Valeurs déficientes et valeurs asymtotiques des fonctions méromorphes.

Autor(en): **Edrei, Albert / Fuchs, Wolfgang H.J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **33 (1959)**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26021

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Valeurs déficientes et valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes

par ALBERT EDREI et WOLFGANG H. J. FUCHS[1])

1. Introduction

Les recherches que nous exposons ici continuent et complètent celles que nous avons publiées ailleurs [1]. Nous nous sommes proposés d'élucider quelque peu certains problèmes posés par la théorie des fonctions méromorphes de M. R. NEVANLINNA.

I. *Si une fonction entière $f(z)$, d'ordre fini, admet une valeur exceptionnelle au sens de* BOREL, *son ordre est nécessairement entier, positif et sa croissance parfaitement régulière.*

Que subsiste-t-il de ce résultat si l'on suppose que $f(z)$ est méromorphe et que la somme de ses déficiences excède l'unité?

II. *On sait qu'il existe des fonctions méromorphes* [7, 8] *et même des fonctions entières d'ordre fini* [3; p. 371] *pour lesquelles certaines valeurs sont déficientes sans être asymptotiques.*

Ceci signifie-t-il qu'il faut complètement renoncer à établir une liaison entre ces deux genres de valeurs exceptionnelles?

III. *On sait* [6] *qu'une fonction entière d'ordre fini p, admettant une valeur exceptionnelle au sens de* BOREL, *a un développement de* TAYLOR *dont les coefficients non nuls ont une densité k/p où k est l'un des entiers $1, 2, 3, \ldots, p$. Peut-on étendre ce résultat au cas des fonctions entières ayant des valeurs déficientes finies?*

Nous avons abordé ces trois problèmes par une étude préliminaire des fonctions méromorphes dont les pôles et les zéros sont déficients. Ceci nous a conduits à des inégalités dont on trouvera une démonstration détaillée dans notre mémoire déjà cité. Comme on le verrait, en se reportant à ce travail, on peut, grâce aux inégalités en question, résoudre en partie le problème I.

C'est aux deux autres problèmes que nous nous attacherons ici. Nous montrerons qu'en les adaptant convenablement, les méthodes de [1] donnent une bonne approximation de $\log |f(z)|$ en fonction de $T(|z|, f)$. Ceci nous per-

[1]) Les recherches que nous présentons ici ont été rendues possibles par des subventions de la National Science Foundation, de la Fondation Guggenheim et de la U.S. Air Force (Research supported by the United States Air Force under Contract No. AF 18(600)-685 monitored by the Office of Scientific Research).

mettra de démontrer que, si l'ordre de la fonction entière $f(z)$ est fini, et la somme de ses déficiences suffisamment grande, il existe des valeurs déficientes finies qui sont également asymptotiques.

2. Notations et terminologie

La variable complexe sera, en général, désignée par z et nous poserons

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad (x, y, \theta \text{ réels}; \ r \geqq 0) .$$

La fonction $f(z)$ sera, en général, méromorphe mais il sera parfois nécessaire de la supposer entière.

Considérons ceux des zéros de $f(z)$ qui ne coïncident pas avec l'origine; nous les distribuerons dans une suite que nous dénoterons toujours par

$$a_1, a_2, a_3, \ldots . \tag{2.1}$$

Nous considérons de même la suite

$$b_1, b_2, b_3, \ldots , \tag{2.2}$$

des pôles de $f(z)$ qui ne coïncident pas avec l'origine ainsi que la suite

$$d_1, d_2, d_3, \ldots \tag{2.3}$$

obtenue en distribuant, dans une suite unique, les éléments de (2.1) et de (2.2). L'ordre des termes de (2.3) est supposé tel que

$$|d_1| \leqq |d_2| \leqq |d_3| \leqq \ldots .$$

Nous utiliserons, dans leur sens aujourd'hui classique, les symboles usuels de la théorie de M. R. NEVANLINNA:

$$\overset{+}{\log}, M(r, f), \ m(r, f), \ n(r, a), \ N(r, a), \ T(r, f) .$$

S'il n'y a pas de confusion à craindre, nous écrirons $T(r)$ et $M(r)$ au lieu de $T(r, f)$ et $M(r, f)$ et nous poserons toujours

$$n(r) = n(r, 0) + n(r, \infty) ; \quad N(r) = N(r, 0) + N(r, \infty) . \tag{2.4}$$

Si l'origine n'est ni un pôle ni un zéro de $f(z)$, la quantité $n(t)$ représente le nombre de termes de (2.3) dont le module n'excède pas t. Cette interprétation conduit aux formules bien connues

$$\frac{1}{l} \sum_{|d_\nu| \leqq t} \frac{1}{|d_\nu|^l} = \frac{n(t)}{lt^l} + \int_0^t \frac{n(u)}{u^{l+1}} du \quad (l = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{2.5}$$

dont nous ferons un usage fréquent.

Les lettres λ et μ désigneront toujours l'ordre et l'ordre inférieur de $f(z)$, c'est-à-dire

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}, \qquad \mu = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}. \tag{2.6}$$

Si $\lambda = \mu$, nous dirons que $f(z)$ est à croissance régulière.

Nous désignerons par $\delta(\tau)$ la déficience de la valeur τ:

$$\delta(\tau) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \tau)}{T(r)},$$

et par

$$\Delta = \sum_{\tau} \delta(\tau),$$

la déficience totale de la fonction $f(z)$, c'est-à-dire la somme des déficiences de toutes les valeurs déficientes de $f(z)$. Là où nous ne considérons que la déficience d'une seule fonction, la notation précédente suffira. Quand il nous arrivera de considérer plusieurs fonctions $f, g, h, \ldots$ nous utiliserons la notation plus complète

$$\delta(\tau, f), \quad \delta(\tau, g), \quad \delta(\tau, h), \ldots .$$

La quantité

$$K = K(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)}{T(r)}, \tag{2.7}$$

joue un rôle prépondérant dans ce mémoire; on a manifestement

$$K(f) \leqq \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, 0)}{T(r)} + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, \infty)}{T(r)} = 2 - \delta(0) - \delta(\infty).$$

Les majuscules A, B, C, G affectées d'indices convenables, désigneront toujours des constantes numériques positives; nous avons jugé inutile de rappeler cette convention dans nos énoncés et nos démonstrations.

Presque toutes nos inégalités ne sont valables que pour des valeurs suffisamment grandes de certains paramètres. Le plus souvent, nous rappellerons ce fait sous forme symbolique, en faisant suivre les inégalités en question par d'autres, entre parenthèses; par exemple: $(j > j_0)$, $(r > r_0)$.

3. Enoncé de nos résultats principaux

Nous commencerons par résumer, dans le lemme suivant, les conséquences, les plus utiles ici, des résultats de notre mémoire [1].

Lemme A. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre inférieur fini et égal à μ. Soit p l'entier défini par les inégalités*

$$p - \tfrac{1}{2} \leqq \mu < p + \tfrac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Si

$$K(f) < \frac{1}{10e(p+1)}, \tag{3.2}$$

on a

$$p \geqq 1, \qquad \lambda < p + \tfrac{1}{2}.$$

De plus, chaque intervalle

$$x \leqq r \leqq (35)^2 x \quad (x > x_0),$$

contient un point s tel que

$$T(u)u^{-p+\frac{1}{2}} \leqq T(s)s^{-p+\frac{1}{2}} \quad (x_0 \leqq u \leqq s),$$

et un point t tel que

$$T(u)u^{-p-\frac{1}{2}} \leqq T(t)t^{-p-\frac{1}{2}} \quad (t \leqq u).$$

Du Lemme A, nous déduisons le

Théorème 1. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre inférieur fini et égal à μ et soit p l'entier défini par* (3.1).

L'inégalité

$$K(f) < \frac{\varepsilon}{A_0(p+1)} \qquad (0 < \varepsilon \leqq 1), \tag{3.3}$$

entraîne

$$p \geqq 1, \quad \lambda < p + \tfrac{1}{2}, \tag{3.4}$$

ainsi que les propriétés suivantes de la caractéristique $T(r)$.

I. *Si*

$$1 < \sigma \leqq 36 \tag{3.5}$$

on a

$$T(\sigma r) = \sigma^p T(r)\,(1 + \eta(r, \sigma)) \quad (r > r_0), \tag{3.6}$$

où

$$|\,\eta(r;\sigma)\,| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

II. *Soit $E(u, p)$ le facteur primaire de genre p. La fonction $f(z)$ qui, en vertu de* (3.4) *est de genre p ou $p-1$, peut être représentée sous la forme suivante*

$$f(z) = z^k e^{\alpha_0 z^p + \alpha_1 z^{p-1} + \cdots + \alpha_p} \frac{\Pi E\left(\frac{z}{a_\nu}, p\right)}{\Pi E\left(\frac{z}{b_\nu}, p\right)} \qquad (k \text{ entier}). \tag{3.8}$$

Posons

$$c(r) = \alpha_0 + \frac{1}{p}\left\{\sum_{|a_\nu| \leqq r} a_\nu^{-p} - \sum_{|b_\nu| \leqq r} b_\nu^{-p}\right\}; \tag{3.9}$$

on a alors

$$| c(\sigma r) - c(r) | < \varepsilon | c(r) | \quad (r > r_0) , \tag{3.10}$$

et

$$T(r) = (1 + \eta_1(r)) \frac{| c(r) | r^p}{\pi} \qquad (r > r_0) \tag{3.11}$$

où

$$| \eta_1(r) | < \varepsilon . \tag{3.12}$$

III. *Dès que r dépasse une borne convenable v_0, on a*

$$\int_{v_0}^{r} \frac{T(u)}{u^{\gamma+1}} du < A_1 \frac{T(r)}{(p - \frac{1}{2} - \gamma) r^\gamma} \qquad (\gamma < p - \tfrac{1}{2}) , \tag{3.13}$$

et

$$\int_{r}^{\infty} \frac{T(u)}{u^{\gamma+1}} du < A_2 \frac{T(r)}{(\gamma - p - \frac{1}{2}) r^\gamma} \qquad (\gamma > p + \tfrac{1}{2}) . \tag{3.14}$$

IV. *Posons*

$$f^*(z) = z^k e^{\alpha_0^* z^p + \alpha_1^* z^{p-1} + \cdots + \alpha_p^*} \frac{\Pi E\left(\frac{z}{a_\nu^*}, p\right)}{\Pi E\left(\frac{z}{b_\nu^*}, p\right)} , \tag{3.15}$$

où les quantités α^* sont finies et quelconques et les quantités a_ν^* et b_ν^* sont d'arguments quelconques mais telles que

$$| a_\nu^* | = | a_\nu | , \qquad | b_\nu^* | = | b_\nu | \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{3.16}$$

Posons encore

$$c^*(r) = \alpha_0^* + \frac{1}{p} \Big\{ \sum_{| a_\nu^* | \leq r} \{a_\nu^*\}^{-p} - \sum_{| b_\nu^* | \leq r} \{b_\nu^*\}^{-p} \Big\} ; \tag{3.17}$$

on a alors

$$\left| T(r, f^*) - \frac{| c^*(r) | r^p}{\pi} \right| < \frac{\varepsilon}{2} | c(r) | r^p , \tag{3.18}$$

pourvu que r soit suffisamment grand.

Nous ne ferons pas usage, par la suite, de la partie IV du Théorème 1. Elle nous paraît de quelque intérêt parce qu'elle montre l'influence des arguments des zéros et des pôles sur la valeur de la caractéristique et, par conséquent, sur les déficiences. Le corollaire suivant, que l'on peut rapprocher de certains résultats de M. A. A. GOLDBERG [2], est une conséquence immédiate de (3.18).

Corollaire 1.1. *La relation $K(f) = 0$ entraîne*

$$K\left(z^k e^{| \alpha_0 | z^p + \alpha_1^* z^{p-1} + \cdots + \alpha_p^*} \frac{\Pi E\left(\frac{z}{| a_\nu |}, p\right)}{\Pi E\left(\frac{z}{\omega | b_\nu |}, p\right)} \right) = 0 ,$$

où $\omega = e^{\frac{\pi i}{p}}$ et les α^* sont des nombres finis quelconques.

Tous nos énoncés sont caracterisés par des inégalités telles que (3.1) et (3.3) faisant intervenir l'ordre inférieur μ.

On peut, tout aussi bien, remplacer (3.1) par

$$p - \tfrac{1}{2} \leqq \lambda < p + \tfrac{1}{2}\,.$$

Dans ce cas, on a encore un entier $q(\leqq p)$ tel que

$$q - \tfrac{1}{2} \leqq \mu < q + \tfrac{1}{2}\,, \tag{3.19}$$

et de l'hypothèse (3.3), on tire

$$K(f) < \frac{\varepsilon}{A_0(q+1)}\,.$$

Mais alors, en vertu de (3.4) et (3.19)

$$q - \tfrac{1}{2} \leqq \mu \leqq \lambda < q + \tfrac{1}{2}\,,$$

d'où l'on conclut $p = q$.

Théorème 2. *Laissons inchangées les notations du Théorème 1 et remplaçons l'hypothèse* (3.3) *par*

$$K(f) < \frac{1}{C_0(p+1)\,\{1 + \log(p+1)\}} \qquad (C_0 \geqq A_0). \tag{3.20}$$

Il existe alors un chemin continu $\mathcal{L}$ s'étendant à l'infini et tel que, tout le long de $\mathcal{L}$

$$|\,f(z)\,| > e^{\frac{\pi}{16}T(r)} \qquad (r > r_0)\,. \tag{3.21}$$

Désignons par $\mathcal{L}^{(k)}$ le chemin obtenu par une rotation de $\mathcal{L}$, autour de l'origine, d'angle $k\,\dfrac{\pi}{p}$ (en vertu de (3.4), *on a $p \geqq 1$).*

L'inégalité (3.21) *est valable le long des chemins*

$$\mathcal{L}^{(2)},\ \mathcal{L}^{(4)},\ \mathcal{L}^{(6)}\,,\ \ldots$$

Le long de

$$\mathcal{L}^{(1)},\ \mathcal{L}^{(3)},\ \mathcal{L}^{(5)}\,,\ \ldots$$

on a

$$|\,f(z)\,| < e^{-\frac{\pi}{16}T(r)} \qquad (r > r_0)\,. \tag{3.22}$$

La portion de $\mathcal{L}$ qui appartient à la couronne

$$\alpha^j \leqq r < \alpha^{j+\frac{3}{2}} \qquad (\alpha = e^{\frac{1}{p+1}};\quad j \text{ entier})\,,$$

est rectifiable et sa longueur n'excède pas $C_1\,\alpha^j$.

Dans le cas particulier des fonctions entières et réelles, on peut même affirmer que l'inégalité (3.22) *est vérifiée dans un angle A dont le sommet est à l'origine et l'ouverture est* $\frac{2\pi}{3p}$. *La même inégalité est encore vérifiée dans les angles qui se déduisent de A par des rotations, autour de l'origine, d'angle* $\frac{2\pi}{p}k$.

Le théorème suivant généralise un important résultat de M. A. PFLUGER [5] qui a étudié le cas d'une fonction entière dont la déficience totale est égale à 2. Il a montré que, dans ce cas, les déficiences sont des multiples entiers de $1/p$, où p désigne l'ordre (nécessairement entier et positif) de $f(z)$. La partie de notre énoncé qui se rapporte à l'existence de valeurs asymptotiques nous paraît nouvelle.

Théorème 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini λ et d'ordre inférieur μ. Soit p l'entier défini par*

$$p - \tfrac{1}{2} \leqq \mu < p + \tfrac{1}{2},$$

et soit

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{G_0(p+1)\{1+\log(p+1)\}} \qquad (0 < \varepsilon \leqq G_1 < 1). \tag{3.23}$$

Les inégalités

$$\delta(\infty) > 1 - \gamma, \qquad \sum_{\tau \neq \infty} \delta(\tau) > 1 - \gamma, \tag{3.24}$$

entraînent

$$p \geqq 1, \qquad \lambda < p + \tfrac{1}{2}.$$

De plus, il existe $s(\geqq 1)$ valeurs asymptotiques, finies:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s,$$

telles que

$$\sum_{k=1}^{s} \delta(\beta_k) > 1 - G_2\varepsilon, \tag{3.25}$$

$$\delta(\beta_k) > \frac{1}{p} - G_3\varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots s). \tag{3.26}$$

Dans le cas particulier des fonctions entières et réelles, on peut choisir, pour chemins asymptotiques de déterminations $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$, des rayons issus de l'origine.

Nous terminons ce travail par l'étude des lacunes du développement de TAYLOR d'une fonction entière d'ordre fini dont la déficience totale est proche de son maximum.

Notre énoncé fait intervenir les notions, systématiquement introduites par M. G. PÓLYA, de densités inférieure et supérieure. Considérons la suite

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{3.27}$$

et désignons par $\nu(t)$ le nombre de termes non nuls dont l'indice n'excède pas t. La densité supérieure $\overline{D}$ et la densité inférieure $\underline{D}$ de (3.27) sont définies par

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\nu(t)}{t} = \overline{D}\,, \qquad \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\nu(t)}{t} = \underline{D}\,.$$

Théorème 4. *Soit*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (f(z) \not\equiv \text{constante})\,, \tag{3.28}$$

une fonction entière d'ordre fini λ et d'ordre inférieur μ.

Désignons par p l'entier défini par

$$p - \tfrac{1}{2} \leqq \mu < p + \tfrac{1}{2}\,,$$

et par Δ la déficience totale de $f(z)$.

L'inégalité

$$\Delta > 2 - \frac{\varepsilon}{G_0(p+1)\{1 + \log(p+1)\}} \qquad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{30}\right), \tag{3.29}$$

entraîne

$$1 \leqq p\,, \quad \lambda < p + \tfrac{1}{2}\,,$$

ainsi que l'existence d'un entier $s\,(1 \leqq s \leqq p)$ tel que

$$\frac{s}{p}(1 - 30\varepsilon) \leqq \underline{D} \leqq \overline{D} \leqq \frac{s}{p}\,.$$

Les quantités $\underline{D}$ et $\overline{D}$ désignent, respectivement, les densités inférieure et supérieure de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

4. Conséquences du Lemme A

Lemme 1. *Les hypothèses du Lemme A entraînent l'existence d'une suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, croissante et non bornée, jouissant des trois propriétés suivantes.*

I. $$t_{n+1} \leqq (36)^2 t_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

II. *L'inégalité*

$$t_n \leqq u \tag{4.1}$$

entraîne

$$T(u) \leqq \left(\frac{u}{t_n}\right)^{p+\frac{1}{2}} T(t_n)\,. \tag{4.2}$$

III. *Il existe une borne positive x_0 telle que les inégalités*

$$x_0 \leqq u \leqq x$$

et

$$t_n \leqq x \leqq 2(36)^3 t_n\,, \tag{4.3}$$

entraînent

$$T(u) < 2(36)^5 \left(\frac{u}{t_n}\right)^{p-\frac{1}{2}} T(t_n) . \tag{4.4}$$

Démonstration. Une des inégalités du Lemme A entraîne l'existence d'un point $t_1 (> x_0)$ tel que

$$T(u) \leqq \left(\frac{u}{t_1}\right)^{p+\frac{1}{2}} T(t_1) \quad (u \geqq t_1) .$$

En appliquant encore la même inégalité du Lemme A, on trouvera un point t_2, situé dans l'intervalle $\left[\frac{36}{35} t_1, \ \frac{36}{35} (35)^2 t_1\right]$ et jouissant encore de la propriété II du Lemme 1.

En répétant le même raisonnement, on construira, de proche en proche, une suite $\{t_n\}$ jouissant des propriétés I et II du Lemme 1. Vérifions encore qu'elle jouit de la propriété III.

En effet, $x (> x_0)$ étant donné, il existe, en vertu du Lemme A, un point $s (= s(x))$ tel que

$$x \leqq s \leqq (35)^2 x , \tag{4.5}$$

et tel que

$$T(u) u^{-p+\frac{1}{2}} \leqq T(s) s^{-p+\frac{1}{2}} (x_0 \leqq u \leqq s) . \tag{4.6}$$

En vertu de (4.3) et de (4.5)

$$t_n \leqq s \leqq 2(36)^5 t_n . \tag{4.7}$$

La propriété II (déjà démontrée) donne, grâce à la première des inégalités (4.7)

$$T(s) \leqq \left(\frac{s}{t_n}\right)^{p+\frac{1}{2}} T(t_n) . \tag{4.8}$$

En combinant (4.6) et (4.8), et en tenant compte de la seconde des inégalités (4.7), on trouve

$$T(u) \leqq 2(36)^5 \left(\frac{u}{t_n}\right)^{p-\frac{1}{2}} T(t_n) \quad (x_0 \leqq u \leqq s) .$$

Notre propriété III est ainsi démontrée, puisqu'en vertu de (4.5), $x \leqq s$.

5. Variation des fonctions $T(r)$ et $c(r)$

Lemme 2. *Remplaçons l'hypothèse* (3.2) *par l'hypothèse plus restrictive*

$$K(f) < \frac{\varepsilon}{A_0(p+1)} \quad (0 < \varepsilon \leqq 1, \ A_0 > 10e) , \tag{5.1}$$

et laissons inchangées les notations et les autres hypothèses du Lemme A.

Les inégalités

$$t_n \leqq r \leqq (36)^3 t_n \tag{5.2}$$

entraînent alors

$$\left| T(r) - \frac{|c(r)|}{\pi} r^p \right| \leqq A_6 \varepsilon T(t_n) \left(\frac{r}{t_n}\right)^p , \tag{5.3}$$

et

$$|c(r) - c(t_n)| \leqq A_8 \varepsilon \frac{T(t_n)}{t_n^p} . \tag{5.4}$$

Démonstration. Nous avons supposé

$$A_0 > 10e ,$$

ce choix de A_0, qui sera précisé plus loin, rend valables toutes les conclusions du Lemme A et du Lemme 1. En particulier, l'inégalité $\lambda < p + \frac{1}{2}$ montre que l'on peut mettre $f(z)$ sous la forme (3.8).

Considérons la quantité $c(r)$ définie par (3.9) et posons

$$h = e^{c(r) z^p} , \quad g = \frac{f(z)}{h} . \tag{5.5}$$

Il existe évidemment des relations analogues entre les quantités f^*, g^*, h^* obtenues en partant de la fonction définie par (3.15):

$$h^* = e^{c^*(r) z^p} , \quad g^* = \frac{f^*(z)}{h^*} . \tag{5.6}$$

En désignant par $E(u, p)$ le facteur primaire de genre p, on tire de (3.8)

$$\log |f(z)| - \Re c(r) z^p = \log |g| = \sum_{|a_\nu| \leqq r} \log \left| E\left(\frac{z}{a_\nu}, p-1\right) \right|$$
$$- \sum_{|b_\nu| \leqq r} \log \left| E\left(\frac{z}{b_\nu}, p-1\right) \right| + \sum_{|a_\nu| > r} \log \left| E\left(\frac{z}{a_\nu}, p\right) \right| - \sum_{|b_\nu| > r} \log \left| E\left(\frac{z}{b_\nu}, p\right) \right|$$
$$+ O(r^{p-1} + \log r) \quad (r \to +\infty) . \tag{5.7}$$

On peut prendre la constante, implicitement contenue dans le terme $O(r^{p-1} + \log r)$, égale à $|k| + \sum_{\nu=1}^{p} \{|\alpha_\nu| + |\alpha_\nu^*|\}$. Les termes α^* ont étés introduits dans cette expression afin d'obtenir une constante valable à la fois pour $f(z)$ et $f^*(z)$.

Posons

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|te^{i\theta} - 1|} \quad (t \neq 1) ,$$

et faisons usage de l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \log \left| E\left(\frac{re^{i\theta}}{a}, p\right) \right| \right| d\theta \leqq r^p \int_{|a|}^{\infty} u^{-p-1} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du , \tag{5.8}$$

que nous avons établie ailleurs [1].

Passons de la relation (5.7) à une inégalité entre les valeurs absolues de ses termes, et intégrons par rapport à l'argument θ. Compte tenu de (5.8) et de la définition de la suite $\{d_\nu\}$, il vient

$$m(r, g) + m\left(r, \frac{1}{g}\right) \leqq \sum_{|d_\nu| \leqq r} r^{p-1} \int_{|d_\nu|}^{\infty} u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du$$
$$+ \sum_{r < |d_\nu|} r^p \int_{|d_\nu|}^{\infty} u^{-p-1} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du + O(r^{p-1} + \log r) \quad (r \to +\infty),$$

que l'on peut manifestement mettre sous la forme

$$m(r, g) + m\left(r, \frac{1}{g}\right) \leqq r^{p-1} \int_{|d_1|}^{r} n(u) u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du + r^{p-1} n(r) \int_{r}^{\infty} u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du$$
$$+ r^p \int_{r}^{\infty} \{n(u) - n(r)\} u^{-p-1} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du + O(r^{p-1} + \log r) \quad (r \to +\infty). \tag{5.9}$$

Observons que les intégrales au second membre de (5.9) ne dépendent que des modules des zéros et pôles de $f(z)$. Par conséquent, en partant de (5.6) au lieu de (5.5), on voit que l'on peut, dans (5.9), remplacer g par g^*.

Posons

$$\alpha = e^{\frac{1}{p+1}}, \tag{5.10}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon}{A_0(p+1)}. \tag{5.11}$$

Dès que u excèdera une borne convenable $r_0 (> x_0)$, on aura, en vertu de l'hypothèse (5.1),

$$n(u) \leqq (p+1) \int_{u}^{\alpha u} \frac{n(x)}{x} dx \leqq (p+1) N(\alpha u) < (p+1) \tau T(\alpha u), \tag{5.12}$$

et, par conséquent, (5.9) entraîne

$$m(r, g) + m\left(r, \frac{1}{g}\right) \leqq r^{p-1} \int_{|d_1|}^{r_0} n(u) u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du$$
$$+ (p+1) \tau r^{p-1} \int_{r_0}^{r} T(\alpha u) u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du + (p+1) \tau r^{p-1} T(\alpha r) \int_{r}^{\infty} u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du$$
$$+ (p+1) \tau r^p \int_{r}^{\infty} T(\alpha u) u^{-p-1} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du + O(r^{p-1} + \log r) \quad (r \to +\infty). \tag{5.13}$$

Examinons, tour à tour, les diverses intégrales au second membre de cette inégalité. La première d'entre elles est manifestement bornée quand $r \to +\infty$ et, par conséquent, le terme où elle intervient peut être absorbé par le terme correctif $O(r^{p-1} + \log r)$.

Considérons maintenant

$$I = \int_{r_0}^{r} T(\alpha u) u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du .$$

En vertu de (5.2) et (5.10)

$$t_n < \alpha r \leqq e^{\frac{1}{p+1}} (36)^3 t_n < 2(36)^3 t_n ,$$

ce qui permet de prendre $x = \alpha r$ et d'appliquer la propriété III du Lemme 1. Il vient

$$I < 2(36)^5 \frac{T(t_n)}{t_n^{p-\frac{1}{2}}} \alpha^{p-\frac{1}{2}} \int_{r_0}^{r} u^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du .$$

En effectuant la substitution $u = vr$, et en observant que

$$\alpha^{p-\frac{1}{2}} < e ,$$

on obtient

$$r^{p-1} I < 2e(36)^5 T(t_n) \left(\frac{r}{t_n}\right)^{p-\frac{1}{2}} \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}} \varphi(v) dv . \tag{5.14}$$

En utilisant, de la même manière, la propriété II du Lemme 1, et en remarquant que

$$1 \leqq \left(\frac{r}{t_n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq (36)^{\frac{3}{2}} , \tag{5.15}$$

on trouve

$$\begin{aligned} r^{p-1} T(\alpha r) \int_r^\infty u^{-p} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du &\leqq \left(\frac{\alpha r}{t_n}\right)^{p+\frac{1}{2}} T(t_n) \int_1^\infty v^{-p} \varphi(v) dv \\ &\leqq e(36)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{t_n}\right)^p T(t_n) \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}} \varphi(v)\, dv . \end{aligned} \tag{5.16}$$

De même

$$r^p \int_r^\infty T(\alpha u) u^{-p-1} \varphi\left(\frac{u}{r}\right) du \leqq e(36)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{t_n}\right)^p T(t_n) \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}} \varphi(v) dv . \tag{5.17}$$

En combinant (5.13), (5.14), (5.16) et (5.17), on obtient

$$m(r, g) + m\left(r, \frac{1}{g}\right) \leqq A_3(p+1)\tau \left(\frac{r}{t_n}\right)^p T(t_n) + O(r^{p-1} + \log r) \quad (r \to +\infty) , \tag{5.18}$$

où l'on peut prendre

$$A_3 = 2(36)^5 e \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} \varphi(v) dv \ .$$

Par hypothèse, l'ordre inférieur de $f(z)$ est au moins égal à $p - \frac{1}{2}$, et par conséquent, en tenant compte de (5.2),

$$\frac{T(t_n)}{t_n^p} r^p \geqq t_n^{-\frac{1}{2}-\eta} r^p \geqq r^{p-\frac{1}{2}-\eta} \qquad (0 < \eta < \tfrac{1}{2}) \ , \tag{5.19}$$

pourvu que r soit suffisamment grand. On peut donc récrire (5.18) en omettant le terme $O(r^{p-1} + \log r)$, à condition de majorer la constante A_3; on prendra, par exemple, $A_4 = 1 + A_3$ et l'on aura

$$m(r, g) + m\left(r, \frac{1}{g}\right) \leqq A_4(p+1)\tau T(t_n)\left(\frac{r}{t_n}\right)^p , \tag{5.20}$$

dès que r est suffisamment grand.

Nous allons maintenant démontrer (5.3). Considérons $c(r)$ et soit $\omega(r)$ une des déterminations de son argument. On tire de (5.5)

$$\log |h| = |c(r)| r^p \cos(\theta p + \omega(r)) \ ,$$

puis

$$m(r, h) = T(r, h) = \frac{|c(r)| r^p}{\pi} \ . \tag{5.21}$$

De $f = gh$, on déduit [4; p. 14]

$$T(r, f) \leqq T(r, g) + T(r, h) \ . \tag{5.22}$$

De même, $h = \dfrac{f}{g}$ entraîne

$$T(r, h) \leqq T(r, f) + T\left(r, \frac{1}{g}\right), \tag{5.23}$$

et, en combinant (5.21), (5.22) et (5.23), il vient

$$\left| T(r, f) - \frac{|c(r)| r^p}{\pi} \right| \leqq T(r, g) + T\left(r, \frac{1}{g}\right). \tag{5.24}$$

Observons encore que le même calcul livre

$$\left| T(r, f^*) - \frac{|c^*(r)| r^p}{\pi} \right| \leqq T(r, g^*) + T\left(r, \frac{1}{g^*}\right). \tag{5.25}$$

Les seconds membres de (5.24) et (5.25) sont faciles à estimer puisqu'en vertu de (4.2) et (5.15)

$$\begin{aligned} N(r, g) + N\left(r, \frac{1}{g}\right) = N(r, g^*) + N\left(r, \frac{1}{g^*}\right) = N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq \tau T(r, f) \\ \leqq \tau T(t_n)\left(\frac{r}{t_n}\right)^{p+\frac{1}{2}} \leqq (36)^{\frac{3}{2}} \tau T(t_n)\left(\frac{r}{t_n}\right)^p . \end{aligned} \tag{5.26}$$

De (5.24), (5.26) et (5.20), on déduit

$$\left| T(r, f) - \frac{|c(r)|\, r^p}{\pi} \right| \leqq A_5 (p+1) \tau T(t_n, f) \left(\frac{r}{t_n}\right)^p \left(A_5 = A_4 + (36)^{\frac{3}{2}}\right). \quad (5.27)$$

De même (5.25), (5.26) et (5.20) (où l'on remplace g par g^*) donnent

$$\left| T(r, f^*) - \frac{|c^*(r)|\, r^p}{\pi} \right| \leqq A_5 (p+1) \tau T(t_n, f) \left(\frac{r}{t_n}\right)^p. \quad (5.28)$$

En tenant compte de (5.11) et en posant

$$A_6 = \frac{A_5}{A_0}, \quad (5.29)$$

on obtient (5.3).

Il nous reste à prouver (5.4). En vertu de la définition (3.9) et des inégalités (5.12) et (4.2)

$$|c(r) - c(t_n)| \leqq \frac{1}{p} \{ \sum_{t_n < |a_\nu| \leqq r} |a_\nu|^{-p} + \sum_{t_n < |b_\nu| \leqq r} |b_\nu|^{-p} \}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{t_n < |d_\nu| \leqq r} |d_\nu|^{-p} \leqq \frac{n(r)}{p r^p} + \int_{t_n}^{r} \frac{n(u)}{u^{p+1}} du \leqq \frac{p+1}{p} \tau \frac{T(\alpha r)}{r^p}$$

$$+ (p+1) \tau \int_{t_n}^{r} \frac{T(\alpha u)}{u^{p+1}} du \leqq 2 \tau \frac{T(t_n)}{r^p} \left(\frac{\alpha r}{t_n}\right)^{p+\frac{1}{2}} + (p+1) \tau \frac{T(t_n)}{t_n^{p+\frac{1}{2}}} \int_{t_n}^{r} \frac{(\alpha u)^{p+\frac{1}{2}}}{u^{p+1}} du.$$

Comme précédemment, en tenant compte de (5.15) et (5.10), on trouve

$$|c(r) - c(t_n)| < \{2 \tau e (36)^{\frac{3}{2}} + 2(p+1) \tau e (36)^{\frac{3}{2}}\} \frac{T(t_n)}{t_n^p} < A_7 (p+1) \tau \frac{T(t_n)}{t_n^p}, \quad (5.30)$$

puis, en tenant compte de (5.11) et en posant

$$A_8 = \frac{A_7}{A_0}, \quad (5.31)$$

on obtient (5.4).

6. Démonstration du Théorème 1

Supposons que la constante A_0 ait été choisie suffisamment grande pour que l'on ait

$$A_6 < \tfrac{1}{2}, \qquad A_8 < \tfrac{1}{2}; \quad (6.1)$$

ceci est évidemment possible en vertu de (5.29) et (5.31).

Dans ces conditions, en prenant $r = t_n$, on tire de (5.3)

$$\frac{1}{2} \frac{T(t_n)}{t_n^p} \leqq \frac{|c(t_n)|}{\pi} \leqq \frac{3}{2} \frac{T(t_n)}{t_n^p}. \quad (6.2)$$

De même, on tire de (5.4)

$$| c(t_n) | - \frac{1}{2} \frac{T(t_n)}{t_n^p} \leqq | c(r) | \leqq | c(t_n) | + \frac{1}{2} \frac{T(t_n)}{t_n^p}, \tag{6.3}$$

puis, en utilisant (6.2)

$$\tfrac{1}{2} | c(t_n) | \leqq | c(r) | \leqq \tfrac{3}{2} | c(t_n) | , \tag{6.4}$$

et aussi

$$\frac{T(t_n)}{t_n^p} \leqq | c(r) | \leqq 6 \frac{T(t_n)}{t_n^p} . \tag{6.5}$$

La première de ces inégalités permet d'éliminer $T(t_n) t_n^{-p}$ du second membre de (5.28); en tenant compte de (5.11), (5.29) et (6.1), on obtient (3.18).

Nous démontrerons maintenant les propriétés I et II de l'énoncé du Théorème 1. Déterminons l'entier n par les inégalités

$$t_n \leqq r < t_{n+1} .$$

En vertu de (3.5) et du Lemme 1,

$$\sigma r < (36)^3 t_n ,$$

et, par conséquent, (5.4) reste valable quand on y remplace r par σr. Donc

$$| c(r) - c(\sigma r) | < 2 A_8 \varepsilon \frac{T(t_n)}{t_n^p} , \tag{6.6}$$

et, en vertu de (6.5) et (6.1)

$$| c(r) - c(\sigma r) | < 2 A_8 \varepsilon | c(r) | < \varepsilon | c(r) | ,$$

ce qui démontre (3.10).

De (5.3) et (5.4), on tire encore

$$\left| \frac{T(r)}{r^p} - \frac{T(t_n)}{t_n^p} \right| \leqq \left(2 A_6 + \frac{A_8}{\pi} \right) \varepsilon \frac{T(t_n)}{t_n^p} , \tag{6.7}$$

et, si A_0 est suffisamment grand,

$$4 \left(2 A_6 + \frac{A_8}{\pi} \right) < 1 , \tag{6.8}$$

et par conséquent,

$$\frac{3}{4} \frac{T(t_n)}{t_n^p} < \frac{T(r)}{r^p} . \tag{6.9}$$

De (6.7), on tire

$$\left| \frac{T(r)}{r^p} - \frac{T(\sigma r)}{\sigma^p r^p} \right| \leqq 2 \left(2 A_6 + \frac{A_8}{\pi} \right) \varepsilon \frac{T(t_n)}{t_n^p} ,$$

puis, en tenant compte de (6.8) et (6.9),

$$\left| \frac{T(r)}{r^p} - \frac{T(\sigma r)}{\sigma^p r^p} \right| < \varepsilon \frac{T(r)}{r^p},$$

ce qui démontre (3.6) et (3.7).

On raisonnerait de même pour déduire (3.11) et (3.12) de (5.3) et (6.9).

Considérons enfin les inégalités (3.13) et (3.14).

En vertu de (4.4), on obtient d'abord

$$\int_{v_0}^{r} \frac{T(u)}{u^{\gamma+1}} du < \frac{2(36)^5}{(p - \frac{1}{2} - \gamma) r^\gamma} \frac{r^p T(t_n)}{t_n^p},$$

puis, grâce à (3.6) et (3.7), on peut remplacer, au second membre, $T(t_n) t_n^{-p}$ par

$$4 \frac{T(r)}{r^p},$$

puisque, par hypothèse, $\sqrt{(r/t_n)} < 36$. On obtient ainsi (3.13).

De même (4.2) et les raisonnements précédents entraînent (3.14):

$$\int_{r}^{\infty} \frac{T(u)}{u^{\gamma+1}} du < \frac{36}{(\gamma - p - \frac{1}{2}) r^\gamma} \frac{r^p T(t_n)}{t_n^p} < \frac{144 T(r)}{(\gamma - p - \frac{1}{2}) r^\gamma}.$$

7. Valeur approchée de $\log |f(z)|$

Lemme 3. *Remplaçons l'hypothèse* (3.3) *par l'hypothèse plus restrictive*

$$K(f) < \frac{\varepsilon}{B_0(p+1)\{1 + \log(p+1)\}} \quad (0 < \varepsilon \leqq 1,\ B_0 \geqq A_0), \tag{7.1}$$

et laissons inchangées les notations et les autres hypothèses du Théorème 1.

Considérons les couronnes Γ_j définies par

$$\alpha^j \leqq r < \alpha^{j+\frac{3}{2}} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots;\ \alpha = e^{\frac{1}{p+1}}), \tag{7.2}$$

et soit

$$R_j = \alpha^{j+2}. \tag{7.3}$$

Posons

$$\log |f(z)| = \Re c(R_j) z^p + \log \left| \frac{\prod\limits_{|a_\nu| \leqq R_j} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{|b_\nu| \leqq R_j} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)} \right| + H(z). \tag{7.4}$$

On a alors

$$|H(z)| < \varepsilon T(r), \tag{7.5}$$

pourvu que $z \in \Gamma_j$ et l'entier j soit suffisamment grand.

Démonstration. Nous avons supposé

$$B_0 \geqq A_0$$

ce choix de B_0, qui sera précisé plus loin, rend valables toutes les conclusions du Théorème 1. En particulier la représentation (3.8) peut être employée. En faisant usage de la notation (3.9) et de la définition de la suite $\{d_\nu\}$, on obtient

$$|H(z)| \leqq \frac{r}{1} \sum_{|d_\nu| \leqq R_j} \frac{1}{|d_\nu|} + \frac{r^2}{2} \sum_{|d_\nu| \leqq R_j} \frac{1}{|d_\nu|^2} + \dots$$

$$+ \frac{r^{p-1}}{p-1} \sum_{|d_\nu| \leqq R_j} \frac{1}{|d_\nu|^{p-1}} + \sum_{R_j < |d_\nu|} \left| \log \left| E\left(\frac{z}{d_\nu}, p\right) \right| \right| + |k| |\log r| \tag{7.6}$$

$$+ |\alpha_1| r^{p-1} + |\alpha_2| r^{p-2} + \dots + |\alpha_p| .$$

Posons

$$\sigma_l = \frac{1}{l} \sum_{|d_\nu| \leqq R_j} \frac{1}{|d_\nu|^l} \quad (l = 1, 2, 3, \dots p-1) ,$$

et

$$\Sigma_l = \frac{1}{l} \sum_{R_j < |d_\nu|} \frac{1}{|d_\nu|^l} \quad (l = p+1, p+2, \dots) .$$

Les sommes σ_l apparaissent explicitement au second membre de (7.6), quant aux sommes Σ_l, elles s'introduisent dans nos calculs de la manière suivante.

Partons de l'inégalité

$$|\log |E(w, p)|| \leqq \sum_{l=p+1}^{\infty} \frac{|w|^l}{l} , \tag{7.7}$$

valable pour $|w| < 1$. En supposant $|d_\nu| > R_j$, on tire de (7.2) et (7.3)

$$\frac{r}{|d_\nu|} < \frac{r}{R_j} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} , \tag{7.8}$$

ce qui permet de passer de (7.7) à

$$\sum_{|d_\nu| > R_j} \left| \log \left| E\left(\frac{z}{d_\nu}, p\right) \right| \right| \leqq \sum_{l=p+1}^{\infty} r^l \Sigma_l . \tag{7.9}$$

La seconde des inégalités (3.4) assure la convergence des séries Σ_l et entraîne aussi

$$\lim_{u \to \infty} \frac{n(u)}{u^l} = \lim_{u \to \infty} \frac{N(u)}{u^l} = 0 \quad (l \geqq p+1) . \tag{7.10}$$

La convergence de la série double au second membre de (7.9) résultera de la suite de nos calculs.

Afin d'estimer les sommes σ_l faisons usage des relations (2.5) où il faut

remplacer $n(u)$ par $n(u) - |k|$. En intégrant par parties, il vient

$$\sigma_l \leqq \frac{n(R_j)}{lR_j^l} + \frac{N(R_j)}{R_j^l} + l \int_{|d_1|}^{R_j} \frac{N(u)}{u^{l+1}}\, du\,. \tag{7.11}$$

De même, (2.5) et (7.10) donnent

$$\Sigma_l \leqq l \int_{R_j}^{\infty} \frac{N(u)}{u^{l+1}}\, du \qquad (l = p+1, p+2, \ldots)\,. \tag{7.12}$$

Posons

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon}{B_0(p+1)\{1 + \log(p+1)\}}\,;$$

dès que u excèdera une borne convenable u_0, on aura, en vertu de l'hypothèse (7.1)

$$N(u) < \tau_1 T(u)\,, \tag{7.13}$$

ainsi qu'une inégalité analogue à (5.12):

$$n(u) < (p+1)\tau_1 T(\alpha u)\,. \tag{7.14}$$

Posons

$$r_1 = \max\{u_0, v_0, r_0\}\,,$$

(où v_0 et r_0 sont les bornes qui apparaissent dans l'énoncé du Théorème 1) puis

$$H_l = l \int_{|d_1|}^{r_1} \frac{N(u)}{u^{l+1}}\, du \qquad (l = 1, 2, 3, \ldots, p-1)\,.$$

De (7.11), (7.13) et (7.14), on tire d'abord

$$\sigma_l \leqq H_l + (p+1)\tau_1 \frac{T(\alpha R_j)}{lR_j^l} + \tau_1 \frac{T(R_j)}{R_j^l} + l\tau_1 \int_{r_1}^{R_j} \frac{T(u)}{u^{l+1}}\, du \qquad (R_j > r_1)\,,$$

puis, en vertu de (3.13)

$$\sigma_l \leqq H_l + \tau_1 \left\{(p+1)\frac{T(\alpha R_j)}{lR_j^l} + \frac{T(R_j)}{R_j^l} + lA_1 \frac{T(R_j)}{R_j^l(p - \frac{1}{2} - l)}\right\}.$$

On peut encore transformer le second membre de cette inégalité en faisant usage de (3.6); il vient

$$\sigma_l \leqq H_l + 2\tau_1 \frac{T(r)}{R_j^l}\left\{\frac{p+1}{l}\left\{\frac{\alpha R_j}{r}\right\}^p + \left(\frac{R_j}{r}\right)^p + \frac{lA_1}{(p - \frac{1}{2} - l)}\left(\frac{R_j}{r}\right)^p\right\}. \tag{7.15}$$

En tenant compte de (7.2) et (7.3), l'inégalité (7.15) entraîne

$$\sum_{l=1}^{p-1}\sigma_l r^l \leqq \sum_{l=1}^{p-1} H_l r^l + 2\tau_1 T(r)\left\{(p+1)e^3\sum_{l=1}^{p-1}\frac{1}{l} + e^2(p-1) + A_1 e^2 \sum_{l=1}^{p-1}\frac{l}{p-\frac{1}{2}-l}\right\}$$

que l'on peut manifestement remplacer par

$$\sum_{l=1}^{p-1}\sigma_l r^l \leqq \sum_{l=1}^{p-1} H_l r^l + B_2(p+1)\log(p+1)\tau_1 T(r)\,. \tag{7.16}$$

Un calcul tout pareil permettra d'évaluer le second membre de (7.9). De (7.12), (7.13), (3.14) et (3.6), on tire

$$\Sigma_l \leqq l\tau_1 \int_{R_j}^{\infty}\frac{T(u)}{u^{l+1}}\,du < \frac{l}{l-p-\frac{1}{2}}\,\frac{A_2}{R_j^l}\tau_1 T(R_j) < 2A_2\frac{l}{l-p-\frac{1}{2}}\left(\frac{R_j}{r}\right)^p \tau_1\frac{T(r)}{R_j^l}$$
$$< 2e^2 A_2\tau_1\frac{T(r)}{R_j^l}\,\frac{l}{l-p-\frac{1}{2}} \qquad (l = p+1, p+2, p+3, \ldots)\,,$$

puis, en vertu de la seconde des inégalités (7.8)

$$\sum_{l=p+1}^{\infty} r^l\,\Sigma_l < 2e^2 A_2\tau_1 T(r)\sum_{l=p+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha^{\frac{l}{2}}} + (p+\tfrac{1}{2})\,\frac{1}{\alpha^{\frac{l}{2}}(l-p-\frac{1}{2})}\right\} \quad \left(\alpha = e^{\frac{1}{p+1}}\right).$$

En revenant à (7.9), on voit que

$$\sum_{|d_\nu|>R_j}\left|\log\left|E\left(\frac{z}{d_\nu}, p\right)\right|\right| \leqq B_3(p+1)\log(p+1)\tau_1 T(r)\,. \tag{7.17}$$

En combinant (7.6), (7.16) et (7.17), on obtient

$$|H(z)| \leqq (B_2 + B_3)(p+1)\log(p+1)\tau_1 T(r) + O(r^{p-1} + \log r)\ (r \to \infty)\,.$$

En remplaçant $B_2 + B_3$ par $B_0 (> B_2 + B_3)$, on peut omettre le terme $O(r^{p-1} + \log r)$, puisque, par hypothèse, l'ordre inférieur de $f(z)$ est au moins égal à $p - \frac{1}{2} (\geqq \frac{1}{2})$.

En revenant à la définition de τ_1, on obtient (7.5) pourvu que r soit suffisamment grand. Le Lemme 3 est ainsi démontré.

8. Conséquences du lemme de M. H. Cartan

Lemme 4. *Remplaçons l'hypothèse* (7.1) *par l'hypothèse plus restrictive*

$$K(f) < \frac{\varepsilon}{B_0(p+1)\log(p+1) + B_1(p+1)\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}$$
$$\left(0 < \varepsilon \leqq 1,\ 0 < \delta < \frac{1}{e},\ B_1 \geqq B_0\right), \tag{8.1}$$

et laissons inchangées les notations et les autres hypothèses du Lemme 3. Considérons les couronnes Γ_j définies par (7.2).

A tout entier j suffisamment grand, on peut attacher un ensemble exceptionnel E_j tel que

$$z \in \{\Gamma_j - E_j\},$$

entraîne

$$\left| \log \left| \frac{\prod\limits_{|a_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod\limits_{|b_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)} \right| \right| < \varepsilon T(r) \quad (R = R_j = \alpha^{j+2}). \tag{8.2}$$

L'ensemble E_j peut-être enfermé dans un nombre fini de disques, dont la somme des rayons n'excède pas $4e\delta\alpha^{j+2}$.

Dans le cas particulier des fonctions entières, l'inégalité

$$\log \left| \prod_{|a_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \right| \leq \varepsilon\, T(r), \tag{8.3}$$

est valable dans toute la couronne Γ_j.

Démonstration. Posons

$$\tau_2 = \frac{\varepsilon}{B_0(p+1)\log(p+1) + B_1(p+1)\log\left(\frac{1}{\delta}\right)},$$

le choix de B_1 ($\geq B_0$) sera précisé plus loin.

Dès que u excèdera une borne convenable, on aura, en vertu de (8.1)

$$N(u) < \tau_2 T(u), \tag{8.4}$$

ainsi que l'inégalité

$$n(u) < \tau_2(p+1)T(\alpha u), \tag{8.5}$$

analogue à (5.12).

En tenant compte de (8.4), (8.5) et des définitions de R et α, on obtient d'abord

$$\log \left| \prod_{|a_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \right| \leq \sum_{|a_\nu| \leq R} \log \frac{R}{|a_\nu|} + n(R, 0) \log\left(1 + \frac{R}{r}\right) \leq \tau_2 T(R)$$
$$+ (p+1)\tau_2 T(\alpha R) \log(1 + \alpha^2). \tag{8.6}$$

Comme nous l'avons vu plusieurs fois, on peut, grâce à (3.6), remplacer (8.6) par

$$\log \left| \prod_{|a_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) \right| \leq B_4(p+1)\tau_2 T(r). \tag{8.7}$$

En choisissant B_1 au moins égal à B_4, on obtient (8.3).

En vertu du lemme bien connu de M. H. CARTAN, on a

$$-\log \Big| \prod_{|b_\nu| \leq R} (z - b_\nu) \Big| \leqq -n(R, \infty) \log (\delta R) , \tag{8.8}$$

sauf, peut-être, si z appartient à un ensemble exceptionnel, formé d'un nombre fini de disques dont la somme des rayons est au plus égale à $2e\delta R$. Ne considérons que la portion E_j' de cet ensemble située dans la couronne Γ_j.

De même, en partant de

$$-\log \Big| \prod_{|a_\nu| \leq R} (z - a_\nu) \Big| \leqq -n(R, 0) \log (\delta R) ,$$

au lieu de (8.8), on définira un ensemble exceptionnel E_j'' et l'on prendra

$$E_j = E_j' + E_j'' .$$

Si

$$z \in \{\Gamma_j - E_j\} ,$$

l'inégalité (8.8) est valable et, par conséquent,

$$\log \left| \frac{1}{\prod_{|b_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)} \right| \leqq \sum_{|b_\nu| \leq R} \log |b_\nu| - n(R, \infty) \log R + n(R, \infty) \log \left(\frac{1}{\delta}\right)$$

$$= -N(R, \infty) + n(R, \infty) \log \left(\frac{1}{\delta}\right) \leqq n(R, \infty) \log \left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Puis, en vertu de (8.5) et (3.6)

$$\log \left| \frac{1}{\prod_{|b_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)} \right| \leqq B_5 (p + 1) \tau_2 T(r) \log \left(\frac{1}{\delta}\right) . \tag{8.9}$$

Enfin, en combinant (8.7) et (8.9), il vient

$$\log \left| \frac{\prod_{|a_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right)}{\prod_{|b_\nu| \leq R} \left(1 - \frac{z}{b_\nu}\right)} \right| \leqq (B_4 + B_5) (p + 1) \tau_2 T(r) \log \left(\frac{1}{\delta}\right) ,$$

et cette inégalité est encore vraie si l'on change le signe de son premier membre. En prenant

$$B_1 \geqq B_4 + B_5 ,$$

on obtient (8.2).

9. Un lemme résumant les résultats précédents

Posons

$$c(\alpha^j) = c_j \quad (j = 1, 2, 3, \ldots) .$$

De (3.10), on déduit

$$| c(R_j) - c_j | < \varepsilon | c_j | \quad (R_j = \alpha^{j+2}) , \tag{9.1}$$

ainsi que

$$| c(r) | < (1 + \varepsilon) | c_j | \leqq 2 | c_j | \quad (\alpha_j \leqq r < \alpha^{j+\frac{3}{2}}) . \tag{9.2}$$

En combinant (7.4), (8.2) et (9.1), on obtient

$$| \log | f(z) | - \Re c_j z^p | < 2 \varepsilon T(r) + \varepsilon | c_j | r^p , \tag{9.3}$$

pourvu que

$$z \in \{\Gamma_j - E_j\} ,$$

et que j soit suffisamment grand.

On peut encore transformer le second membre de (9.3). En effet, de (3.11) et (9.2), on déduit

$$T(r) < \frac{2}{\pi} | c(r) | r^p < \frac{4}{\pi} | c_j | r^p . \tag{9.4}$$

Nous venons ainsi de démontrer le

Lemme 5. *Laissons inchangées les hypothèses et les notations du Lemme 4. Il existe alors une suite* $\{c_j\}$ *telle que*

$$| \log | f(z) | - \Re c_j z^p | < 4 \varepsilon | c_j | r^p \tag{9.5}$$

pourvu que

$$z \in \{\Gamma_j - E_j\} ,$$

et que j *soit suffisamment grand.*

Dans le cas d'une fonction entière, on a

$$\log | f(z) | < \Re c_j z^p + 4 \varepsilon | c_j | r^p , \tag{9.6}$$

dans toute la couronne $\Gamma_j (j > j_0)$.

10. Démonstration de l'existence de chemins asymptotiques dans le cas des fonctions entières et réelles

La fonction $f(z)$ étant réelle, il en est de même de la quantité $c(r)$ définie par (3.9). Les termes de la suite $\{c_j\}$ sont donc réels. D'autre part, en vertu de (3.10),

$$| c_{j+1} - c_j | < \varepsilon | c_j |$$

et, par conséquent,

$$c_j \neq 0 , \quad \left| \frac{c_{j+1}}{c_j} - 1 \right| < \varepsilon ,$$

pourvu que j soit assez grand. Les quantités c_j sont donc toutes de même signe pour $j > j_0$; supposons

$$c_j < 0 . \tag{10.1}$$

Fixons les valeurs des paramètres ε et δ; nous choisirons

$$\varepsilon = \frac{1}{16}, \qquad \delta = \frac{1}{(p+1)^2},$$

de sorte que tous nos raisonnements seront valables dès que

$$K(f) < \frac{1}{16(B_0 + 2B_1)(p+1)\log(p+1)}. \tag{10.2}$$

Considérons le secteur

$$|\theta| \leqq \frac{\pi}{3p}.$$

Si z appartient à ce secteur et si $|z|$ est suffisamment grand, on aura, en vertu de (10.1) et de (9.6)

$$\log|f(z)| < -\tfrac{1}{4}|c_j| r^p, \tag{10.3}$$

que l'on peut transformer grâce à (9.4):

$$|f(z)| < e^{-\frac{\pi}{16}T(r)}.$$

Manifestement, cette dernière inégalité reste valable si l'on remplace z par $ze^{i\frac{2\pi}{p}}$. Nos raisonnements prouvent donc l'existence de p secteurs dans lesquels on peut choisir les chemins asymptotiques de détermination 0. Observons encore que si l'on avait $c_j > 0$, au lieu de (10.1), l'inégalité (10.3) serait encore valable dans le secteur

$$\left|\theta - \frac{\pi}{p}\right| \leqq \frac{\pi}{3p},$$

ainsi que dans les secteurs qui s'en déduisent par des rotations convenables autour de l'origine.

Le § 11 de ce travail sera consacré à la construction de chemins asymptotiques, dans le cas général de fonctions méromorphes qui ne sont pas nécessairement réelles.

L'existence de tels chemins se démontre par une méthode qui n'est, au fond, pas différente de celle que nous venons d'exposer. La complication des détails provient de ce que les quantités c_j ne sont plus alignées et aussi de ce que les chemins asymptotiques doivent éviter les ensembles exceptionnels E_j.

11. Démonstration du Théorème 2

Nous prendrons, dans l'hypothèse (8.1) du Lemme 4,

$$\delta = \frac{1}{(p+1)^{11}} \leqq \frac{1}{(p+1)^2 2^9} \leqq \frac{1}{(p+1)2^{10}}, \tag{11.1}$$

et

$$\varepsilon \leqq \frac{1}{16}. \tag{11.2}$$

Les couronnes Γ_j et Γ_{j-1} ont en commun la couronne

$$\alpha^j \leqq r < \alpha^{j+\frac{1}{2}},$$

d'épaisseur D_j:

$$D_j = \alpha^j(\sqrt{\alpha} - 1) > \alpha^j \frac{1}{2(p+1)} \qquad (\alpha = e^{\frac{1}{p+1}}). \tag{11.3}$$

Désignons par

$$\varrho_1^{(j)}, \varrho_2^{(j)}, \varrho_3^{(j)}, \ldots$$

les rayons des disques qui recouvrent E_j. En vertu du Lemme 5 et de (11.1) on a

$$\sum_\nu \varrho_\nu^{(j)} \leqq 4e^2\delta\alpha^j \leqq \frac{e^2}{2^8}\frac{\alpha^j}{(p+1)}. \tag{11.4}$$

Observons en outre que les centres de ces disques sont à une distance de l'origine au moins égale à Λ_j:

$$\Lambda_j = \alpha^j - 4e^2\delta\alpha^j > \tfrac{1}{2}\alpha^j. \tag{11.5}$$

Vus de l'origine, ces disques sous-tendent des angles dont la somme n'excède pas S_j:

$$S_j \leqq 2\sum \arcsin\left(\frac{\varrho_\nu^{(j)}}{\Lambda_j}\right) \leqq \frac{\pi}{\Lambda_j}\sum_\nu \varrho_\nu^{(j)} \leqq 8\pi e^2\delta. \tag{11.6}$$

La somme des diamètres des disques recouvrant $E_j + E_{j-1}$ est L_j:

$$L_j = 2\sum_\nu \varrho_\nu^{(j)} + 2\sum_\nu \varrho_\nu^{(j-1)} < 16e^2\delta\alpha^j. \tag{11.7}$$

En vertu de (11.1), (11.3) et (11.7), on a

$$L_j < D_j,$$

et, par conséquent, il est possible de trouver un rayon r_j tel que

$$\alpha^j \leqq r_j < \alpha^{j+\frac{1}{2}}, \tag{11.8}$$

et tel que la circonférence

$$|z| = r_j, \tag{11.9}$$

ne coupe pas l'ensemble $E_j + E_{j-1}$.

Considérons maintenant les nombres c_j:

$$c_j = |c_j|\, e^{i\omega_j} \qquad (c_j \neq 0),$$

que l'on peut, en vertu du Lemme 5, attacher aux couronnes Γ_j. D'après ce qui précède, l'inégalité (9.5) sera valable sur toute la circonférence (11.9).

De plus, l'inégalité obtenue en remplaçant, dans (9.5), j par $j-1$ sera également valable.

Les conditions

$$z \in \Gamma_j\,, \qquad \cos(p\theta + \omega_j) > \tfrac{1}{2} \quad (z = re^{i\theta})\,, \tag{11.10}$$

définissent p secteurs de Γ_j que nous désignerons par

$$\Sigma_j^{(1)}, \Sigma_j^{(2)}, \ldots \Sigma_j^{(p)},$$

et que nous nommerons les «secteurs de grand module». Chacun de ces secteurs est d'ouverture $\dfrac{2\pi}{3p}$.

Définissons de même des «secteurs de petit module» par les conditions

$$z \in \Gamma_j\,, \quad \cos(p\theta + \omega_j) < -\tfrac{1}{2}\,, \tag{11.11}$$

et désignons-les par

$$\sigma_j^{(1)}, \sigma_j^{(2)}, \ldots \sigma_j^{(p)}\,.$$

En vertu du Lemme 5, on aura $\left(\text{puisque } \varepsilon \leqq \dfrac{1}{16}\right)$

$$\log|f(z)| > \tfrac{1}{4}|c_j|\,r^p \quad (z \in \Sigma_j - E_j)\,; \tag{11.12}$$

de même

$$\log|f(z)| < -\tfrac{1}{4}|c_j|\,r^p \quad (z \in \sigma_j - E_j)\,. \tag{11.13}$$

En tenant compte de (9.4), on peut encore transformer ces inégalités; on obtient

$$\log|f(z)| > \frac{\pi}{16}T(r) \qquad (z \in \Sigma_j - E_j)\,, \tag{11.14}$$

et

$$\log|f(z)| < -\frac{\pi}{16}T(r) \qquad (z \in \sigma_j - E_j)\,. \tag{11.15}$$

L'ouverture totale des secteurs Σ_j et σ_j est $\dfrac{4\pi}{3}$ et il faut donc qu'il y ait empiètement des secteurs de rang j et des secteurs de rang $j-1$. Il ne saurait y avoir empiètement d'un σ_{j-1} et d'un Σ_j, ou d'un σ_j et d'un Σ_{j-1}, puisqu'on pourrait alors trouver un point de la circonférence (11.9) pour lequel les inégalités (11.14) et (11.15) se contradiraient.

Il faut donc que tout Σ_{j-1} empiète sur un, et un seul, Σ_j et tout σ_{j-1} sur un, et un seul σ_j. Ceci nous permet, en partant d'un secteur Σ_{j_0}, de construire une chaîne

$$\Sigma_{j_0}, \Sigma_{j_0+1}, \Sigma_{j_0+2}, \ldots \Sigma_j, \Sigma_{j+1}, \ldots \tag{11.16}$$

de secteurs, s'étendant à l'infini, et telle que chacun de ses termes empiète sur le suivant.

Nous allons maintenant construire un chemin continu $\mathcal{L}$, s'étendant à l'infini, ne quittant jamais (11.16), et tel que, tout au long de $\mathcal{L}$, l'inégalité (11.14) soit constamment satisfaite.

Considérons un rayon issu de l'origine, défini par son équation polaire

$$\theta = \beta .$$

Soient P_j son point d'intersection avec la circonférence (11.9) et Q_{j+1} son point d'intersection avec la circonférence

$$|z| = r_{j+1} .$$

En vertu de (11.6) et (11.1), on a

$$2(p+1)S_j \leqq 2^4 \pi e^2 (p+1) \frac{1}{(p+1)^2 2^9} < \frac{2\pi}{3p} ,$$

et l'on peut, en choisissant convenablement β, s'arranger en sorte que le segment $P_j Q_{j+1}$ soit dans le secteur Σ_j (de la chaîne (11.16)) et évite l'ensemble E_j^* formé par E_j et par les $(2p-1)$ ensembles obtenus par des rotations de E_j, autour de l'origine, d'angles

$$k\frac{\pi}{p} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots (2p-1)) .$$

Le chemin $\mathcal{L}$ sera obtenu en joignant les segments rectilignes $P_j Q_{j+1}$ $(j = j_0, j_0 + 1, \ldots)$ par les arcs de circonférence $Q_{j+1} P_{j+1}$ $(j = j_0, j_0 + 1, j_0 + 2, \ldots)$ (choisis de manière à ne pas quitter (11.16)). Le long d'un arc $Q_j P_j$, l'une ou l'autre des inégalités

$$\log |f(z)| > \tfrac{1}{4} |c_j| r^p , \quad \log |f(z)| > \tfrac{1}{4} |c_{j-1}| r^p ,$$

doit être satisfaite. Dans un cas, comme dans l'autre, on obtient (11.14).

Il est donc clair que l'inégalité (11.14) sera satisfaite tout au long de $\mathcal{L}$. En outre, comme nous avons pris la précaution d'éviter E_j^* (et non pas seulement E_j), une rotation de $\mathcal{L}$, autour de l'origine, d'angle $\frac{\pi}{p}$, transformera le chemin $\mathcal{L}$ en un chemin $\mathcal{L}^{(1)}$ situé tout entier dans une chaîne de secteurs de petit module, et évitant les ensembles exceptionnels E_j. L'inégalité (11.15) sera donc satisfaite tout au long de $\mathcal{L}^{(1)}$. On peut évidemment, par de nouvelles rotations, passer d'un chemin caractérisé par l'une des inégalités (11.14) ou (11.15), à un chemin caractérisé par l'autre inégalité.

Estimons encore la longueur s_j de la portion de $\mathcal{L}$ située entre P_j et P_{j+1}. On a manifestement

$$s_j < (\alpha^{j+\frac{3}{2}} - \alpha^j) + \frac{4\pi}{3p} \alpha^{j+\frac{3}{2}} < 16\alpha^j ,$$

et, par conséquent, la portion de $\mathcal{L}$ située dans la couronne Γ_j a une longueur inférieure à

$$16(\alpha^{j-1} + \alpha^j + \alpha^{j+1}) < 16(2 + e)\alpha^j .$$

Nous venons ainsi d'achever la démonstration du Théorème 2. En effet, il suffit, pour que toutes nos constructions et inégalités soient valables, que $K(f)$ satisfasse à (8.1) avec le choix de δ indiqué par (11.1) et $\varepsilon \leqq \frac{1}{16}$. On peut évidemment prendre $\varepsilon = \frac{1}{16}$; dans ces conditions, en choisissant convenablement C_0, la condition à satisfaire peut être mise sous la forme (3.20). L'énoncé complémentaire relatif aux fonctions entières et réelles a été démontré au § 10.

12. Démonstration du Théorème 3

Notre démonstration repose sur le Théorème 2 ainsi que sur l'emploi systématique du lemme suivant, implicitement contenu dans les travaux de M. R. NEVANLINNA.

Lemme 6. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe, $z_1, z_2, \ldots z_q$ des nombres complexes, finis et distincts. On a toujours*

$$\sum_{k=1}^{q} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_k} \right| \leqq \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_1} + \frac{1}{f(z) - z_2} + \ldots + \frac{1}{f(z) - z_q} \right| + \log 3 + (q-1) \log\left(\frac{4}{3\eta}\right) + q \log\left(\frac{2q}{\eta}\right), \tag{12.1}$$

où

$$0 < \eta \leqq 1 , \qquad \eta \leqq \min_{k \neq h} | z_k - z_h | .$$

Démonstration. Si $q = 1$, l'inégalité est évidente et il n'y a rien à démontrer; nous supposerons donc $q \geqq 2$.

Soit E_k l'ensemble des points tels que

$$| f(z) - z_k | < \frac{\eta}{2q} \qquad (k = 1, 2, \ldots q) .$$

Les raisonnements de M. NEVANLINNA [4; p. 64] montrent que $z \in E_k$ entraîne

$$\overset{+}{\log} \frac{1}{| f(z) - z_k |} < \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_1} + \frac{1}{f(z) - z_2} + \ldots + \frac{1}{f(z) - z_q} \right| + \log 3 .$$

Mais, en tout point de E_k,

$$| f(z) - z_h | > \frac{3\eta}{4} \qquad (z_k \neq z_h) ,$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^{q} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_k} \right| \leqq \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_1} + \frac{1}{f(z) - z_2} + \ldots + \frac{1}{f(z) - z_q} \right| + \log 3$$
$$+ (q - 1) \log \left(\frac{4}{3\eta} \right).$$

En vertu de la symétrie des deux membres de cette inégalité, elle reste valable en tout point de $E_1 + E_2 + \ldots + E_q$; pour de tels points, l'inégalité (12.1) est donc vérifiée.

Pour $z \notin \{E_1 + E_3 + \ldots + E_q\}$ on aura

$$| f(z) - z_k | \geqq \frac{\eta}{2q} \qquad (k = 1, 2, \ldots q),$$

et, par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{q} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_k} \right| \leqq q \log \left(\frac{2q}{\eta} \right),$$

ce qui entraîne encore (12.1) et complète la démonstration du Lemme 6.

Posons

$$H(z) = (f(z) - z_1)(f(z) - z_2) \ldots (f(z) - z_q),$$

et observons que (12.2)

$$\overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(z) - z_1} + \frac{1}{f(z) - z_2} + \ldots + \frac{1}{f(z) - z_q} \right| \leqq \overset{+}{\log} \left| \frac{H'(z)}{H(z)} \right| + \overset{+}{\log} \frac{1}{| f'(z) |}.$$

En combinant l'inégalité (12.2), le Lemme 6 et les propriétés fondamentales de la dérivée logarithmique, on obtient le

Lemme 7. *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini et $E(r)$ un ensemble de valeurs de θ appartenant à l'intervalle*

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

L'ensemble $E(r)$, qui peut varier avec r, sera supposé mesurable.

On a toujours, quels que soient les nombres

$$z_1, z_2, \ldots z_q,$$

finis et distincts

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi} \int_{E(r)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\theta}) - z_k} \right| d\theta \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{E(r)} \overset{+}{\log} \frac{1}{| f'(re^{i\theta}) |} d\theta + O(\log r) \; (r \to \infty). \tag{12.3}$$

En prenant, dans le Lemme 7,

$$E(r) = [0, 2\pi],$$

on obtient une inégalité importante signalée par ULLRICH [9; p. 207]:

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{k=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f(z) - z_k}\right) + O(\log r) \leqq T(r, f') . \tag{12.4}$$

Comme nous l'avons montré ailleurs [1], de l'inégalité (12.4) et de l'inégalité élémentaire [4; p. 104]

$$T(r, f') \leqq T(r, f) + N(r, f) + O(\log r) \quad (r \to \infty) ,$$

on tire aisément la conclusion suivante:

Si $f(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini, et si

$$\delta(\infty, f) > 1 - \gamma , \quad \sum_{\tau \neq \infty} \delta(\tau, f) > 1 - \gamma \quad (0 < \gamma < 1) ,$$

on a aussi

$$K(f') \leqq \frac{4\gamma}{1 - \gamma^2} . \tag{12.5}$$

En supposant $G_0 > 2$, la définition (3.23) donne $\gamma < \frac{1}{2}$ et, en vertu des hypothèses (3.24) et de (12.5)

$$K(f') < \frac{\varepsilon}{C_0(p + 1)\{1 + \log(p + 1)\}} , \tag{12.6}$$

pourvu que l'on ait choisi

$$G_0 \geqq \frac{16}{3} C_0 .$$

En outre, en posant

$$T_1(r) = T(r, f')$$

on a

$$(1 - \gamma)T(r) \leqq T_1(r) \leqq (1 + \gamma)T(r) \quad (T(r) = T(r, f)) , \tag{12.7}$$

dès que r est suffisamment grand.

Ces dernières inégalités montrent que l'ordre inférieur de $f'(z)$ coïncide avec l'ordre inférieur de $f(z)$. Toutes les hypothèses du Théorème 2 se trouvent donc vérifiées pour la fonction $f'(z)$ et l'on peut affirmer l'existence de p chemins

$$\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(3)}, \mathcal{L}^{(5)}, \ldots , \tag{12.8}$$

le long desquels

$$| f'(z) | < e^{-\frac{\pi}{16} T_1(r)} . \tag{12.9}$$

Désignons par $\mathcal{L}$ l'un quelconque de ces chemins et soit z^* un de ses points. Considérons

$$\beta = f(z^*) + \int_{z^*}^{\infty} f'(\zeta) d\zeta , \tag{12.10}$$

l'intégrale étant prise le long de $\mathcal{L}$. Supposons

$$\alpha^m \leqq |z^*| < \alpha^{m+1} \quad (\alpha = e^{\frac{1}{p+1}}) ; \tag{12.11}$$

en vertu de (12.9), (12.10), (12.11) et du Théorème 2, on obtient

$$|\beta - f(z^*)| \leqq C_1(\alpha^m e^{-\frac{\pi}{16} T_1(\alpha^m)} + \alpha^{m+1} e^{-\frac{\pi}{16} T_1(\alpha^{m+1})} + \alpha^{m+2} e^{-\frac{\pi}{16} T_1(\alpha^{m+2})} + \ldots). \tag{12.12}$$

La série au second membre de (12.12) converge puisque l'ordre inférieur de $f'(z)$ étant au moins égal à $p - \frac{1}{2}$, on a

$$T_1(\alpha^n) > \alpha^{n(p-\frac{1}{2}-\eta)} \quad (p \geqq 1, \eta > 0) ,$$

dès que n est suffisamment grand.

De plus, nos raisonnements montrent que $f(z^*) \to \beta$ quand $z^* \to \infty$ le long de $\mathcal{L}$. Les p chemins asymptotiques qui composent la suite (12.8) sont donc des chemins asymptotiques de la fonction $f(z)$; ils déterminent $s(\geqq 1)$ valeurs asymptotiques distinctes et finies:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_s . \tag{12.13}$$

Nous nous proposons maintenant de démontrer les inégalités

$$1 - \gamma - 235\,\varepsilon \leqq \sum_{k=1}^{s} \delta(\beta_k) , \tag{12.14}$$

$$\frac{1}{p} - \gamma - 578\varepsilon \leqq \delta(\beta_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots s) , \tag{12.15}$$

où γ est défini par (3.23).

Soit

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

la suite formée par toutes les valeurs déficientes, finies de $f(z)$. Eliminons de cette suite, s'il y a lieu, toutes les valeurs asymptotiques (12.13), et soit

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \cdots ,$$

la suite restante. En vertu de nos hypothèses,

$$1 - \gamma < \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta(\tau_\nu) = \sum_{k=1}^{s} \delta(\beta_k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta(\chi_\nu) . \tag{12.16}$$

Montrons d'abord que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \delta(\chi_\nu) \leqq 235\,\varepsilon . \tag{12.17}$$

Choisissons q tel que

$$\sum_{\nu=q+1}^{\infty} \delta(\chi_\nu) < \varepsilon . \tag{12.18}$$

En vertu de l'hypothèse $C_0 \geqq A_0$, (12.6) entraîne

$$K(f') < \frac{\varepsilon}{A_0(p+1)},$$

ce qui montre que le Théorème 1 s'applique à la fonction $f'(z)$. Il en est de même des Lemmes 4 et 5, à condition de choisir convenablement les paramètres ε et δ qui apparaissent dans leurs énoncés. Nous prendrons, comme au § 11,

$$\delta = (p+1)^{-11}. \tag{12.19}$$

Quant à ε, il a la même signification que dans le calcul présent; nous supposerons

$$0 < \varepsilon \leqq G_1 = \frac{1}{720}, \tag{12.20}$$

ce qui est nécessaire par la suite. En choisissant la constante numérique G_0 suffisamment grande, on aura encore

$$K(f') < \frac{\varepsilon}{(B_0 + 11 B_1)(p+1)\log(p+1)},$$

et cette condition est suffisante pour permettre l'application des Lemmes 4 et 5 à $f'(z)$, avec δ défini par (12.19).

On peut alors, comme nous l'avons montré au § 11, associer à $f'(z)$ une suite $\{r_j\}$ et une suite $\{c_j\}$ telles que sur toute circonférence

$$|z| = r_j \quad (j \geqq j_0),$$

on ait

$$|\log|f'(z)| - |c_j| r_j^p \cos(p\theta + \omega_j)| < 4\varepsilon |c_j| r_j^p. \tag{12.21}$$

En vertu de (3.11) et (3.6), on a encore

$$\frac{|c(\alpha^j)|}{\pi} = \frac{|c_j|}{\pi} < (1-\varepsilon)^{-1} \frac{T_1(\alpha^j)}{\alpha^{jp}} < (1-\varepsilon)^{-2} \frac{T_1(r_j)}{r_j^p}. \tag{12.22}$$

Associons au rayon r_j un ensemble $E(r_j)$, de valeurs de θ, défini par

$$\cos(p\theta + \omega_j) \geqq -5\varepsilon. \tag{12.23}$$

Considérons aussi l'ensemble complémentaire $E^*(r_j)$, de valeurs de θ, telles que

$$\cos(p\theta + \omega_j) < -5\varepsilon. \tag{12.24}$$

Lemme 8. *Soient*

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_q,$$

des nombres complexes, finis et distincts. On a

$$\sum_{h=1}^{q} \frac{1}{2\pi} \int_{E(r_j)}^{+} \log \frac{1}{|f(r_j e^{i\theta}) - z_h|} d\theta < 116 \varepsilon T_1(r_j) , \tag{12.25}$$

dès que j est suffisamment grand.

Démonstration. De (12.21), (12.22) et (12.23), on tire

$$\log \frac{1}{|f'(z)|} < 9\varepsilon \, |c_j| \, r_j^p < 36\pi\varepsilon T_1(r_j) \qquad (\varepsilon < \tfrac{1}{2}) , \tag{12.26}$$

et l'inégalité (12.25) résulte immédiatement du Lemme 7.

Considérons maintenant l'ensemble $E^*(r_j)$. Il est manifestement composé de p intervalles disjoints que nous désignerons par

$$I_1^{(j)}, I_2^{(j)}, \ldots I_p^{(j)} ;$$

quand θ parcourt $I_m^{(j)}$, $r_j e^{i\theta}$ parcourt un arc $\mathcal{A}_m^{(j)}$ de la circonférence $|z| = r_j$. Nous engendrons ainsi p arcs disjoints

$$\mathcal{A}_1^{(j)}, \mathcal{A}_2^{(j)}, \ldots \mathcal{A}_p^{(j)} . \tag{12.27}$$

Considérons l'un des chemins asymptotiques de la suite (12.8) et soit

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \beta_1 \quad (z \in \mathcal{L}^{(1)}) .$$

Il est clair qu'il existe toujours un point z_{1j} commun à $\mathcal{L}^{(1)}$ et à l'un des arcs (12.27) puisque, le long de $\mathcal{L}^{(1)}$,

$$|f'(z)| < e^{-\frac{\pi}{16} T_1(r_j)} \qquad (|z| = r_j) ,$$

alors qu'en un point d'argument appartenant à $E(r_j)$, on a, en vertu de (12.20) et de (12.26)

$$e^{-\frac{\pi}{20} T_1(r_j)} < |f'(z)| .$$

On peut donc, par une numérotation convenable des arcs $\mathcal{A}^{(j)}$, s'arranger en sorte que $\mathcal{A}_1^{(j)}$ et $\mathcal{L}^{(1)}$ aient en commun le point z_{1j}, pour tout j suffisamment grand.

En vertu de (12.21) et (12.24), on a

$$|f'(z)| < e^{-\varepsilon |c_j| r_j^p} , \tag{12.28}$$

sur tout l'arc $\mathcal{A}_1^{(j)}$, et par conséquent,

$$|f(z) - f(z_{1j})| = \left| \int_{z_{1j}}^{z} f'(\zeta) d\zeta \right| \leqq \pi r_j e^{-\varepsilon |c_j| r_j^p} . \tag{12.29}$$

Or,

$$\lim_{j\to\infty} f(z_{1j}) = \beta_1 ,$$

et, en vertu de (12.29)

$$\lim_{j\to\infty} f(z) = \beta_1 \qquad (|z| = r_j) ,$$

uniformément sur chacun des arcs $\mathscr{A}_1^{(j)}$.

Ces raisonnements sont évidemment valables pour chacune des valeurs asymptotiques, et l'on voit que chacune de ces valeurs est approchée uniformément par $f(z)$ sur un ou plusieurs des arcs $\mathscr{A}_m^{(j)}$.

Il est désormais facile de démontrer l'inégalité suivante:

$$\sum_{h=1}^{q} \frac{1}{2\pi} \int_{E^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r_j e^{i\theta}) - \chi_h} \right| d\theta \leqq q \overset{+}{\log} \frac{2}{\eta} \qquad (j > j_0) \tag{12.30}$$

où

$$\eta = \min_{\substack{1\leqq k\leqq s\\ 1\leqq h\leqq q}} |\beta_k - \chi_h| .$$

En effet, pour j suffisamment grand, on aura, sur tous les arcs $\mathscr{A}_m^{(j)}$

$$|f(z) - \chi_h| > \frac{\eta}{2} ,$$

ce qui entraîne manifestement (12.30).

En rapprochant cette dernière inégalité de (12.25), et en posant $z_h = \chi_h$, il vient

$$\sum_{h=1}^{q} m\left(r_j, \frac{1}{f(z) - \chi_h}\right) < 117\varepsilon T_1(r_j) ,$$

et, par conséquent, en tenant compte de (12.7),

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{q} \delta(\chi_h) &\leqq \sum_{h=1}^{q} \varliminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-\chi_h}\right)}{T(r)} \leqq \sum_{h=1}^{q} \varliminf_{j\to\infty} \frac{m\left(r_j, \frac{1}{f-\chi_h}\right)}{T(r_j)} \\ &\leqq 2 \sum_{h=1}^{q} \varliminf_{j\to\infty} \frac{m\left(r_j, \frac{1}{f-\chi_h}\right)}{T_1(r_j)} \leqq 234\varepsilon . \end{aligned} \tag{12.31}$$

L'inégalité (12.17) résulte de (12.18) et (12.31); en revenant à (12.16), on obtient (12.14).

La démonstration de (12.15) repose sur le même principe, mais il faut examiner de plus près l'ensemble $E^*(r_j)$. L'ensemble des arguments des points de tous les arcs $\mathscr{A}^{(j)}$ sur lesquels $f(z)$ tend vers β_1 sera désigné par $E_1^*(r_j)$. Le complément de $E_1^*(r_j)$ par rapport à $E^*(r_j)$ sera désigné par $F_1^*(r_j)$.

Les raisonnements qui démontrent (12.30) donnent maintenant

$$\sum_{k=2}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{E_1^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r_j e^{i\theta}) - \beta_k} \right| d\theta = O(1) \quad (j \to \infty), \tag{12.32}$$

alors que le Lemme 7 entraîne

$$\sum_{k=2}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r_j e^{i\theta}) - \beta_k} \right| d\theta \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f'(r_j e^{i\theta})} \right| d\theta + O(\log r_j) \quad (j \to \infty). \tag{12.33}$$

L'intégrale au second membre de cette inégalité peut se calculer en revenant à (12.21) qui, pour $\theta \in E^*(r_j)$, donne

$$\overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f'(z)} \right| < - | c_j | r_j^p \cos(p\theta + \omega_j) + 4\varepsilon | c_j | r_j^p \quad (| z | = r_j)$$

puis

$$\frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f'(r_j e^{i\theta})} \right| d\theta \leqq | c_j | r_j^p \frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} (-1) \cos(p\theta + \omega_j) d\theta + 4\varepsilon | c_j | r_j^p. \tag{12.34}$$

Manifestement

$$\frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} (-1) \cos(p\theta + \omega_j) d\theta < \frac{p-1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \cos(\omega p)\, d\omega = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{\pi}, \tag{12.35}$$

et en combinant (12.22), (12.34) et (12.35)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{F_1^*(r_j)} \overset{+}{\log} \frac{1}{| f'(r_j e^{i\theta}) |} d\theta &\leqq \left(1 - \frac{1}{p} + 4\pi\varepsilon\right)(1 + 3\varepsilon) T_1(r_j) \\ &< \left(1 - \frac{1}{p}\right) T_1(r_j) + 17\pi\varepsilon T_1(r_j). \end{aligned} \tag{12.36}$$

De (12.32), (12.33) et (12.36), on tire

$$\sum_{k=2}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{E^*(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r_j e^{i\theta}) - \beta_k} \right| d\theta \leqq \left(1 - \frac{1}{p}\right) T_1(r_j) + 55\varepsilon T_1(r_j), \tag{12.37}$$

pourvu que j soit suffisamment grand.

D'autre part, en vertu du Lemme 8

$$\sum_{k=2}^{s} \frac{1}{2\pi} \int_{E(r_j)} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(r_j e^{i\theta}) - \beta_k} \right| d\theta < 116\varepsilon T_1(r_j). \tag{12.38}$$

En combinant (12.37) et (12.38), il vient

$$\sum_{k=2}^{s} m\left(r_j, \frac{1}{f(z)-\beta_k}\right) < \left(1-\frac{1}{p}\right) T_1(r_j) + 171\varepsilon T_1(r_j),$$

et, en tenant compte de (12.7)

$$\sum_{k=2}^{s} \delta(\beta_k) = \sum_{k=2}^{s} \varliminf_{r\to\infty} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-\beta_k}\right)}{T(r)} \leqq \left(1-\frac{1}{p}\right)(1+\gamma) + 171(1+\gamma)\varepsilon$$
$$< 1 - \frac{1}{p} + 343\varepsilon .$$

Cette inégalité, rapprochée de (12.14), donnera (12.15) pour $k = 1$. Nos raisonnements s'appliquent évidemment à l'une quelconque des valeurs β; l'inégalité (12.15) est donc démontrée en général. Les inégalités (12.14) et (12.15) entraînent manifestement (3.25) et (3.26); le Théorème 3 est ainsi complètement démontré.

13. Démonstration du Théorème 4

La fonction $f(z)$ étant entière, l'hypothèse (3.29) entraîne

$$\delta(\infty) = 1, \quad \sum_{r\neq\infty} \delta(r) > 1 - \gamma, \tag{13.1}$$

où γ est défini par (3.23). Les conditions (13.1) étant vérifiées, il en est de même des conditions (3.24) et, comme nous l'avons remarqué au § 12, les Théorèmes 1 et 2 et le Lemme 5 s'appliquent à la fonction $f'(z)$. Posons

$$f'(z) = g(z) = \sum_{\nu=0} g_\nu z^\nu .$$

Les densités supérieure et inférieure des coefficients de $g(z)$ sont respectivement égales aux densités supérieure et inférieure des coefficients de $g(z)$ et il suffit évidemment de démontrer que le développement de $g(z)$ jouit des propriétés indiquées dans l'énoncé du Théorème 4.

Notre démonstration suivra de près l'une des démonstrations de MM. PFLUGER et PÓLYA [6; pages 154–155].

Désignons par p l'entier le plus proche de λ et considérons la suite

$$g_k, g_{k+p}, g_{k+2p}, \ldots \quad (0 \leqq k < p). \tag{13.2}$$

Nous démontrerons que $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{30}\right)$ étant donné, l'inégalité

$$K(g) < \frac{\varepsilon}{C_0(p+1)\{1+\log(p+1)\}} \tag{13.3}$$

(qui est équivalente à (12.6)) entraîne la conséquence suivante: si l'un des termes de la suite (13.2) n'est pas nul, la densité inférieure de cette suite est au moins égale à

$$1 - 30\,\varepsilon\,.$$

Posons

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}\;;$$

on sait que

$$g_k + g_{k+p}z^p + g_{k+2p}z^{2p} + \dots$$
$$= \frac{g(z) + \omega^{-k}g(\omega z) + \omega^{-2k}g(\omega^2 z) + \dots + \omega^{-(p-1)k}g(\omega^{p-1}z)}{pz^k}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots (p-1))\,. \tag{13.4}$$

En vertu de l'inégalité (9.6) du Lemme 5,

$$|\,g(z)e^{-c_j z^p}\,| < e^{4\varepsilon|c_j|r^p} \quad (c_j \neq 0)\,, \tag{13.5}$$

pourvu que $z \in \Gamma_j$ et que j soit suffisamment grand.

Nous poserons

$$\zeta = c_j z^p,\ |\,\zeta\,| = R\,,$$

$$h(\zeta) = g_k + g_{k+p}\frac{\zeta}{c_j} + g_{k+2p}\frac{\zeta^2}{c_j^2} + \dots = \sum_{\nu=0}^{\infty} h_\nu \zeta^\nu\,,$$

et nous établirons quelques inégalités valables dans la couronne Γ_j^* définie par:

$$|\,c_j\,|\,\alpha^{jp} \leqq R < |\,c_j\,|\,\alpha^{(j+\frac{3}{2})p}\,. \tag{13.6}$$

Considérons le développement

$$h(\zeta)e^{-\zeta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{\nu!}\zeta^\nu\;; \tag{13.7}$$

en vertu de (13.4) et (13.5), on a

$$|\,h(\zeta)e^{-\zeta}\,| < e^{4\varepsilon|\zeta|} \quad (|\,z\,| \geqq 1\,,\ \zeta \in \Gamma_j^*,\ j \geqq j_0)\,,$$

et, par conséquent,

$$\frac{|\,l_\nu\,|}{\nu!}R^\nu < e^{4\varepsilon R}\,. \tag{13.8}$$

De (13.7), on tire aussi

$$h_n = \sum_{\mu+\nu=n} \frac{l_\nu}{\nu!\,\mu!} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)\,, \tag{13.9}$$

et en introduisant les polynômes

$$\varphi_m(z) = l_0 + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{l_\nu}{\nu!}z(z-1)(z-2)\dots(z-\nu+1) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

les relations (13.9) peuvent être mises sous la forme

$$h_n = \frac{\varphi_m(n)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots; \; m \geqq n) . \tag{13.10}$$

Prenons

$$m = \left[\frac{R}{2}\right]$$

où le symbole [ ] désigne la partie entière, et observons que pour

$$|z| \leqq \frac{R}{2},$$

les inégalités (13.8) entraînent

$$|\varphi_m(z)| \leqq (m+1)e^{4\varepsilon R} \leqq Re^{4\varepsilon R} \quad (R \geqq R_0) . \tag{13.11}$$

Désignons par $\Lambda(t)$ le nombre de termes de la suite

$$h_0, h_1, h_2, \ldots$$

qui sont nuls et dont l'indice n'excède pas t. Il est évident, en vertu de (13.10), que $\Lambda(t)$ ne peut excéder le nombre de zéros, situés dans le disque $|z| \leqq t$, de l'un quelconque des polynômes $\varphi_m(z)$ dont l'indice est supérieur à t.

Si l'un des termes de (13.2) n'est pas nul, on aura $\varphi_m(z) \not\equiv 0$, pourvu que m soit suffisamment grand. Ne considérons désormais que ce cas; supposons même

$$\varphi_m(0) = l_0 = 1 ,$$

restriction dont on se débarasse aisément. On peut alors, grâce à (13.11) et à la formule de JENSEN, obtenir une borne supérieure de $\Lambda(t)$:

$$\Lambda\left(\frac{R}{3}\right)\log\left(\frac{3}{2}\right) \leqq \int_{\frac{R}{3}}^{\frac{R}{2}} \frac{n\left(t, \frac{1}{\varphi_m(z)}\right)}{t}\, dt \leqq \log M\left(\frac{R}{2}, \varphi_m(z)\right) \leqq 4\varepsilon R + \log R . \tag{13.12}$$

Ce résultat, pour être valable, exige que ζ appartienne à la couronne (13.6); ceci sera certainement le cas si $|\zeta|$ est suffisamment grand. En effet, nous avons déjà supposé

$$C_0 \geqq A_0 , \quad \varepsilon < \frac{1}{30} ;$$

par conséquent, (13.3) entraîne

$$K(g) < \frac{1}{30A_0(p+1)} .$$

On peut donc appliquer le Théorème 1 à la fonction $g(z)$; en observant encore que

$$1 + \frac{1}{30} < e^{\frac{1}{4}} \leqq e^{\frac{p}{2(p+1)}} = \alpha^{\frac{p}{2}},$$

l'inégalité (3.10) du Théorème 1 donne

$$| c_{j+1} | = | c(\alpha^{j+1}) | < \left(1 + \frac{1}{30}\right) | c(\alpha^j) | < \alpha^{\frac{p}{2}} | c_j | ,$$

$$| c_{j+1} | \alpha^{(j+1)p} < | c_j | \alpha^{(j+\frac{3}{2})p} ,$$

ce qui montre bien que Γ_j^* et Γ_{j+1}^* empiètent dès que j est suffisamment grand. D'autre part, les couronnes Γ_j^* s'étendent à l'infini puisqu'en vertu de (3.11)

$$\frac{| c_j | \alpha^{jp}}{\pi} > \tfrac{1}{2} T(\alpha^j) \qquad (j > j_0) .$$

En passant à la limite $R \to \infty$, (13.12) entraîne

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\Lambda(t)}{t} < 30\, \varepsilon ,$$

et, par conséquent, la densité inférieure de la suite (13.2) est au moins égale à $1 - 30\,\varepsilon$.

Nos raisonnements s'appliquent à chacune des suites (13.2) obtenues en donnant à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots (p-1)$. Le Théorème 4 résulte immédiatement de ce fait et de quelques propriétés évidentes des densités.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

[1] A. Edrei et W. H. J. Fuchs, *On the growth of meromorphic functions with several deficient values.* (A paraître dans les Transactions Amer. Math. Soc.)

[2] A. A. Goldberg, *Sur les déficiences des fonctions méromorphes* (en russe). Doklady Ak. N. URSS N.S. *98* (1954), 893–895.

[3] W. K. Hayman, *An integral function with a defective value that is neither asymptotic nor invariant under a change of origin.* J. London Math. Soc. *28* (1953), 369–376.

[4] R. Nevanlinna, *Le théorème de* Picard-Borel *et la théorie des fonctions méromorphes.* (Paris 1929.)

[5] A. Pfluger, *Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung.* Comment. Math. Helv. *19* (1946–1947), 91–104.

[6] A. Pfluger et G. Pólya, *On the power series of an integral function having an exceptional value.* Proc. Cambridge Phil. Soc. *31* (1935), 153–155.

[7] Mme L. Schwartz, *Exemple d'une fonction méromorphe ayant des valeurs déficientes non asymptotiques.* C. R. Acad. Sci. Paris *212* (1941), 382–384.

[8] O. Teichmüller, *Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung.* Deutsche Math. *4* (1939), 163–190.

[9] E. Ullrich, *Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung.* J. reine angew. Math. *167* (1932), 198–220.

(Reçu le 11 octobre 1958)