

# Eine differentialgeometrische Anwendung der Extremallängentheorie.

Autor(en): **Lampe, Bernt**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **34 (1960)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26631>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Eine differentialgeometrische Anwendung der Extremallängentheorie

VON BERNT LAMPE, Basel

## 1. Einleitung

1.1. Wir betrachten auf einer differentialgeometrischen Fläche  $F$  eine Kurvenschar  $\mathfrak{C}$ , welche gegenüber allen zur Identität homotopen topologischen Selbstabbildungen von  $F$  invariant ist. Es sei  $L(\mathfrak{C})$  das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven aus  $\mathfrak{C}$  und  $A(F)$  der Flächeninhalt der Fläche  $F$ . Dann kann man in gewissen Fällen für den Quotienten  $\frac{A(F)}{[L(\mathfrak{C})]^2}$  eine positive untere Schranke finden, die nur vom topologischen Typus der Fläche abhängt.

Das gelang P. M. PU [1] und J. HERSCH [2] für eine Reihe von Kurvenscharen auf Flächen, die eine kontinuierliche Gruppe von konformen Selbstabbildungen besitzen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei der Begriff der Extremallängen von L. AHLFORS und A. BEURLING [3], der zwar bei PU nicht explizit verwandt wird, mit dem sich aber, wie HERSCH in [2] zeigt, seine Rechnung vereinfacht.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie ein derartiges Problem für einen Typ von Flächen gelöst werden kann, die nur eine endliche Gruppe von konformen Selbstabbildungen besitzen. Auch hier handelt es sich im wesentlichen darum, Extremallängen abzuschätzen.

1.2. Es wird der folgende Satz bewiesen:

**Satz A.** *Es sei  $F$  eine differentialgeometrische Fläche<sup>1)</sup>, die homöomorph der dreifach punktierten Kugel ist; sei  $\mathfrak{C}$  die Menge der geschlossenen Kurven auf  $F$ ,*

---

<sup>1)</sup> Unter «differentialgeometrischer Fläche» sei eine Fläche mit dreimal stetig differenzierbarer Struktur verstanden, auf der durch eine positiv definite Differentialform

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

( $u, v$  seien lokale Parameter der Struktur) mit zweifach stetig differenzierbaren Koeffizienten  $E, F, G$  eine Metrik gegeben ist. Unter der Länge einer Kurve  $c$  ist dann das Integral

$$\int_c ds,$$

unter dem Flächeninhalt eines Teilgebietes  $X$  der Fläche das Integral

$$\iint_X df; \quad df = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

verstanden.

welche je zwei der Enden voneinander trennen,  $\mathfrak{G}$  die Menge der Kurven auf  $F$ , welche je zwei Enden miteinander verbinden. Dann gilt die Ungleichung

$$A(F) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} L(\mathfrak{C}) \cdot L(\mathfrak{G}), \quad (1)$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite der Ungleichung im Falle  $L(\mathfrak{C}) = 0$ ,  $L(\mathfrak{G}) = \infty$  gleich Null zu setzen ist.

**1.3.** Dieser Satz wird sich als Korollar des folgenden Satzes über Extremal-längen ergeben:

**Satz B.** Es sei  $G$  ein beschränktes Gebiet der komplexen Ebene, welches von drei nicht punktförmigen Randkontinuen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  berandet wird. Es sei  $\mathfrak{C}_1$  die Menge der Kurven, die  $\alpha_m$  von  $\alpha_n$  <sup>2)</sup> trennen,  $\mathfrak{G}_1$  die Menge der Kurven, die  $\alpha_i$  mit  $\alpha_m \cup \alpha_n$  verbinden, es seien ferner  $\lambda_i, \lambda_i^*$  die Extremallängen <sup>3)</sup> der Kurvenscharen  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{G}_1$ . Dann gelten die Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} \geq 4, \quad (2)$$

$$\sum_{k>j} \frac{1}{\lambda_k \lambda_j^*} = \sum_{k>j} \frac{1}{\lambda_k^* \lambda_j} \geq 4. \quad (3)$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn jede Randkomponente durch eine konforme Selbstabbildung von  $G$  in jede andere übergeführt werden kann.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. H. HUBER, dem ich für seine mannigfaltigen Hinweise meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

## 2. Zurückführung auf kreisberandete Gebiete

**2.1.** Wie sich aus der Formulierung des Satzes A ergibt, kann man sich beim Beweis auf den Fall

$$A(F) < \infty, \quad L(\mathfrak{C}) > 0 \quad (1)$$

beschränken.

<sup>2)</sup> Das Indextripel  $(l, m, n)$  bedeute im Folgenden immer eine beliebige gerade Permutation von  $(1, 2, 3)$ .

<sup>3)</sup> Ist  $\mathfrak{M}$  die Menge aller in  $G$  stetigen, nicht negativen Funktionen  $\varrho(z)$ ,  $l(\varrho, c) = \int_c \varrho |dz|$  die Länge der Kurve  $c$  und  $A(\varrho, G) = \iint_G \varrho^2 \overline{dz}$  der Flächeninhalt von  $G$  bezüglich der Metrik  $ds^2 = \varrho^2(z) |dz|^2$ , dann heißt

$$\lambda(\mathfrak{C}) = \sup_{\varrho \in \mathfrak{M}} \frac{\inf_{c \in \mathfrak{C}} [l(\varrho, c)]^2}{A(\varrho, G)}$$

die Extremallänge der Kurvenschar  $\mathfrak{C}$ . (Siehe [3].)

**2.2.** Die Fläche  $F$  kann als RIEMANNSCHE Fläche aufgefaßt werden. Denn unter den in <sup>1)</sup> gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen induziert bekanntlich <sup>4)</sup> die durch die quadratische Differentialform gegebene Metrik auf der Fläche eine solche komplexe Struktur, daß die Differentialform in einem lokalen Parameter dieser Struktur die Gestalt

$$ds^2 = \varrho(z)^2 \cdot |dz|^2 \quad (2)$$

annimmt.

**2.3.** Da die Fläche  $F$  schlichtartig ist, gibt es nach einem Satz von KOEBE [6], [7] eine konforme Abbildung  $\psi$  von  $F$  auf ein Gebiet  $G$  der abgeschlossenen Ebene, das von drei Kreisen berandet wird.

Daß diese Kreise unter der Voraussetzung (1) nicht zu Punkten entarten können, läßt sich wie folgt zeigen: Angenommen das Bild  $G$  von  $F$  habe einen isolierten Randpunkt  $a$ , dann kann die Abbildung  $\psi$  so gewählt werden, daß er in den Nullpunkt fällt. Sei  $R$  eine solche positive Zahl, daß die punktierte Kreisscheibe

$$K = \{z \mid 0 < |z| < R\} \quad (3)$$

ganz in  $G$  liegt, dann ist

$$ds = \varrho(z) |dz| ; \quad z \in K \quad (4)$$

und

$$L(\mathbb{C}) \leq \int_0^{2\pi} \varrho(re^{i\varphi}) r d\varphi ; \quad 0 < r < R , \quad (5)$$

da jeder Kreis um den Nullpunkt, der in  $K$  liegt, zu  $\psi(\mathbb{C})$  gehört. Nach der SCHWARZSchen Ungleichung ist aber

$$\left( \int_0^{2\pi} \varrho d\varphi \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\varphi . \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt durch Integration über  $r$

$$[L(\mathbb{C})]^2 \cdot \int_{\varepsilon}^R \frac{dr}{r} \leq 2\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho^2 r d\varphi dr ; \quad 0 < \varepsilon < R . \quad (7)$$

Das rechts stehende Integral ist gerade der Flächeninhalt eines Teilgebietes von  $G$  und daher nicht größer als  $A(F)$

$$[L(\mathbb{C})]^2 \cdot \log \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi A(F) . \quad (8)$$

Ist  $L(\mathbb{C}) > 0$ , dann kann die linke Seite der Ungleichung durch Wahl von  $\varepsilon$  beliebig groß gemacht werden, was im Widerspruch zu (1) steht.

Nach dem erwähnten Satz von KOEBE kann die Abbildung  $\psi$  so gewählt werden, daß die Mittelpunkte der drei Randkreise alle auf der reellen Achse liegen.

<sup>4)</sup> Siehe [8] S. 12, sowie [4] und [5].



2.4. Es genügt nach dem Vorangegangenen, den Satz A für ein Gebiet  $G$  der Ebene zu beweisen, das von drei Kreisen berandet ist, und auf dem eine beliebige konforme Metrik (2) gegeben ist.

Ist für ein solches Gebiet der Satz B bewiesen, so folgt daraus Satz A: Da

$$\mathfrak{C}_k \subset \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{G}_k \subset \mathfrak{G}, \quad (9)$$

$$\text{ist} \quad \lambda \leq \lambda_k, \quad \lambda^* \leq \lambda_k^*, \quad (10)$$

wenn  $\lambda, \lambda^*$  die Extremallängen von  $\mathfrak{C}, \mathfrak{G}$  sind.

Nach der Definition der Extremallängen ist

$$\left[ \frac{A(G)}{L(\mathfrak{C}) \cdot L(\mathfrak{G})} \right]^2 \geq \frac{1}{\lambda \lambda^*}; \quad (11)$$

und wegen (10) ist

$$\frac{1}{\lambda \lambda^*} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} \geq \frac{4}{3}, \quad (12)$$

woraus sich Satz A ergibt.

2.5. Sämtliche Behauptungen sind bewiesen, wenn Satz B für den Fall bewiesen ist, daß das Gebiet  $G$  in der Halbebene  $\operatorname{Re} z > 0$  liegt und von drei Kreisen berandet ist, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen, da jedes der in Satz B vorkommenden Gebiete einem solchen kreisberandeten Gebiet  $G$  konform äquivalent ist, und da die Extremallängen konforme Invarianten sind.

### 3. Die Differentiale $\Omega_1$

3.1. Die drei  $G$  berandenden Kreiswege  $a_1, a_2, a_3$  seien so orientiert, daß

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (1)$$

das Gebiet  $G$  positiv berandet (Fig. 1).

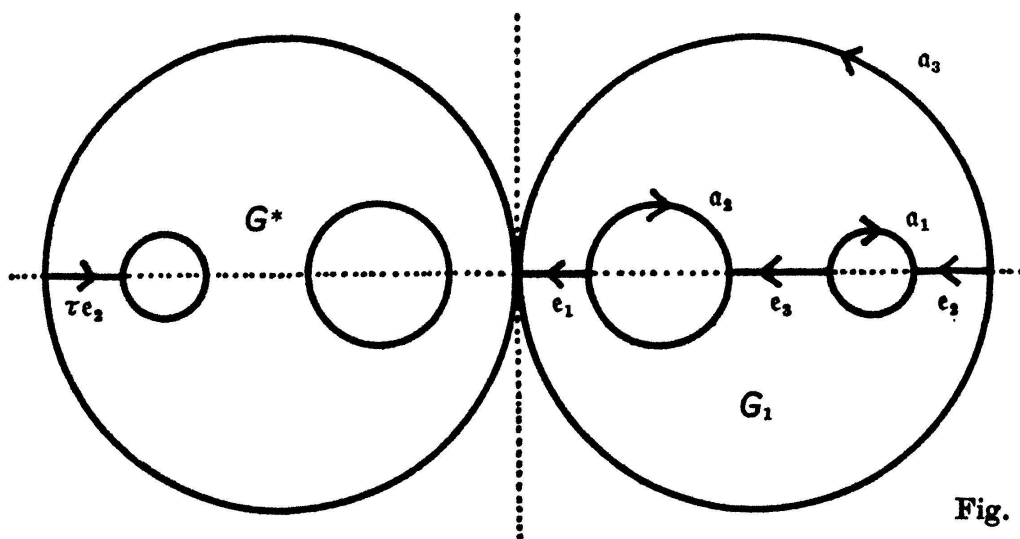


Fig. 1

$e_i$  sei der Weg, der auf der reellen Achse von  $a_m$  nach  $a_n$  läuft<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> Vgl. Fußnote 2).

Wir konstruieren die sogenannte SCHOTTKYSche Verdoppelung von  $G$ : Es sei  $G^*$  das zu  $G$  bezüglich der imaginären Achse symmetrische Gebiet. Wir identifizieren jeden Randpunkt  $z$  von  $G$  mit dem Randpunkt  $-\bar{z}$  von  $G^*$  und definieren in geeigneter Weise ortsuniformisierende Parameter für diese identifizierten Punkte<sup>6)</sup>. So entsteht eine geschlossene RIEMANNsche Fläche  $V$  vom Geschlecht zwei, auf welcher  $G$  und  $G^*$  Teilgebiete sind.

Die Abbildungen

$$\tau: z \rightarrow -\bar{z}, \quad (2)$$

$$\sigma: z \rightarrow \bar{z}, \quad (3)$$

sind offenbar umkehrbar eindeutige antikonforme Abbildungen der Fläche  $V$  auf sich, und es gilt

$$\tau^2 = \sigma^2 = 1. \quad (4)$$

**3.2.** Die Abbildungen  $\tau$  und  $\sigma$  induzieren im Raum der ABELSchen Differentiale  $\Omega$  auf  $V$  antilineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau: \Omega &\rightarrow \Omega^\tau, \\ \sigma: \Omega &\rightarrow \Omega^\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

die dadurch eindeutig charakterisiert sind, daß für jeden Weg  $c$  auf  $V$  gilt

$$\begin{aligned} \int_c \Omega^\tau &= \overline{\int_{\tau c} \Omega}, \\ \int_c \Omega^\sigma &= \overline{\int_{\sigma c} \Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Für jedes Teilgebiet  $X \subset V$  gilt, wie sich leicht zeigen läßt,

$$\begin{aligned} \|\Omega\|_{\tau X} &= \|\Omega^\tau\|_X, \\ \|\Omega\|_{\sigma X} &= \|\Omega^\sigma\|_X \text{ ?} . \end{aligned} \quad (7)$$

Bezeichnet man mit  $b_k$  den geschlossenen Weg

$$b_k = e_k - \tau e_k, \quad (8)$$

dann sind

$$\{a_l, -b_m, a_m, b_l\}; \quad l = 1, 2, 3 \quad (9)$$

drei kanonischen Homologiebasen von  $V$ . Ferner ist ( $\sim$  bezeichne Homologie)

$$a_n \sim -a_l - a_m; \quad b_n \sim -b_l - b_m. \quad (10)$$

<sup>6)</sup> Zur Definition der SCHOTTKYSchen Verdoppelung siehe [8] S. 14.

<sup>7)</sup> Unter  $\|\Omega\|_X$  sei die Norm von  $\Omega$  bezüglich  $X$  verstanden, gemäß der Definition von PFLUGER [8] S. 64.

Auf  $V$  seien die drei ABELSchen Differentiale  $\Omega_l$  durch ihre Perioden auf  $\alpha_l$  und  $\alpha_m$  wie folgt definiert:

$$\int_{\alpha_l} \Omega_l = 0, \quad \int_{\alpha_m} \Omega_l = -i. \tag{11}$$

Sie besitzen die Eigenschaften

$$1) \int_{\alpha_n} \Omega_l = i, \tag{12}$$

$$2) \Omega_n = -\Omega_l - \Omega_m. \tag{13}$$

Für zwei beliebige Differentiale  $\Omega, \Omega'$  gilt die erste RIEMANNsche Periodenrelation<sup>8)</sup>:

$$-\int_{\alpha_l} \Omega \cdot \int_{b_m} \Omega' + \int_{b_m} \Omega \cdot \int_{\alpha_l} \Omega' + \int_{\alpha_m} \Omega \cdot \int_{b_l} \Omega' - \int_{b_l} \Omega \cdot \int_{\alpha_m} \Omega' = 0; \tag{14}$$

setzt man darin

$$\Omega = \Omega_l, \quad \Omega' = \Omega_m \tag{15}$$

ein, so erhält man

$$\int_{b_m} \Omega_l = \int_{b_l} \Omega_m. \tag{16}$$

Setzt man

$$d_n = -\int_{b_m} \Omega_l = -\int_{b_l} \Omega_m, \tag{17}$$

so ergibt sich aus Gleichung (10) die folgende Periodentabelle

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$\Omega_1$	0	$-i$	$i$	$d_2 + d_3$	$-d_3$	$-d_2$
$\Omega_2$	$i$	0	$-i$	$-d_3$	$d_1 + d_3$	$-d_1$
$\Omega_3$	$-i$	$i$	0	$-d_2$	$-d_1$	$d_1 + d_2$

(18)

Die Wege  $\alpha_j$  sind gegenüber der Abbildung  $\tau$  invariant; daher ist

$$\int_{\alpha_j} \Omega_k^\tau = \overline{\int_{\tau\alpha_j} \Omega_k} = \overline{\int_{\alpha_j} \Omega_k} = -\int_{\alpha_j} \Omega_k; \tag{19}$$

und weil ein ABELSches Differential durch seine Perioden auf  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  schon eindeutig definiert ist, folgt daraus

$$\Omega_k^\tau = -\Omega_k; \quad k = 1, 2, 3. \tag{20}$$

#### 4. Abbildung von $G$ auf ein Ringschlitzgebiet

##### 4.1. Lemma 1. Die Funktion

$$w = \varphi_l(p) = a_l \cdot e^{\frac{2\pi}{p_0} \int_{p_0}^p \Omega_l}; \quad p_0 \in G, \quad \text{fest} \tag{1}$$

<sup>8)</sup> Siehe [9] S. 175.

bildet  $G$  konform auf einen Kreisring  $S_l$  ab, der längs eines Kreisbogens, des Bildes von  $\alpha_l$ , aufgeschlitzt ist. Dabei kann  $a_l$  so gewählt werden, daß der innere Randkreis der Einheitskreis ist.

$\varphi_l$  ist eindeutig und analytisch auf  $G$ , da  $\int_{p_0}^p \Omega_l$  modulo  $i$  auf  $G$  eindeutig und analytisch ist.

Ist  $c$  ein Wegstück, das auf  $\alpha_k$  liegt, dann ist

$$\tau c = c. \tag{2}$$

Für einen solchen Weg  $c$  gilt infolge Gleichung (3.20)

$$\int_c \Omega_l = - \int_c \Omega_l^\tau = - \int_{\tau c} \overline{\Omega_l} = - \int_c \overline{\Omega_l}; \tag{3}$$

also verschwindet

$$\int_c d \log |\varphi_l| = 2\pi \operatorname{Re} \int_c \Omega_l, \tag{4}$$

was gleichbedeutend damit ist, daß  $|\varphi_l|$  auf jedem  $\alpha_k$  konstant ist,  $\alpha_k$  also in einen Kreis um den Nullpunkt abgebildet wird.

Da  $\alpha$   $G$  positiv berandet und

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_l} d \arg \varphi_l &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_l} \Omega_l = 0, \\ \int_{\alpha_m} d \arg \varphi_l &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_m} \Omega_l = -2\pi, \\ \int_{\alpha_n} d \arg \varphi_l &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_n} \Omega_l = 2\pi, \end{aligned} \tag{5}$$

werden  $\alpha_m$  und  $\alpha_n$  auf Vollkreise abgebildet,  $S_l$  liegt im Inneren des Bildkreises von  $\alpha_n$  und im Äußeren von  $\varphi_l(\alpha_m)$ ;  $\varphi_l(\alpha_l)$  bildet einen Schlitz dazwischen, so daß mit

$$\begin{aligned} |\varphi_l(\alpha_l)| &= r_l, \\ |\varphi_l(\alpha_n)| &= R_l, \end{aligned} \tag{6}$$

und der Normierung

$$|\varphi_l(\alpha_m)| = 1, \tag{7}$$

(durch Wahl von  $a_l$ ) folgende Ungleichung gilt:

$$1 < r_l < R_l. \tag{8}$$

4.2. Die Radien  $r_l$  und  $R_l$  lassen sich wie folgt berechnen:

$$\log r_l = \int_{-e_n} d \log |\varphi_l| = -2\pi \operatorname{Re} \int_{e_n} \Omega_l, \tag{9}$$

$$\log R_l = \int_{e_l} d \log |\varphi_l| = 2\pi \operatorname{Re} \int_{e_l} \Omega_l. \tag{10}$$

Nun ist

$$\int_{b_k} \Omega_l = \int_{e_k} \Omega_l - \int_{\tau e_k} \Omega_l = \int_{e_k} \Omega_l - \int_{e_k} \overline{\Omega_l^\tau}, \tag{11}$$

und wegen Gleichung (3.20)

$$\int_{b_k} \Omega_i = \int_{c_k} \Omega_i + \int_{c_k} \overline{\Omega_i} = 2 \operatorname{Re} \int_{c_k} \Omega_i . \quad (12)$$

So erhält man

$$\log r_i = \pi d_m ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (13)$$

$$\log R_i = \pi (d_m + d_n) . \quad (14)$$

Aus der Ungleichung (8) und Gleichung (13) ergibt sich die später wichtige Ungleichung

$$d_k > 0 ; \quad k = 1, 2, 3 . \quad (15)$$

### 5. Berechnung der $\lambda_i$

5.1. Im Ringschlitzgebiet  $S_i$  gehören die Kreise um den Nullpunkt mit Radien  $r$

$$1 < r < r_i , \quad r_i < r < R_i \quad (1)$$

zu der Kurvenschar  $\varphi_i(\mathbb{C})$ . Sei  $\varrho$  eine beliebige Metrik auf  $G$  und

$$\varrho_i(w) = \varrho(\varphi_i^{-1}(w)) \left| \frac{d\varphi_i^{-1}(w)}{dw} \right| \quad (2)$$

die von  $G$  auf  $S_i$  übertragene Metrik, dann gilt mit

$$L(\varrho, \mathbb{C}_i) = \inf_{c \in \mathbb{C}_i} \int_c \varrho |dz| \quad (3)$$

die Ungleichung

$$L(\varrho, \mathbb{C}_i) \leq \int_0^{2\pi} \varrho_i(r e^{i\varphi}) r d\varphi . \quad (4)$$

Quadriert man dies und wendet die SCHWARZSche Ungleichung

$$\left[ \int_0^{2\pi} \varrho_i(r e^{i\varphi}) d\varphi \right]^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \varrho_i^2(r e^{i\varphi}) d\varphi \quad (5)$$

darauf an, so erhält man

$$[L(\varrho, \mathbb{C}_i)]^2 \leq 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \varrho_i^2(r e^{i\varphi}) d\varphi \quad (6)$$

und daraus durch Division durch  $r$  und Integration über alle Werte (1) von  $r$

$$[L(\varrho, \mathbb{C}_i)]^2 \cdot \log R_i \leq 2\pi \iint_{S_i} \varrho_i^2(w) \boxed{dw} . \quad (7)$$

Das rechts stehende Integral ist gleich dem Flächeninhalt

$$A(\varrho, G) = \iint_G \varrho^2(z) \boxed{dz} ; \quad (8)$$

wir erhalten daher

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{C}_l)]^2}{A(\varrho, \mathfrak{G})} \leq \frac{2\pi}{\log R_l} . \quad (9)$$

5.2. Wählt man speziell die Metrik, die in  $S_l$  die Gestalt

$$\varrho_0(w) = \frac{1}{|w|} \quad (10)$$

hat, dann gilt in (9) das Gleichheitszeichen, denn für diese Metrik gibt es in  $\varphi_l(\mathfrak{C}_l)$  keine kürzeren Kurven als die Kreise. Da in (9) das Gleichheitszeichen angenommen wird, ist

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{\log R_l} , \quad (11)$$

also mit Gleichung (4.14)

$$\lambda_l = \frac{2}{d_m + d_n} . \quad (12)$$

### 6. Die Differentiale $\Phi_l$

Die Fläche  $V$  zerfällt in zwei Komponenten  $H$  und  $\sigma H$ , wenn sie längs

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3 \quad (1)$$

aufgeschnitten wird.  $H$  sei die Komponente, die von  $\mathfrak{b}$  positiv berandet wird.

Auf  $V$  werden die ABELSchen Differentiale  $\Phi_l$  durch die folgenden Perioden definiert:

$$\int_{\mathfrak{b}_l} \Phi_l = 0 , \quad \int_{\mathfrak{b}_m} \Phi_l = -i ; \quad (2)$$

dann folgt daraus

$$\int_{\mathfrak{b}_n} \Phi_l = i . \quad (3)$$

Da die  $\mathfrak{b}_k$  gegenüber  $\sigma$  invariant sind, ist

$$\int_{\mathfrak{b}_k} \Phi_l^\sigma = \int_{\sigma\mathfrak{b}_k} \overline{\Phi_l} = \int_{\mathfrak{b}_k} \overline{\Phi_l} = - \int_{\mathfrak{b}_k} \Phi_l ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (4)$$

und weil jedes Differential durch seine Perioden auf  $\mathfrak{b}_1$  und  $\mathfrak{b}_2$  eindeutig definiert ist, folgt daraus

$$\Phi_l^\sigma = - \Phi_l . \quad (5)$$

Der Raum der ABELSchen Differentiale auf  $V$  besitzt die Dimension zwei, daher läßt sich  $\Phi_l$  darstellen als Linearkombination von  $\Omega_m$  und  $\Omega_n$ . Durch Vergleich der Perioden auf den  $\mathfrak{b}_k$  erhält man die Koeffizienten:

$$\Phi_l = \frac{1}{D} (-d_m \Omega_m + d_n \Omega_n) \quad (6)$$

mit

$$D = d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2 . \tag{7}$$

Die Perioden auf den  $\alpha_k$  lassen sich mit Gleichung (6) leicht berechnen und sind in einer Tabelle zusammengefaßt:

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$\Phi_1$	$\frac{d_2 + d_3}{D}$	$-\frac{d_3}{D}$	$-\frac{d_2}{D}$	0	$-i$	$i$
$\Phi_2$	$-\frac{d_3}{D}$	$\frac{d_1 + d_3}{D}$	$-\frac{d_1}{D}$	$i$	0	$-i$
$\Phi_3$	$-\frac{d_2}{D}$	$-\frac{d_1}{D}$	$\frac{d_1 + d_2}{D}$	$-i$	$i$	0.

(8)

### 7. Abbildung von $H$ auf ein Ringschlitzgebiet

**Lemma 2.** Die Funktion

$$w = \chi_l(p) = b_l e^{\frac{2\pi p}{p_0} \int \Phi_l} ; \quad p_0 \in H, \text{ fest} \tag{1}$$

bildet das Gebiet  $H$  bei geeigneter Wahl von  $b_l$  so auf ein Ringschlitzgebiet  $T_l$  ab, daß  $\chi(\alpha \cap H)$  in der reellen Achse liegt und der innere Randkreis der Einheitskreis ist.

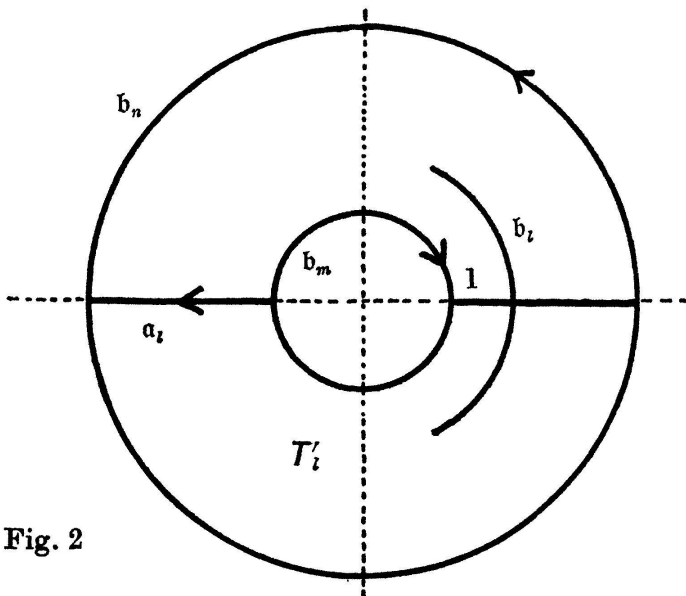


Fig. 2

Analog Abschnitt 4.1. folgt aus der Definition der Differentiale und ihren Eigenschaften, daß a)  $\chi_l(b_m)$  ein Kreis ist, der durch entsprechende Wahl von  $|b_l|$  zum Einheitskreis gemacht werden kann, und der den inneren Rand von  $T_l$  bildet, b)  $\chi_l(b_n)$  ein Kreis ist, der den äußeren Rand von  $T_l$  bildet,

c)  $\chi_l(b_l)$  ein kreisbogenförmiger Schlitz ist, der durch Wahl des  $\arg b_l$

so symmetrisch zur reellen Achse gemacht werden kann, daß er die positive Halbachse schneidet.

Durch diese drei Eigenschaften ist aber die konforme Abbildung  $\chi_l$  eindeutig charakterisiert. Ist  $\bar{\sigma}$  die Spiegelung an der reellen  $w$ -Achse, dann hat die Abbildung  $\bar{\sigma} \chi_l \tau$  die selben Eigenschaften a), b) und c) und ist konform, daher ist

$$\bar{\sigma} \chi_l \tau = \chi_l . \tag{2}$$

Die Spiegelung  $\tau$  läßt  $\alpha$  invariant, daher muß auch  $\bar{\sigma} \chi_i(\alpha)$  invariant lassen, was bedeutet, daß es auf der reellen Achse liegt.

Durch  $\chi_i$  wird also das Gebiet

$$G_1 = G \cap H \quad (3)$$

auf den Teil  $T'_i$  von  $T_i$  abgebildet, der in der unteren Halbebene liegt.

## 8. Berechnung der $\lambda_i^*$

8.1. Da  $\chi_i(\alpha_i \cap H)$  den inneren und den äußeren Randhalbkreis von  $T'_i$  verbindet, gehören die Halbkreise um den Nullpunkt, die in  $T'_i$  liegen, zu  $\chi_i(\mathfrak{G}_i)$ ; und analog zu Abschnitt 5.1. zeigt man, daß für jede beliebige konforme Metrik  $\varrho$  auf  $G$

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G_1)} \leq \frac{\pi}{\log S_i}, \quad (1)$$

wenn  $S_i$  der Radius von  $\chi_i(b_n)$  ist.

Durch die Funktion  $\bar{\sigma} \chi_i \sigma$  wird  $G_2 = \sigma G_1$  auf das Spiegelbild von  $T'_i$  konform abgebildet. Daher gilt auch

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G_2)} \leq \frac{\pi}{\log S_i}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G)} \leq \frac{\pi}{2 \log S_i}. \quad (3)$$

8.2. Sei  $\varrho_0$  in  $T'_i$  die Metrik

$$\varrho_0(w) = \frac{1}{|w|} \quad (4)$$

und  $\varrho_i$  die auf  $G$  folgendermaßen übertragene Metrik:

$$\begin{aligned} \varrho_i(z) &= \varrho_0(\chi_i(z)) \left| \frac{d\chi_i(z)}{dz} \right|; \quad z \in G_1, \\ \varrho_i(z) &= \varrho_i(\bar{z}); \quad z \in G_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Wegen der Symmetrie der Metrik ist die Länge jeder Kurve  $c$  auf  $G$  gleich der Länge ihres Spiegelbildes  $\sigma \tau$ , daher

$$\int_c \varrho_i(z) |dz| = \frac{1}{2} \int_{c+\sigma c} \varrho_i |dz| = \int_{(c+\sigma c) \cap G_1} \varrho_i |dz|. \quad (6)$$

Mit jeder Kurve  $c \in \mathfrak{G}_i$  ist auch die Kurve  $(c + \sigma c) \cap G_1$  aus  $\mathfrak{G}_i$ , daher ist

$$L(\varrho_i, \mathfrak{G}_i) = L(\varrho_i, \mathfrak{G}_i \cap G_1) = \pi. \quad (7)$$



Ferner errechnet man:

$$A(\varrho_i, \mathbf{G}) = 2\pi \log S_i. \quad (8)$$

Somit ist

$$\frac{[L(\varrho_i, \mathbf{G}_i)]^2}{A(\varrho_i, \mathbf{G})} = \frac{\pi}{2 \log S_i} \quad (9)$$

und wegen (3)

$$\lambda_i^* = \frac{\pi}{2 \log S_i}. \quad (10)$$

8.3. Wir erhalten  $S_i$  aus

$$2\pi \log S_i = \iint_{\Gamma_i} d \log |w| \cdot d \arg w = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \|\Phi_i\|_H^2, \quad (11)$$

wegen Gleichung (6.5) ist

$$\|\Phi_i\|_V^2 = \|\Phi_i\|_H^2 + \|\Phi_i\|_{\sigma H}^2 = 2 \|\Phi_i\|_H^2. \quad (12)$$

Für die Norm  $\|\Omega\|_V$  eines Differential  $\Omega$  gilt die zweite RIEMANNSCHE Periodenrelation<sup>9)</sup>:

$$\|\Omega\|_V^2 = -2 \operatorname{Im} \left( \int_{a_i} \Omega \int_{b_m} \overline{\Omega} - \int_{a_m} \Omega \int_{b_i} \overline{\Omega} \right), \quad (13)$$

mit deren Hilfe man durch Einsetzen von  $\Omega = \Phi_i$  erhält:

$$\|\Phi_i\|_V^2 = 2 \frac{d_m + d_n}{D}, \quad (14)$$

somit aus Gleichung (10)

$$\lambda_i^* = \frac{D}{2(d_m + d_n)}. \quad (15)$$

## 9. Beweis des Satzes B

9.1. Aus den Gleichungen (5.12) und (8.15) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} = 2 \frac{\sum_{k=1}^3 d_k^2}{\sum_{k < j} d_k d_j} + 2 \quad (1)$$

und

$$\sum_{k < j} \frac{1}{\lambda_k \lambda_j^*} = \sum_{k < j} \frac{1}{\lambda_k^* \lambda_j} = \frac{\sum_{k=j}^3 d_k^2}{\sum_{k < j} d_k d_j} + 3. \quad (2)$$

<sup>9)</sup> Siehe [8] S. 170.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist aber

$$3 \sum_{k=1}^3 d_k^2 \geq (\sum_{k=1}^3 d_k)^2 = \sum_{k=1}^3 d_k^2 + 2 \sum_{k<j} d_k d_j, \quad (3)$$

und, weil  $d_k > 0$ ,

$$\frac{\sum_{k=1}^3 d_k^2}{\sum_{k<j} d_k d_j} \geq 1, \quad (4)$$

woraus die behaupteten Ungleichungen folgen.

9.2. Das Gleichheitszeichen gilt in den Ungleichungen dann und nur dann, wenn

$$d_1 = d_2 = d_3, \quad (5)$$

was nach (5.12) gleichbedeutend ist mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (6)$$

Nach A. SCHNYDER [10] bestimmen diese Extremallängen aber das Gebiet  $G$  vollständig bis auf konforme Äquivalenz. Gleichung (6) gilt also dann und nur dann, wenn sich jedes Randkontinuum in jedes andere durch eine konforme Selbstabbildung von  $G$  überführen läßt.

#### LITERATUR

- [1] P. M. PU, *Some inequalities in certain nonorientable RIEMANNIAN manifolds*. Pacific J. Math. 2 (1952), 55.
- [2] J. HERSCH, *Longueurs extrémales et géométrie globale*. Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 72 (1955), 401.
- [3] L. AHLFORS and A. BEURLING, *Conform invariants and function theoretic nullsets*. Acta Math. 83 (1950), 101.
- [4] A. WINTNER, *On the rôle of logarithmic potential in differential geometry*. Amer. J. Math. 75 (1953), 679.
- [5] S. S. CHERN, P. HARTMANN and A. WINTNER, *On isothermic coordinates*. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 301.
- [6] P. KOEBE, *Über Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I. Teil. Das allgemeine Uniformisierungsprinzip*. J. reine angew. Math. 138 (1910), 192.
- [7] P. KOEBE, *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildungen. (VI. Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven.)* Math. Z. 7 (1920), 235.
- [8] A. PFLUGER, *Theorie der RIEMANNschen Flächen*. Springer-Verlag, 1957.
- [9] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*. Springer-Verlag, 1953.
- [10] A. SCHNYDER, *Über ein vollständiges System konformer Invarianten von dreifach zusammenhängenden Gebieten*. Comment. Math. Helv., 34/2 (1960), p. 85–98.

(Eingegangen den 2. November 1959)