Die Existenz geschlossener Geodätischer auf kompakten Mannigfaltigkeiten.

Autor(en): **Olivier, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **35 (1961)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-27339

Die Existenz geschlossener Geodätischer auf kompakten Mannigfaltigkeiten [1])

Von R. OLIVIER, Erlangen

In dieser Arbeit wird die Existenz geschlossener Geodätischer auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten bewiesen, die wenigstens dreimal differenzierbar sind. Als klassisch und verhältnismäßig einfach beweisbar darf man die Existenz von geschlossenen Geodätischen in den nicht-trivialen Homotopieklassen von Kurven ansehen. Sie ist wohl zum erstenmal von G. D. BIRKHOFF in der Arbeit «Dynamical Systems ...» 1917 bewiesen worden (Trans. Amer. Math. Soc. 18). BIRKHOFF benutzt dabei eine Minimum-Methode; er betrachtet die kürzesten geschlossenen Kurven einer Homotopieklasse. Als Vorläufer dieser Methode nennt er selbst HADAMARD (1898) und HILBERT (1900). Weniger naheliegend als diese Minimum-Methode ist die von BIRKHOFF angewandte Minimum-Maximum-Methode, mit der er in derselben Arbeit von 1917 die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht Null und 1927, in dem Buch «Dynamical Systems», auf einer zur S^n homöomorphen Mannigfaltigkeit bewies. M. MORSE verwendete in seinem Buch «Calculus of Variations in the Large» 1935 ebenfalls eine Minimum-Maximum-Methode, außerdem aber wesentlich Homologiebegriffe. Mit ihrer Hilfe konnte er zum Beispiel die Existenz unendlich vieler geodätischer Verbindungskurven zweier Punkte auf einer zur S^n homöomorphen Mannigfaltigkeit beweisen; siehe [1]. R. SHIZUMA versuchte in seiner Arbeit [2] die MORSEschen Methoden zu verallgemeinern und die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf einer beliebigen kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeit zu beweisen; sein Beweis enthält jedoch einen Fehler. Vor ihm hatte bereits A. I. FET in seiner Arbeit [3][2]) den von SHIZUMA angestrebten Satz mit Hilfe der BIRKHOFFschen Methode und Homotopiebegriffen bewiesen. In der vorliegenden Arbeit werden, außer in [1] dargestellten Deformations-Methoden, ebenfalls nur Homotopiebegriffe benutzt. Das Ziel ist der folgende Satz (3.1):

Es sei M eine kompakte RIEMANNsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^3. Ist für ein $k > 1$ die Gruppe $\pi_k(M)$ nicht trivial, so gibt es eine nullhomotope geschlossene Geodätische auf M.

Als Spezialfall erhält man (auf Grund des Isomorphiesatzes von HUREWICZ) den Satz: «In jeder einfach zusammenhängenden kompakten RIEMANNschen

---

[1]) Über den Inhalt dieser Arbeit wurde auf dem Internationalen Kolloquium über Differentialgeometrie und Topologie, Zürich, Juni 1960, berichtet.

[2]) FETS Ergebnisse wurden mir erst nach der Niederschrift dieser Arbeit bekannt.

Mannigfaltigkeit gibt es eine geschlossene Geodätische», der in der Arbeit von Fet enthalten ist.

Verschwinden außer der Fundamentalgruppe alle Homotopiegruppen der Mannigfaltigkeit, so braucht es übrigens keine nullhomotopen geschlossenen Geodätischen zu geben, wie das Beispiel des euklidischen Torus zeigt. Die Voraussetzungen in Satz 3.1 sind also notwendig.

Bezeichnungen und Definitionen

M sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^3 und der Dimension $n \geq 2$. P, Q usf. seien Punkte von M. Auf M sei eine beliebige Riemannsche Metrik definiert. Mit $c(t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ oder c bezeichnen wir stückweise glatte Kurven auf M, mit $C(c, t)$ den Punkt mit Parameter t auf c. Für jede Kurve ist eine Länge definiert durch die Riemannsche Metrik. Sie werde für eine Kurve c mit $J(c)$ bezeichnet. Auf einer Kurve läßt sich als Parameter insbesondere die sogenannte reduzierte Bogenlänge einführen; dabei ist der Parameter proportional zu der vom Anfangspunkt gemessenen Bogenlänge und geht von 0 bis 1. Dieser Parameter wird gewöhnlich benutzt. Mit Ω_P bezeichnen wir die Menge der stückweise glatten Kurven mit Anfangs- und Endpunkt in P; weiter sei $\tilde{\Omega} = \bigcup_{P \in M} \Omega_P$. In der Menge aller stückweise glatten Kurven auf M läßt sich eine Topologie einführen. Man benutzt dazu die auf M durch die Riemannsche Metrik induzierte Metrik. Sie ist so definiert: Als Abstand zweier Punkte P und Q nimmt man die untere Grenze der Längen aller sie verbindenden stückweise glatten Kurven. Wir bezeichnen diese Metrik mit ϱ und können dann in $\tilde{\Omega}$ eine Metrik $\tilde{\varrho}$ definieren.

$$\tilde{\varrho}(c, \bar{c}) = \max_{t \in \langle 0,1\rangle} \bigl(\varrho(C(c, t), C(\bar{c}, t))\bigr) + | J(c) - J(\bar{c}) | .$$

Hierbei ist t die reduzierte Bogenlänge. (Zum Beweis, daß ϱ und $\tilde{\varrho}$ Metriken sind, siehe [1], Seite 44.) Die Metrik $\tilde{\varrho}$ bestimmt eine Topologie im Raum aller Kurven; aus der Definition ergibt sich unmittelbar, daß J eine stetige Funktion ist. Das Aneinandersetzen von Kurven ist eine stetige Operation in dieser Topologie. Mit Hilfe von J lassen sich gewisse Untermengen von $\tilde{\Omega}$ auszeichnen, wir definieren

$$J_\alpha = \{c \in \tilde{\Omega} \mid J(c) \leq \alpha\} \quad \text{und} \quad J_\alpha^- = \{c \in \tilde{\Omega} \mid J(c) < \alpha\}, \quad \alpha \in \langle 0, \infty) .$$

Die Menge J_0 ist die Menge der Punktkurven auf M, und in der durch $\tilde{\varrho}$ induzierten Topologie homöomorph zu M selbst.

Die Riemannsche Metrik gestattet es, mit Hilfe der ersten Variation der

Kurvenlänge geodätische Linien auf M zu definieren. Es ist bekannt, daß eine geodätische Linie lokal eine kürzeste Verbindung ist. Durch jeden Punkt gibt es in jeder Richtung genau eine geodätische Linie, man kann eine geodätische Linie also fortsetzen. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten gibt es darüber hinaus eine positive Zahl d mit den Eigenschaften:

1. Jede Geodätische einer Länge kleiner oder gleich d ist kürzer als alle anderen stückweise glatten Verbindungskurven ihrer Randpunkte.

2. Zwei Punkte $P, Q \in M$, für die $\varrho(P,Q) \leq d$ ist, lassen sich durch eine Geodätische der Länge $\varrho(P,Q)$ verbinden; wegen 1. ist sie eindeutig bestimmt.

3. Es sei $\varrho(P,Q) \leq d$ und c der eindeutig bestimmte geodätische Verbindungsbogen von P und Q. Ist t die reduzierte Bogenlänge auf c und $C(c,t)$ der Punkt auf c mit Parameter t, so sind die lokalen Koordinaten von C zweimal stetig differenzierbare Funktionen der lokalen Koordinaten von P und Q und dem Parameter t.

4. Die Länge von c ist eine stetige und für $P \neq Q$ zweimal stetig differenzierbare Funktion der lokalen Koordinaten der Randpunkte P und Q.

Zum Existenzbeweis siehe [1], Seite 97.

Wir wählen eine solche Zahl d und nennen sie Elementarlänge. Eine Geodätische der Länge kleiner oder gleich d heißt Elementarstrecke und eine Kurve, die aus endlich vielen Elementarstrecken zusammengesetzt ist, ein Elementarpolygon.

Eine Deformation $D(t)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ von $\tilde{\Omega}$ heißt eine J-Deformation, wenn für alle $c \in \tilde{\Omega}$ gilt: $J(D(t)c) \leq J(c)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Wir werden später eine Standard-J-Deformation D konstruieren.

Eine geodätische Linie heißt geodätische Schleife, wenn sie eine geschlossene Kurve ist, geschlossene Geodätische, wenn sie außerdem im Anfangspunkt glatt ist.

Die Länge einer geschlossenen Geodätischen heißt ein stationärer Wert von J, die geschlossene Geodätische ein stationärer Punkt in $\tilde{\Omega}$.

§ 1. Homotopieeigenschaften von Ω_P und $\tilde{\Omega}$

Satz 1.1. Ist jede stetige Abbildung $\bar{h}: S^{k-1} \to \Omega_P$ nullhomotop, so ist auch jede stetige Abbildung $h: S^k \to M$ nullhomotop, $k > 0$.

Diese Tatsache ist bekannt. Wir wollen einen Beweis skizzieren. Wir nehmen an, daß P der Basispunkt in M für die Abbildungen ist. h sei eine Abbildung $h: S^k \to M$. Wir denken uns h gegeben als Abbildung eines n-dimensionalen Würfels W^k, dessen Rand ∂W^k in P abgebildet wird. W^k sei dargestellt als Produkt $W^{k-1} \times W^1$, (W^{k-1}, W^1 Randwürfel). Als Standardzerlegung von

W^k bezeichnen wir die Zerlegung von W^k in die Strecken $X \times W^1$, $X \in W^{k-1}$. Die Abbildung h induziert eine Abbildung $\bar{h}: W^{k-1} \to \Omega_P$, indem jedem $X \in W^{k-1}$ der dem h-Bild der Strecke $X \times W^1$ entsprechende Punkt in Ω_P zugeordnet wird. $\bar{h}$ bildet ∂W^{k-1} in die Punktkurve P ab und ist stetig, wenn h stetig ist[3]). $\bar{h} W^{k-1}$ sei nullhomotop in Ω_P und $\bar{H}(t): W^{k-1} \to \Omega_P$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, sei eine Nullhomotopie, das heißt eine stetige Abbildungsschar mit $\bar{H}(0) = \bar{h}$, $\bar{H}(1) =$ konstante Abbildung auf die Punktkurve P. Jeder Abbildung $\bar{H}(t) W^{k-1}$ läßt sich eine Abbildung $H(t) W^k$ zuordnen. Man bilde dazu die Strecke $X \times W^1$ der Standardzerlegung von W^k auf diejenige Kurve in M ab, die dem Punkt $\bar{H}(t) X$ in Ω_P entspricht. Auf diese Weise erhält man eine stetige Schar von Abbildungen $H(t): W^k \to M$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Es ist $H(0) W^k = h W^k$ und $H(1) W^k = P$, und die Abbildung $h W^k$ ist infolgedessen nullhomotop.

Satz 1.2. Es sei Ω_P eingebettet in $\tilde{\Omega}$. Ist eine Abbildung $\bar{h}: S^i \to \Omega_P$ nullhomotop in $\tilde{\Omega}$, so ist sie auch nullhomotop in Ω_P, $i > 0$.

Der Beweis läßt sich führen mit Hilfe der exakten Homotopiesequenz für Faserräume mit Ω_P als Faser, $\tilde{\Omega}$ als Totalraum und M als Basis. Wir wollen später noch eine weitergehende Eigenschaft der Deformation in $\tilde{\Omega}$ benutzen und geben einen anderen Beweis.

Als Basispunkt für die Abbildungen wählen wir wieder die Punktkurve P. Es sei $\bar{h}: S^i \to \Omega_P$ und $\tilde{H}(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, eine Homotopie von $\bar{h}$ in $\tilde{\Omega}$ mit $\tilde{H}(0) = \bar{h}$. Jeder Abbildung $\tilde{H}(t): S^i \to \tilde{\Omega}$ läßt sich eine Abbildung $\bar{H}(t): S^i \to \Omega_P$ auf folgende Weise zuordnen. Es sei $\bar{Q} \in S^k$ und man nehme die dem Punkt $\bar{h}\bar{Q} \in \Omega_P$ entsprechende Kurve c in M. Bei der Homotopie $\tilde{H}$ wird c in eine Kurve $\tilde{c}$ deformiert, deren Anfangspunkt nicht mehr in P zu liegen braucht. c_t sei diejenige Kurve in M, die durch die Anfangspunkte der Kurven $\tilde{H}(s) c$, $s \in \langle 0, t \rangle$, definiert wird. Dann ist die Kurve $\bar{c}_t = c_t^{-1} \circ \tilde{H}(t) c \circ c_t$ eine in P geschlossene Kurve. Definiert man nun $\bar{H}(t)\bar{Q} = \bar{c}_t \in \Omega_P$, so erhält man die gesuchten Abbildungen $\bar{H}(t): S^i \to \Omega_P$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$; dabei ist also $\bar{H}(0) = \bar{h}$. Ist $\bar{h}$ nullhomotop in $\tilde{\Omega}$, dann läßt sich eine solche Schar von Abbildungen $\tilde{H}$ finden, daß $\tilde{H}(1) = P$. $\bar{H}(1) S^i$ besteht dann aus den Kurven $c_1^{-1} \circ c_1$, ersetzt man sie durch die Kurven $c_t^{-1} \circ c_t$ und läßt t von 1 bis 0 laufen, erkennt man, daß $\bar{H}(1) S^i$ und also $\bar{h} S^i$ nullhomotop in Ω_P ist. Damit ist Satz 1.2 bewiesen.

---

[3]) Ist $k > 1$, so besteht der Teil von Ω_P, in den abgebildet wird, aus Kurven, die in M nullhomotop sind, dasselbe gilt für Abbildungen in $\tilde{\Omega}$.

Wir können aus dem Beweis noch mehr entnehmen. Nehmen wir an, $\tilde{H}(1)S^i$ bestehe aus Punktkurven von $\tilde{\Omega}$. Diese sind zugleich in M die Endpunkte der Kurven c_1. Läßt man jeden solchen Endpunkt über die zugehörige Kurve zum Anfangspunkt P laufen, und betrachtet ihn als Punktkurve in $\tilde{\Omega}$, so erkennt man, daß $\tilde{H}(1)S^i$ nullhomotop in $\tilde{\Omega}$ ist.

Kombiniert man dieses Ergebnis mit Satz 1.1 und Satz 1.2, so erhält man das folgende Korollar:

Korollar 1.3. Gibt es in M eine nicht nullhomotope stetige S^k, $k > 1$, dann gibt es in $\tilde{\Omega}$ eine stetige S^{k-1}, die sich nicht in die Menge J_0 deformieren läßt.

§ 2. Die Standard-J-Deformation

Es sei c eine geschlossene Kurve mit dem Anfangspunkt P und der Länge $J(c) = \alpha$. Der Parameter sei die reduzierte Bogenlänge. q sei eine natürliche Zahl mit $\alpha/q \leq d$. Teilt man c in q gleiche Teilbögen, von P ausgehend, so daß der Endpunkt des i-ten der Anfangspunkt des $i+1$-ten ist, mit P als erstem Anfangs- und letztem Endpunkt, so ist die Entfernung der beiden Randpunkte eines beliebigen Teilbogens kleiner oder gleich d. Man kann sie daher durch eine Elementarstrecke verbinden. Den Teilbogen von c mit den Parameterwerten $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ nennen wir $c(t_1, t_2)$, und es ist $c = c(0, t_1) + c(t_1, t_2) + \cdots + c(t_{q-1}, 1)$; t_i ist der Parameter des i-ten Teilpunktes. Für einen Teilbogen definieren wir eine Deformation ∂ in folgender Weise: Es sei

$$\partial(s)c(t_i, t_{i+1}) = e(t_i, t_i + s(t_{i+1} - t_i)) + c(t_i + s(t_{i+1} - t_i),\ t_{i+1}),\quad s \in \langle 0, 1 \rangle,$$

wobei $e(t_i, t_{i+1})$ die Elementarstrecke zwischen den Punkten $C(c, t_i)$ und $C(c, t_{i+1})$ bedeutet. ∂ ist eine stetige J-Deformation des Bogens $c(t_i, t_{i+1})$; siehe [1], Seite 63. Eine stetige J-Deformation von c erhält man, wenn man die Deformationen der Teilbögen zusammensetzt.

$$\tilde{\partial}(s)c = \partial(s)c(0, t_1) + \cdots + \partial(s)c(t_{q-1}, 1)\,,\quad s \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Auf dem erhaltenen Elementarpolygon wählen wir als neue Teilpunkte die q Mittelpunkte der Elementarstrecken, aus denen es besteht. Sie seien $Q_1, \ldots, Q_q$. Nach der Dreiecksungleichung ist der Abstand zweier aufeinander folgender Mittelpunkte kleiner als d. Man kann nun auf zwei Weisen fortfahren. Entweder man wendet auf das Elementarpolygon mit den Teilbögen $PQ_1, Q_1Q_2, \ldots, Q_qP$ die Deformation $\tilde{\partial}$ an, dann gelangt man zu einem geschlossenen Elementarpolygon mit Anfangspunkt P, die resultierende Deformation von c nennen wir $\bar{D}_{q,\alpha}$, oder man wendet die Deformation $\tilde{\partial}$ auf das Polygon mit den Teilbögen $Q_1Q_2, Q_2, Q_3, \ldots, Q_qQ_1$ an, dann gelangt man zu einem geschlossenen Elementarpolygon, dessen Anfangspunkt nicht mehr in P zu liegen braucht, die resultierende Deformation von c nennen wir $D_{q,\alpha}$. Als Anfangspunkt von $D_{q,\alpha}c$ wählen wir denjenigen Punkt, in den P bei der Deformation übergegangen ist, wobei man auf dem Teilbogen jeweils die reduzierte Bogenlänge als Parameter wählt. Wenden wir $D_{q,\alpha}$ bzw. $\bar{D}_{q,\alpha}$ auf alle Punkte der Menge J_α bzw. $J_\alpha \cap \Omega_P$ an, so erhalten wir eine stetige Deformation von J_α bzw. $J_\alpha \cap \Omega_P$ (siehe [1], Seite 63). Man erkennt ohne weiteres, daß bei $D_{q,\alpha}$ bzw. $\bar{D}_{q,\alpha}$ nur geschlossene Geodätische bzw. geodätische Schleifen ungeändert bleiben, sowie die Punktkurven. Alle anderen Kurven werden bei dem Verfahren verkürzt. Über das Maß der Verkürzung gilt folgendes.

Hilfssatz 2.1. Es sei $\alpha > 0$ nicht stationär und $U \subset J_\alpha$ eine Umgebung aller stationären Punkte von J_α sowie $J_0 \subset U$. Dann hat die Differenz $J(c) - J(D_{q,\alpha}c)$, $c \in J_\alpha - U$, in $J_\alpha - U$ eine positive untere Grenze.

Zum Beweis nehme man eine Folge von Kurven $c', c'', \ldots \in J_\alpha - U$, deren Verkürzungen gegen Null streben. Man bilde aus ihnen die Polygone $\tilde{\partial}(1)c' = c_1'$, $\tilde{\partial}(1)c'' = c_1''$, ... Aus ihnen läßt sich eine gegen ein Grenzpolygon c_1 konvergente Teilfolge auswählen. Da die Verkürzung stetig auf J_α ist, ist die Verkürzung von c_1 gleich Null und c_1 eine geschlossene Geodätische. Die Länge der Kurven $c', c'', \ldots$ konvergiert gegen $J(c_1)$, weil die Verkürzung gegen Null konvergiert; daher konvergiert die Folge $c', c'', \ldots$ gegen c_1. Wegen der Abgeschlossenheit von $J_\alpha - U$ ist daher $c_1 \in J_\alpha - U$ im Widerspruch zur Wahl von U. Für die Einzelheiten des Beweises siehe [1], Seite 64.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

Satz 2.2. Es sei $\alpha > 0$ und α nicht stationärer Wert. $\mathfrak{g}_\alpha$ sei die Menge der stationären Punkte in J_α. Ist $\mathfrak{g}_\alpha$ leer, so gibt es eine J-Deformation von J_α in J_0.

Zunächst läßt sich J_α in J_d deformieren, weil die Verkürzung durch $D_{q,\alpha}$ in $J_\alpha - J_d$ eine positive untere Grenze besitzt. Die Menge J_d wird sodann durch die Deformation $(D_{2,d})^2$ in die Menge J_0 deformiert.

Anmerkung. Entsprechende Sätze gelten für den Raum Ω_P und die Mengen $J_\alpha \cap \Omega_P$, wenn man den Begriff «geschlossene Geodätische» durch «geodätische Schleife» ersetzt und $D_{q,\alpha}$ durch $\bar{D}_{q,\alpha}$. Hilfssatz 2.1 wird in derselben Weise für diesen Fall bewiesen; Satz 2.2 ebenfalls, nur führt $(\bar{D}_{2,d})^2$

nicht $J_d \cap \Omega_P$ in $J_0 \cap \Omega_P$ über. Jedoch ist $\bar{D}_{2,d}c$, $c \in J_d$, eine hin und zurück durchlaufene Elementarstrecke, die man stetig über sich selbst auf einen Punkt deformieren kann.

§ 3. Die Existenz geschlossener Geodätischer

Wir können jetzt leicht den angekündigten Satz beweisen.

Satz 3.1. In der kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeit M der Klasse C^3 gebe es für ein $k > 1$ ein stetiges nicht nullhomotopes Bild der S^k. Dann gibt es auf M eine nullhomotope geschlossene Geodätische.

Beweis. Nach Korollar 1.3 gibt es eine stetige S^{k-1} in $\tilde{\Omega}$, die nicht in J_0 deformierbar ist. α sei das Maximum von J auf einer solchen S^{k-1}. Ist α stationärer Wert, so gibt es eine geschlossene Geodätische der Länge α. Wäre $\mathfrak{g}_\alpha$, die Menge der geschlossenen Geodätischen in J_α, leer, so ließe sich J_α nach Satz 2.2 in J_0 deformieren und daher auch die stetige S^{k-1}, im Widerspruch zu Korollar 1.3. Da der Teil von $\tilde{\Omega}$, in dem wir die Abbildung betrachten, aus Kurven besteht, die in M nullhomotop sind, ist der Satz damit bewiesen.

Anmerkung 1. Aus Satz 2.2 läßt sich auch unmittelbar entnehmen, daß es in jeder nicht trivialen Homotopieklasse geschlossener Kurven wenigstens eine geschlossene Geodätische gibt.

Anmerkung 2. Nach der Anmerkung in § 2 gilt in Ω_P ein analoger Satz zu Satz 2.2. Ist $h: S^k \to M$, $k > 1$, eine nicht nullhomotope stetige Abbildung in M, so gibt es nach Satz 1.1 eine nicht nullhomotope stetige S^{k-1} in Ω_P. Sie läßt sich also nicht in $J_0 \cap \Omega_P = P$ deformieren und dasselbe Argument wie das für Satz 3.1 benutzte ergibt ein entsprechendes Ergebnis für geodätische Schleifen (bei beliebigem P). Das ist in der MORSEschen Theorie bekannt.

LITERATUR

[1] H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Großen* (Leipzig-Berlin 1938).
[2] R. SHIZUMA, *Über geschlossene Geodätische auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten.* Nagoya Math. J. *13* (1958).
[3] A. I. FET, *Variational Problems on Closed Manifolds.* Mat. Sbornik *30* (1952), (russisch) und Amer. Math. Society, Translation No. 90 (1953).

(Eingegangen den 27. Juni 1960
und in umgearbeiteter Fassung den 15. Oktober 1960)