Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung.

Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung

Von WILHELM KLINGENBERG, Göttingen

1. Zusammenstellung der Ergebnisse[1])

1.1. Bekanntlich ist eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit konstanter positiver Riemannscher Krümmung K homöomorph (ja sogar isometrisch) zur Sphäre $S = S_{\dim M}$ (mit der gewöhnlichen Riemannschen Metrik).

Es erhebt sich die Frage, ob man in diesem Satz die Forderung, daß K konstant ist, abschwächen kann zu der Forderung, daß K innerhalb gewisser Schranken variiert. Da auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M notwendig Werte $K > 0$ vorkommen, können wir annehmen, daß die Metrik auf M so normiert ist, daß die Krümmung K nur Werte ≤ 1 annimmt.

Einen ersten Beitrag zu unserem Problem liefert der folgende Satz von RAUCH [5]: *Falls auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M die Krümmung K den Ungleichungen $0{,}74\ldots < K \leq 1$ genügt, so ist M homöomorph zu $S = S_{\dim M}$.*

In der Note [3] haben wir dann gezeigt: *Für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension folgt der Satz von RAUCH schon, wenn man nur die Ungleichungen $0{,}54\ldots < K \leq 1$ fordert.* Für den Beweis dieses Satzes hatten wir neue Methoden entwickelt und uns insbesondere auf eine optimale Abschätzung nach unten für den Abstand zwischen einem Punkt und seinem Schnittort gestützt, vgl. Bemerkung 1 und 2 zu Theorem 2 unten. Da diese Abschätzung nur für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension bewiesen werden konnte, mußten wir uns bei der Verbesserung des Satzes von RAUCH auf geraddimensionale Mannigfaltigkeiten beschränken.

BERGER [1] gelang es dann, die in [3] benutzten Methoden wesentlich zu verfeinern und damit zu beweisen: *Eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M gerader Dimension, deren Krümmung K den Ungleichungen $1/4 < K \leq 1$ genügt, ist homöomorph zur Sphäre $S_{\dim M}$.* Die hier auftretenden Schranken für K können nicht verbessert werden, da die symmetrischen Räume vom Rang 1, die nicht homöomorph zur Sphäre sind, mit ihrer gewöhnlichen Metrik der Beziehung $1/4 \leq K \leq 1$ genügen.

1.2. In der vorliegenden Note zeigen wir nun, daß das Ergebnis von BERGER auch für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension richtig ist:

---

1) Der Verfasser hat die Hauptergebnisse dem Internationalen Kolloquium über Differentialgeometrie und Topologie, Zürich, Juni 1960, mitgeteilt.

Theorem 1. *Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls die Riemannsche Krümmung K von M den Ungleichungen*

$$1/4 < K \leq 1 \tag{1}$$

genügt, so ist M homöomorph zur Sphäre $S = S_{\dim M}$. [2])

Bemerkungen. 1. Für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension > 2 ist das vorstehende Ergebnis das bestmögliche, wie wir gerade erwähnt haben. Die einzigen bekannten Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension, die kompakt und einfach zusammenhängend sind und eine Metrik mit $K > 0$ tragen, sind homöomorph zu den Sphären. Es erscheint daher nicht ausgeschlossen, daß sich die Behauptung des Theorems für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension auch aus einer schwächeren Ungleichung als (1) herleiten läßt.

2. Für $\dim M$ gerade wurde Theorem 1 von BERGER [1] bewiesen. Er mußte sich auf diesen Fall beschränken, da er seinen Beweis auf eine Abschätzung des Abstandes zwischen einem Punkt und seinem Schnittort stützt, die bisher nur für gerade Dimensionen bewiesen worden ist, vgl. [3], Theorem 1. Wir zeigen nun in dieser Note, daß das in Rede stehende Ergebnis aus [3] auch für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension richtig ist, wenn man die Voraussetzung (1) macht. Da im übrigen der Beweis von BERGER unabhängig ist von der Dimension, genügt es also zum Beweis von Theorem 1, wenn wir das benötigte Ergebnis aus [3] für Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft (1) für den Fall beliebiger Dimension beweisen. *Damit ist der Beweis von Theorem 1 zurückgeführt auf den Beweis von*

Theorem 2. *Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls die Riemannsche Krümmung K den Ungleichungen* (1) *genügt, so gilt* [2])

(a) *Eine geschlossene Geodätische hat die Länge $\geq 2\pi$.*

(b) *Falls zwei Punkte p und q auf M einen Abstand $d(p,q) < \pi$ haben, so gibt es genau ein geodätisches Segment der Länge $d(p,q)$ von p nach q.*

(c) *Der Durchmesser $d(M)$ von M, das heißt, der maximale Abstand, den zwei Punkte auf M haben können, ist $\geq \pi$.*

Bemerkungen. 1. Die Eigenschaft (b) läßt sich auch so formulieren: Der Abstand zwischen einem Punkt p von M und seinem Schnittort $C(p)$ ist $\geq \pi$. Zum Begriff des Schnittortes vgl. [3].

[2]) Anmerkung bei der Korrektur: Durch eine Verfeinerung der hier entwickelten Methoden gelang es inzwischen, das Theorem 2 auch unter der schwächeren Voraussetzung (1′), $1/4 \leq K \leq 1$, zu beweisen. Aus den Resultaten von BERGER [1] folgt damit: Wenn man in Theorem 1 (1′) an Stelle von (1) fordert, so ist M homöomorph der Sphäre oder, falls $\dim M$ gerade und > 2, isometrisch einem symmetrischen Raum vom Rang 1, ungleich der Sphäre. Siehe hierzu die demnächst erscheinende Arbeit «Über vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung» in den Annali di Matematica.

2. In [3] hatten wir die Behauptungen (a), (b), (c) für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension aus der schwächeren Forderung: $0 < K \leq 1$ hergeleitet. Es bleibt offen, ob dieses Ergebnis sich auch auf Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension überträgt.

1.3. Wir bezeichnen mit $\Omega(p, q)$ den Raum der stückweise glatten Kurven, die von p nach q laufen. Nach MORSE [4] heißt q *nichtentartet bezüglich* p, falls es in $\Omega(p, q)$ nur endlich viele Geodätische beschränkter Länge gibt.

Ein wesentlicher Schritt bei dem Beweis von Theorem 2 besteht nun in dem Beweis von

Theorem 3. *Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Riemannsche Krümmung K den Ungleichungen* (1) *genügt. Seien p und q zwei Punkte auf M so, daß q nicht entartet ist bezüglich p und so, daß für den Abstand $d(p, q)$ gilt*

$$0 \leq d(p, q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}\,. \tag{2}$$

Sei G_0 eine Geodätische minimaler Länge $d(p, q)$ in $\Omega(p, q)$. Für jede von G_0 verschiedene Geodätische G_1 aus $\Omega(p, q)$ gilt dann die Beziehung

$$L(G_1) \geq 2\pi - L(G_0) > \pi/\sqrt{\min K}\,. \tag{3}$$

Hier bezeichnet $L(H)$ die Länge der Kurve H.

Da nun jedes der Ungleichung (3) genügende geodätische Segment G_1 einen Index $\geq n-1$ hat, $n = \dim M$, während G_0 wegen $L(G_0) = d(p, q) < \pi$ den Index 0 hat, so folgt nach MORSE [4] (vgl. auch BERGER [2]) sofort:

Korollar. *M ist eine Homologiesphäre.*

Bemerkungen. 1. Da jüngst bewiesen wurde, daß eine einfach zusammenhängende Homologiesphäre der Dimension ≥ 7 homöomorph ist zur Sphäre (STALLINGS), läßt sich Theorem 1, jedenfalls für $\dim M \geq 7$, auch aus diesem Korollar erschließen.

2. Im Laufe des Beweises von Theorem 3 ergibt sich unter anderem das Folgende: *Sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 3 mit der Eigenschaft* (1), *und seien p und q und G_0 gewählt wie in Theorem* 3. *Dann läßt sich jede Kurve $H \in \Omega(p, q)$ so in G_0 deformieren, daß dabei die Länge nicht zunimmt.*

3. Für $\dim M$ gerade wurde das Korollar bewiesen von BERGER [2], unter wesentlicher Verwendung von Theorem 1 aus [3].

1.4. Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 3 (und damit auch für den Beweis von Theorem 2 und 1) bildet das folgende

Lemma. *Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Riemannsche Krümmung $K \leq 1$ ist. Seien p und q zwei Punkte auf M, die durch zwei verschiedene geodätische Segmente G_0 und G_1 miteinander verbunden sind. Sei ferner eine stetige Schar H_t, $0 \leq t \leq 1$, von stückweise glatten Kurven H_t aus $\Omega(p, q)$ gegeben so, daß $H_0 = G_0$ und $H_1 = G_1$. Wenn dann die Länge $L(H_t)$ von $H_t \leq$ der Länge $L(H_1)$ von $H_1 = G_1$ ist, so gilt die Beziehung*

$$L(G_0) + L(G_1) \geq 2\pi\,. \tag{4}$$

Bemerkungen. 1. Man beachte, daß in diesem Lemma von der Krümmung K nur vorausgesetzt wird, daß sie ≤ 1 ist, und daß von M nur gefordert wird, daß M vollständig ist. Schon in dem einfachen Falle, daß M eine Fläche ist, deren Gaußsche Krümmung $K \leq 1$ ist, verdient das Lemma selbständiges Interesse. Insbesondere ist auch $p = q$, $G_0 = p$ zugelassen.

2. Der Beweis des Lemmas stützt sich auf den Vergleichssatz von RAUCH [5] (vgl. auch die Darstellung in [2] oder [3]), der sich für $\dim M = 2$ auf den bekannten Vergleichssatz von STURM reduziert.

3. Einen wesentlichen Beitrag zu der vorstehenden Formulierung des Lemmas verdanke ich einem Gespräch mit I. M. SINGER.

2. Beweis des Lemmas

2.1. In diesem Abschnitt machen wir die im Lemma formulierten Voraussetzungen. Insbesondere folgt aus der Annahme $K \leq 1$, daß eine von p ausgehende Geodätische ihren ersten konjugierten Punkt frühestens im Abstand π hat.

Das Lemma ist jedenfalls richtig, falls $L(G_0) = L(H_0) \geq \pi$; denn dann ist auch $L(H_1) = L(G_1) \geq \pi$. Wir betrachten daher jetzt den Fall $L(G_0) < \pi$. Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ so, daß $L(G_0) < \pi - \varepsilon$.

2.2. Sei φ die Exponentialabbildung des Tangentialraumes M_p im Punkte p auf die Mannigfaltigkeit M. Wenn wir φ einschränken auf eine geeignete offene Umgebung der abgeschlossenen Kugel $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$ vom Radius $\pi - \varepsilon$ um den Ursprung o von M_p, dann ist φ ein lokaler Diffeomorphismus. Damit können wir das Anfangsstück einer von p auslaufenden Kurve H, die durch $p(s)$, $0 \leq s \leq 1$, gegeben sei, zusammen mit einer Umgebung des Anfangsstücks, durch φ^{-1} in eine von o auslaufende Kurve von $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$ abbilden. Wir können diese Abbildung für wachsende Parameterwerte s solange fortsetzen, wie die stetig von s abhängenden, von $p = p(0)$ nach $p(s)$ laufenden geodätischen Segmente nicht länger werden als $\pi - \varepsilon$.

Falls insbesondere H ein von p ausgehendes geodätisches Segment der

Länge $\leq \pi - \varepsilon$ ist, so wird bei dieser Abbildung aus H eine von o ausgehende Strecke derselben Länge wie H.

2.3. Wir behaupten, daß es nicht möglich ist, auf die vorstehend beschriebene Weise, mit $H_0 = G_0$ beginnend, die ganze Schar H_t, $0 \leq t \leq 1$, auf eine Schar H'_t, $0 \leq t \leq 1$ in $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$ abzubilden, die wieder stetig von t abhängt. Beginnen wir mit $H_0 = G_0$. In $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$ wird daraus eine Strecke H'_0 mit dem Endpunkt a. Alle genügend zu H_0 benachbarten Kurven H_t gehen über in Kurven H'_t in $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$, die von o nach a laufen. Ließe sich diese Abbildung fortsetzen für alle t bis einschließlich $t = 1$, so müßte auch H'_1 eine von o nach a in $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$ laufende Kurve sein, während doch H'_1, als Bild eines von $H_0 = G_0$ verschiedenen geodätischen Segments $H_1 = G_1$, eine von H'_0 verschiedene Strecke H'_1 ist.

Es gibt also einen ersten Wert t_0, $0 < t_0 < 1$, so, daß H'_{t_0} einen Punkt im Abstand $\pi - \varepsilon$ enthält. Die Kurven H'_t, $0 \leq t \leq t_0$, laufen alle von o nach a.

2.4. Wir identifizieren nun M_p (aufgefaßt als euklidischer Raum) mit dem Tangentialraum im Südpol der Einheitssphäre $S = S_{\dim M}$ und bilden die Kurven H'_t, $0 \leq t \leq t_0$, durch die Exponentialabbildung ψ in S ab. Dabei wird aus H'_0 ein geodätisches Segment H''_0 der Länge $L(H''_0) = L(H'_0) = L(H_0) = L(G_0)$, während das Bild H''_{t_0} von H'_{t_0} einen Punkt enthält, der den Abstand ε vom Nordpol von S hat, und dann zum Endpunkt von H''_0 zurückkehrt. Damit haben wir die Beziehung

$$L(H''_0) + L(H''_{t_0}) \geq 2\pi - 2\varepsilon\,. \tag{5}$$

Nach dem Vergleichssatz von Rauch [5] (vgl. auch die Darstellung in [2] und in [3]) gilt nun auf Grund von $K \leq 1 : L(H''_{t_0}) = L(\psi(H'_{t_0})) \leq L(\varphi(H'_{t_0})) = L(H_{t_0})$. Nach Voraussetzung ist $L(H_{t_0}) \leq L(G_1)$. Da $L(H''_0) = L(G_0)$, folgt aus (5)

$$L(G_0) + L(G_1) \geq 2\pi - 2\varepsilon\,. \tag{6}$$

Da (6) für jedes genügend kleine $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung (4).

3. Beweis von Theorem 3

3.1. In diesem Abschnitt machen wir die Voraussetzungen von Theorem 3.

Wir fixieren eine von p nach q laufende Geodätische G_0 der Länge $L(G_0) = d(p, q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}$. Sei nun G_1 irgend eine von G_0 verschiedene Geodätische aus $\Omega(p, q)$. Da M einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Schar J_t, $0 \leq t \leq 1$, von stückweise glatten Kurven J_t in $\Omega(p, q)$, die stetig von t abhängen und so, daß $J_0 = G_0$ und $J_1 = G_1$.

Auf diese J_t wenden wir den bekannten Deformationsprozeß an, vgl. neben MORSE [4] auch SEIFERT-THRELFALL [6], insbesondere § 16. Bei diesem Deformationsprozeß bleiben die Geodätischen unter den J_t, also insbesondere $J_0 = G_0$ und $J_1 = G_1$, ungeändert, während die Nichtgeodätischen verkürzt werden. Die Schar J_t, $0 \leq t \leq 1$, geht dabei über in eine Schar H_t, $0 \leq t \leq 1$, mit folgenden Eigenschaften:

Es gibt eine Zahl $u \geq 0$ so, daß die Länge $L(H_t)$ von $H_t \leq u$ ist für alle t, und nur für eine Geodätische H_t gilt $L(H_t) = u$. Da die Geodätischen in $\Omega(p,q)$ isoliert liegen, läßt sich das t-Intervall $[0,1]$ so in disjunkte abgeschlossene, aufeinander folgende Teilintervalle $T_1, \ldots, T_r$ einteilen, daß alle t in einem T_i dieselbe Geodätische H_t darstellen ($i = 1, \ldots, r$), während für die außerhalb der T_i gelegenen t-Werte $L(H_t) < u$ gilt. Insbesondere sind $H_0 = G_0$ und $H_1 = G_1$ verschiedene Geodätische.

3.2. Folgende beiden Möglichkeiten können eintreten:

A Das letzte Intervall T_r enthält den Wert 1. Dann ist $L(H_1) = L(G_1) = u$, und $L(H_t) \leq L(G_1)$ für alle t. Das Lemma liefert die Behauptung.

B 1 ist nicht in T_r enthalten. Das heißt, $L(H_1) = L(G_1) < u$, also auch $L(H_0) = L(G_0) = d(p,q) < u$. Die Kurven G_0 und H_{t_i} für t_i beliebig in T_i ($i = 1, \ldots, r$) erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas mit der Schar H_t, $0 \leq t \leq t_i$. Aus (4) und (2) folgt daher

$$L(H_{t_i}) \geq 2\pi - L(G_0) = 2\pi - d(p,q) > \pi/\sqrt{\min K}\,.$$

Die Geodätischen H_{t_i} haben also einen Index $\geq n - 1$, $n = \dim M$. Folglich können wir für jedes i ($i = 1, \ldots, r$) eine kleine, zusammenhängende Umgebung von T_i so finden, daß sich die Kurven H_t für t innerhalb dieser Umgebung durch kürzere, stetig von t abhängende Kurven aus $\Omega(p,q)$ ersetzen lassen. – Bei dieser Ersetzung setzen wir $\dim M \geq 3$ voraus; im Falle $\dim M = 2$ kann (ebenso wie allgemeiner im Falle $\dim M$ gerade) das Theorem 3 mit Hilfe von Theorem 1 aus [3] bewiesen werden, vgl. dazu BERGER [2].

Auf diese Weise erhalten wir aus der Schar H_t, $0 \leq t \leq 1$, eine neue Schar K_t, $0 \leq t \leq 1$, von Kurven K_t aus $\Omega(p,q)$, die stetig von t abhängen und für die gilt: $K_0 = G_0$, $K_1 = G_1$ und $L(K_t) < u$ für alle t.

Auf diese Schar K_t, $0 \leq t \leq 1$, wenden wir wiederum den Deformationsprozeß aus **3.1** an und diskutieren die Möglichkeiten **A** und **B**. Da nur endlich viele Geodätische der Länge $\leq u$ in $\Omega(p,q)$ existieren, kommen wir nach endlich vielen Schritten auf die unter **A** besprochene Situation, also auf die Behauptung von Theorem 3.

4. Beweis von Theorem 2

4.1. In diesem Abschnitt machen wir die Voraussetzungen von Theorem 2. Wie wir in [3] gezeigt haben, genügt es zum Beweis der Behauptung (b), wenn wir nachweisen, daß (a) gilt. Die Behauptung (c) folgt dann einfach aus der Bemerkung, daß zwei Punkte p und q, die maximalen Abstand $d(p,q) = d(M)$ besitzen, stets durch mindestens zwei geodätische Segmente der Länge $d(p,q)$ verbunden werden können.

4.2. Wir nehmen jetzt an, daß es auf M geschlossene Geodätische der Länge $< 2\pi$ gibt. Dann gibt es auch eine geschlossene Geodätische minimaler Länge $2\pi - 2d < 2\pi$ auf M. Wir bezeichnen sie mit G. Theorem 2 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß die Existenz der Geodätischen G auf einen Widerspruch führt.

4.3. Wir wählen einen Punkt p auf G. Den p auf G gegenüberliegenden Punkt bezeichnen wir mit r. r liegt auf dem Schnittort $C(p)$ von p und hat minimalen Abstand von p unter den Punkten von $C(p)$, vgl. [3]. Die beiden von p nach r führenden geodätischen Segmente der Länge $\pi - d$ auf G bezeichnen wir mit F_0 und F_1. r ist nicht konjugiert zu p bezüglich F_0 oder bezüglich F_1. Daher besitzt r, aufgefaßt als Punkt von $C(p)$, auf $C(p)$ eine Umgebung bestehend aus Punkten $r' \in C(p)$, die durch zwei geodätische Segmente F_0' und F_1' mit p verbunden sind, so daß $\pi - d \leq \leq L(F_0') = L(F_1') \leq \pi - d/2$ und so, daß F_0' benachbart ist zu F_0 und F_1' benachbart ist zu F_1.

Die F_0' mit diesen Eigenschaften überdecken einen Kegel mit der Spitze in p und der Achse F_0, und ebenso überdecken die F_1' mit diesen Eigenschaften einen Kegel mit der Spitze in p und der Achse F_1'.

Nach Morse [4] (Seite 234) liegen die bezüglich p nichtentarteten Punkte q überall dicht in M. Es gibt also einen bezüglich p nichtentarteten Punkt q mit folgenden Eigenschaften: $d(p,q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}$ und q liegt auf einem der Segmente F_0' des Kegels um F_0. Mit F_1' bezeichnen wir jetzt dasjenige im Kegel um F_1 gelegene Segment, das mit F_0' den Endpunkt r' gemeinsam hat. Wir haben $\pi - d \leq L(F_0') = L(F_1') \leq \pi - d/2$.

G_0 bezeichne das von p nach q laufende Segment der Länge $d(p,q)$ auf F_0'. Mit G_1 bezeichnen wir das von p nach q laufende gebrochene geodätische Segment, das sich zusammensetzt aus dem von p nach r' laufenden Segment F_1' und dem von r' nach q laufenden Teil von F_0'.

4.4. Da M einfach zusammenhängend ist, gibt es in $\Omega(p,q)$ eine stetige Schar J_t, $0 \leq t \leq 1$, von stückweise glatten Kurven J_t mit $J_0 = G_0$ und $J_{1/2} = G_1$ und $J_{1-t} = J_t$. Auf diese Schar wenden wir den schon im **3.1**

betrachteten Deformationsprozeß an und erhalten gemäß **3.2** eine Schar H_t, $0 \leq t \leq 1$, und eine Zahl $u \geq 0$ so, daß $H_0 = H_1 = G_0$, $L(H_t) \leq u$, und $L(H_t) = u$ nur, wenn H_t eine Geodätische ist. Das Bild $H_{1/2}$ von $J_{1/2} = G_1$ unter diesem Deformationsprozeß ist verschieden von G_1, falls G_1 echt gebrochen ist.

Die Geodätischen H_t der Länge u sind isoliert; man kann, wie in **3.2**, auf Grund des Lemmas diese Geodätischen durch kürzere ersetzen, falls $L(G_0) = L(H_0) = L(H_1) < u$. Damit gelangt man zu einer Schar K_t, $0 \leq t \leq 1$, mit $K_0 = K_1 = G_0$ und $L(K_t) < u$. Nach endlich vielen Schritten dieser Art läßt sich daher die Schar J_t überführen in die uneigentliche Schar P_t, $0 \leq t \leq 1$, mit $P_t = G_0$ für alle t.

Insbesondere geht dabei $J_{1/2} = G_1$ stetig über in G_0 mit nicht wachsender Länge. Das heißt, wir erhalten eine Schar Q_t, $0 \leq t \leq 1$, von Kurven Q_t in $\Omega(p, q)$ mit $Q_1 = G_1, Q_0 = G_0, L(Q_t) + L(G_0) \leq L(G_1) + L(G_0) \leq 2\pi - d$.

Unter Verwendung dieser Q_t, $0 \leq t \leq 1$, definieren wir nun eine Schar R_t, $0 \leq t \leq 1$, von stückweise glatten Kurven $R_t \in \Omega(p, p)$ mit $R_0 = p$ und $R_1 = G$ wie folgt:

Für $0 \leq t \leq 1/3$ soll R_t eine Deformation von p in das vor- und zurückdurchlaufene Segment G_0 auf F_0' sein.

Für $1/3 \leq t \leq 2/3$ soll R_t gleich Q_{3t-1} sein, gefolgt von dem zurück durchlaufenen Segment G_0.

Für $2/3 \leq t \leq 1$ soll R_t eine Deformation von $F_1' \cup F_0'$ in $F_1 \cup F_0 = G$ sein über Segmente der Form $F_0'' \cup F_1''$ der Länge $\leq 2\pi - d$.

Wir erkennen, daß $L(R_t) \leq 2\pi - d < 2\pi$ für alle t. Auf der anderen Seite zeigt der Beweis des Lemmas, insbesondere der Abschnitt **2.3**, daß für wenigstens ein t gelten muß: $L(R_t) \geq 2\pi$ – also ein Widerspruch.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes* (1/4)-pincées. C. R. Acad. Sci. Paris, *250*, 442–444 (1960). – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, *14*, 161–170 (1960).

[2] M. BERGER, *Sur certaines variétés riemanniennes à courbure positive.* C. R. Acad. Sci. Paris *247*, 1165–1168 (1958). – *Les variétés riemanniennes à courbure positive.* Bull. Soc. Math. Belg. *10*, 89–104 (1958).

[3] W. KLINGENBERG, *Contributions to Riemannian geometry in the large.* Ann. of Math. *69*, 654–666 (1959).

[4] M. MORSE, *The calculus of variations in the large.* New York 1934.

[5] H. E. RAUCH, *A contribution to differential geometry in the large.* Ann. of Math. *54*, 38–55 (1951).

[6] H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Großen.* Leipzig 1938.

(Eingegangen den 7. Juli 1960)