x)$ définie en (1.1). Nous poserons

$$S_{M_1}(x) - S_{M_2}(x) = C_{M_1 M_2}(x)$$

$$\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = N \, ; \qquad \frac{M_1}{M_1 + M_2} = q_1 \, ; \qquad \frac{M_2}{M_1 + M_2} = q_2 \, .$$

Si $M_1 \to \infty$ et $M_2 \to \infty$ de telle sorte que $M_1/M_2 = q_1/q_2 \to a$ (a = const.), alors, pour un z donné, $z \geq 0$, on démontre le théorème:

$$\lim_{N\to\infty} Pr \{ \sup_{-\infty<x<\infty} |C_{M_1 M_2}(x)| < z N^{-\frac{1}{2}} \} = \Phi(z) \tag{6.1}$$

où $\Phi(z)$ est défini en (5.1).

Nous allons ramener ce problème à celui traité dans les paragraphes précédents de la manière suivante:

Soit $\quad s_{i,2\nu} = S_{M_i}(x_\nu + 0) \, ; \qquad s_{i,2\nu-1} = S_{M_i}(x_\nu - 0) \qquad i = 1, 2$

$$z_{ik} = (s_{ik} - f_k) M_i^{\frac{1}{2}} \qquad i = 1, 2$$

$$z_k = \frac{z_{1k} M_2^{\frac{1}{2}} - z_{2k} M_1^{\frac{1}{2}}}{(M_1 + M_2)^{\frac{1}{2}}} = (s_{1k} - s_{2k}) N^{\frac{1}{2}} \, .$$

A la limite, les variables $z_{ij_1}, \ldots, z_{ij_{2n-p}}$ sont réparties selon (2.1).

La remarque du paragraphe 2 nous permet d'écrire, en désignant par T une forme quadratique des $t_1, \ldots, t_{2n-p}$,

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_i(t_1, \ldots, t_{2n-p}) = \exp(T) \, .$$

La fonction caractéristique correspondant aux variables $\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^{\frac{1}{2}} z_{1k}$ sera à la limite:

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_1^*(t_1, \ldots, t_{2n-p}) = \exp\left(\frac{M_2}{M_1+M_2} T\right).$$

De même, aux variables $-z_{2k}\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ correspond à la limite:

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_2^*(t_1, \ldots, t_{2n-p}) = \exp\left(\frac{M_1}{M_1+M_2} T\right).$$

Les variables z_k ont donc à la limite la fonction caractéristique:

$$\varphi^*(t_1, \ldots, t_{2n-p}) = \lim \varphi_1^* \varphi_2^* = \exp(T)$$

Les variables z_k sont donc réparties à la limite comme les variables z_{ik}, c'est-à-dire selon (2.1).

D'après les considérations précédentes, et en vertu de (2.4), il suffit pour prouver (6.1) de prouver

$$\lim_{N\to\infty} Pr\{\sup_{x_\nu<x<x_{\nu+1}} |C_{M_1M_2}(x)| < zN^{-\frac{1}{2}} | z_{2\nu} = Z_{2\nu}, z_{2\nu+1} = Z_{2\nu+1}\} = \\ = \Delta(z, Z_{2\nu}, Z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1}). \tag{6.2}$$

Démonstration de (6.2)

Nous pouvons supposer sans restriction:

$$q_1 \le q_2 \tag{6.3}$$

Soient de nouveau x' et x'' deux points de discontinuité voisins de la fonction $F(x)$. Nous poserons:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M}_1 S_{M_1}(x'+0) = i_1; & M_1 S_{M_1}(x''-0) = j_1; & j_1 - i_1 = m_1 \\ \mathrm{M}_2 S_{M_2}(x'+0) = i_2; & M_2 S_{M_2}(x''-0) = j_2; & j_2 - i_2 = m_2 \end{array}$$

Les X_i et les Y_j sont ordonnés de telle manière que

$$X_i \le X_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, M_1 - 1); \qquad Y_j \le Y_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \mathrm{M}_2 - 1)$$

Nous définissons ν_k de telle manière que

$$X_{i_1+\nu_k} < Y_{i_2+k} \le X_{i_1+\nu_k+1}; \qquad k = 1, 2, \ldots, m_2$$

$$a_k = \left[\frac{q_1}{q_2}(k + i_2)\right] - i_1 \tag{6.4}$$

$A_k(c)$ est l'événement $\nu_k = a_{k+c}$.

Lemme: Si, pour un x_0, $x' < x_0 < x''$, et pour c entier,

$$c > 0, c > \left| i_2 - i_1 \frac{q_2}{q_1} \right| \text{ et } c > \left| j_2 - j_1 \frac{q_2}{q_1} \right|, \; |C_{M_1 M_2}(x_0)| > \frac{c}{M_2} \; (6.5),$$

alors l'un au moins des événements $A_1(c), A_1(-c), \ldots, A_{m_2}(c), A_{m_2}(-c)$ arrive. Inversément, si l'un de ces événements arrive, il existe un

$$x_0, x' < x_0 < x'',$$

tel que

$$|C_{M_1 M_2}(x_0)| > \frac{c}{M_2} - \frac{1}{M_1}. \tag{6.6}$$

Démonstration du lemme: Il suffit de considérer $C_{M_1 M_2}(x_0) > \frac{c}{M_2}$. Cette relation sera vérifiée pour tout un intervalle compris dans $[x', x'']$, puisque $|C_{M_1 M_2}(x'+0)|$, $|C_{M_1 M_2}(x''-0)| < \frac{c}{M_2}$. Soit ξ l'extrémité droite de cet intervalle. On aura nécessairement un $k, 0 < k < m_2$, tel que $Y_k = \xi$.

$$S_{M_2}(\xi - 0) + \frac{c}{M_2} < S_{M_1}(\xi) \leq S_{M_2}(\xi + 0) + \frac{c}{M_2}$$

$$\frac{i_2 + k - 1 + c}{M_2} < \frac{\nu_k + i_1}{M_1} \leq \frac{i_2 + k + c}{M_2}.$$

Comme $M_1 \leq M_2$, $\nu_k = \left[(i_2 + k + c) \frac{M_1}{M_2} \right] - i_1 = a_{k+c}$, ce qui prouve le théorème. Inversément, si $A_k(c)$ arrive, et si l'on pose $\xi = Y_k$, on aura par définition:

$$S_{M_1}(\xi) = \frac{i_1 + \nu_k}{M_1} = \frac{i_1 + a_{k+c}}{M_1}; \quad S_{M_2}(\xi) = \frac{i_2 + k}{M_2}$$

$$S_{M_1}(\xi) > \frac{i_2 + k + c}{M_2} - \frac{1}{M_1} = S_{M_2}(\xi) + \frac{c}{M_2} - \frac{1}{M_1}.$$

Ceci prouve la réciproque. Les conditions (6.5) et (6.6) sont symptotiquement égales et notre lemme dit que la probabilité de (6.5) est asymptotiquement la même que celle que l'un au moins des événements $A_1(c), \ldots, A_{m_2}(c)$ arrive.

Nous définissons U_r et V_r comme en (4.1) et les relations (4.3) sont également conservées. Pour évaluer les coefficients dans (4.3), nous remarquons que la probabilité de $A_k(c)$ est la même que celle de tirer a_{k+c} boules blanches avant la k-ième boule noire hors d'une urne contenant m_1 boules blanches et m_2 boules noires, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On trouve donc:

$$Pr\{A_k(c)\} = \frac{C(a_{k+c} + k - 1, k - 1)\, C(m_1 + m_2 - a_{k+c} - k, m_2 - k)}{C(m_1 + m_2, m_2)}$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(c)\} =$$

$$= \frac{C(a_{k+c} - a_{r+c} + k - r - 1, k - r - 1)\, C(m_1 + m_2 - a_{k+c} - k, m_2 - k)}{C(m_1 + m_2 - a_{r+c} - r, m_2 - r)}$$

$$Pr\{A_k(c) \mid A_r(-c)\} = \tag{6.7}$$

$$= \frac{C(a_{k+c} - a_{r-c} + k - r - 1, k - r - 1)\, C(m_1 + m_2 - a_{k+c} - k, m_2 - k)}{C(m_1 + m_2 - a_{r-c} - r, m_2 - r)}.$$

En amplifiant numérateur et dénominateur dans ces expressions, de manière à en faire des termes de la forme $B(n, k, q_2)$, et en posant au lieu de (4.7)

$$\begin{aligned} u_r &= Pr\{U_r\} \frac{B(m_1 + m_2, m_2, q_2)}{B(m_1 + m_2 - a_{r+c} - r, m_2 - r, q_2)} \\ v_r &= Pr\{V_r\} \frac{B(m_1 + m_2, m_2, q)}{B(m_1 + m_2 - a_{r-c} - r, m_2 - r, q_2)} \end{aligned} \tag{6.8}$$

nous obtenons à partir de (4.3), (6.7) et (6.8)

$$\begin{aligned} B(a_{k+c} + k - 1, k - 1, q_2) = \sum_{r=1}^{k} u_r\, B(a_{k+c} - a_{r+c} + k - r - 1, k - r - 1, q_2) \\ + \sum_{r=1}^{k} v_r\, B(a_{k+c} - a_{r-c} + k - r - 1, q_2) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Nous prouverons plus bas que si, dans l'équation (6.9), nous remplaçons a_k par $(k + i_2)\, q_1/q_2 - i_1$, nous commettons une erreur asymptotiquement négligeable. En posant alors:

$$p_k(c) = B\left(\frac{k + cq_1}{q_2} - 1,\ k - 1,\ q_2\right)$$

$$s = m_2;\ m = m_1 \frac{q_2}{q_1};\quad p = \frac{q_2}{q_1} i_1 - i_2;\quad q = \frac{q_2}{q_1} j_1 - j_2 \tag{6.10}$$

l'équation (6.9) devient semblable à la première des équations (4.8). Il est clair que l'on obtiendrait de la même façon la 2ème de ces équations (4.8). Avec les notations de (6.10), les équations (6.8) prennent la forme des équations (4.7). Les deux systèmes d'équations seront donc asymptotiquement équivalents si les nouvelles grandeurs définies en (6.10) se comportent à la limite suivant (4.11) et (4.12).

Par une propriété bien connue des distributions binomiales, on sait que lorsque $n \to \infty$ et $\dfrac{h - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to y$,

$$\sqrt{np(1-p)}\, B(n, h, p,) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}y^2\right) \tag{6.11}$$

En ce qui concerne $p_k(c)$, on a:

$$k - 1 = q_2\left(\frac{k + cq_1}{q_2} - 1\right) + (q_2 - cq_1) = q_2\left(\frac{k + cq_1}{q_2} - 1\right) +$$
$$+ y\sqrt{(k + cq_1 - q_2)\, q_1}\,.$$

A la limite, nous poserons $c/M_2 = zN^{\frac{1}{2}}$ donc $c = z\sqrt{\frac{M_2}{q_1}}$ et $k/M_2 = t$.

D'où $y = \dfrac{q_2 - cq_1}{\sqrt{(k + cq_1 - q_2)\, q_1}} \sim - zM_2^{\frac{1}{2}}(tM_2 + z\sqrt{M_2 q_1})^{-\frac{1}{2}}$.

Pour un z fixe et pour $t > 0$, on a $y \sim - zt^{-\frac{1}{2}}$, donc

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z_2}{2t}\right) \sim \sqrt{(k + cq_1 - q_2)\, q_1} \cdot p_k(c) \sim \sqrt{M_2 t} \cdot p_k(c)\,.$$

Ceci correspond à (4.12). Nous justifions immédiatement la transformation de (6.9). Nous avons remplacé une expression $B(n, h, q_2)$ par $B(n + \delta, h, q_2)$ où $|\delta| < 1$, et $h/n \to q_2$.

Si $\dfrac{h - nq_2}{\sqrt{nq_2(1 - q_2)}} \to y$, il en sera de même lorsqu'on remplacera n par $n + \delta$ et la relation (6.11) est également valable lorsqu'on remplace n par $n + \delta$; en ajoutant encore $\sqrt{nq_2(1 - q_2)} \sim \sqrt{(n + \delta)\, q_2(1 - q_2)}$, on obtient:

$$B(n, h, q_2) \sim B(n + \delta, h, q_2)\,.$$

A la limite, nous poserons également

$$C_{M_1 M_2}(x' + 0) = \frac{\dot{i}_1}{M_1} - \frac{\dot{i}_2}{M_2} = aN^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{donc } p = a\left(\frac{M_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C_{M_1 M_2}(x'' - 0) = \frac{\dot{j}_1}{M_1} - \frac{\dot{j}_2}{M_2} = bN^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{donc } q = b\left(\frac{M_2}{q_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Malheureusement, on ne peut pas poser $s/M_2 \sim h$, mais seulement, puisque

$$Pr\,\{s\} = B(M_2, s, h)$$

$Pr\left\{\left|\dfrac{s}{M_2} - h\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0$, aussi petit que soit ε.

Posons $\lim \dfrac{s}{M_2} = h^*$. Alors

$$\lim_{N\to\infty} Pr\left\{\sup_{x'<x<x''} |C_{M_1M_2}(x)| < zN^{-\frac{1}{2}} \,\middle|\, N^{\frac{1}{2}} C_{M_1M_2}(x' + 0) =\right.$$

$$= a, N^{\frac{1}{2}}.C_{M_1M_2}(x'' - 0) = b, \frac{s}{M_2} = h^* \Big\} = \Delta^*(z, a, b, h^*).$$

Si $h^* = h$ notre système d'équations est asymptotiquement égal au système (4.7), (4.8) et (4.5). Donc $\Delta^*(z, a, b, h) = \Delta(z, a, b, h)$, cette dernière grandeur étant définie par (4.16) et (4.17). Δ^* est une fonction continue en h* dans le voisinage de h.

En désignant par $g_L(h^*_{2\nu_0+1}, \ldots, h^*_{2\nu_{n-p}+1})\, dh^*_{2\nu_0+1} \ldots dh^*_{2\nu_{n-p}+1}$ la probabilité limite pour que $h^*_{2\nu_i+1} \leq \frac{s_i}{M_2} < h^*_{2\nu_i+1} + dh^*_{2\nu_i+1}$:

$$\lim_{N\to\infty} Pr \{ \sup_{-\infty<x<\infty} | C_{M_1M_2}(x)| < zN^{-\frac{1}{2}}\} =$$

$$= \int_{|z_{ji}|<z} \ldots \int f_L(z_{j_1}, \ldots)\, g_L(h^*_{2\nu_0+1}, \ldots) \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta^*(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h^*_{2\nu+1})\, dh^*_{2\nu_0+1} \ldots dh^*_{2\nu_{n-p}+1} \cdot dz_{j_1} \ldots =$$

$$= \int_{|z_{ji}|<z} \ldots \int f_L(z_{j_1}, \ldots)\, g_L(h^*_{2\nu_0+1}, \ldots) \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})\, dh^*_{2\nu_0+1} \ldots dh^*_{2\nu_{n-p}+1} \cdot dz_{j_1} \ldots +$$

$$+ \int_{\substack{|z_{ji}|<z \\ |h^*_{2\nu_i+1} - h_{2\nu_i+1}|<\varepsilon}} \ldots \int f_L(\ldots)\, g_L(\ldots) \Big[\prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta^*(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h^*_{2\nu+1}) -$$

$$- \prod_{\nu=\nu_0}^{\nu_{n-p}} \Delta(z, z_{2\nu}, z_{2\nu+1}, h_{2\nu+1})\Big]\, dh^*_{2\nu_0+1} \ldots \qquad (6.12)$$

L'intégrale de l'avant-dernière ligne vaut $\Phi(z, f_1, \ldots, f_{2n})$ puisque

$$\int \ldots \int g_L(\ldots)\, dh^*_{2\nu_0+1} \ldots dh^*_{2\nu_{n-p}+1} = 1 .$$

Pour la même raison et parce que la valeur entre crochets peut être rendue plus petite que $\delta (\delta > 0)$ par un choix judicieux de ε, la dernière intégrale dans (6.12) peut être rendue aussi petite que l'on veut. Ceci prouve (6.1).

(Eingegangen den 9. November 1961)

REFERENCES

[1] A. N. KOLMOGOROV; *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione.* Giorn. Ist. Ital. Attuari, Vol. 4 (1933), pp. 83–91.

[2] W. FELLER: *On the Kolmogorov-Smirnov theorems for empirical distributions.* Ann. Math. Stat., Vol. 19 (1948), pp. 177–189.

[3] J. L. DOOB; *Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.* Ann. Math. Stat., Vol. 20 (1949), pp. 393–403.

[4] M. D. DONSKER: *Justification and extension of Doobs heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems.* Ann. Math. Stat., Vol. 23 (1952), pp. 277–281.

[5] P. SCHMID: *On the Kolmogorov and Smirnov theorems for discontinuous distribution functions.* Ann. Math. Stat., Vol. 29 (1958), pp. 1011–1027.