Existenzsätze bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und zugehörige metrische Geometrie.

Autor(en): **Hornich, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **31 (1956-1957)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515699

Existenzsätze bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und zugehörige metrische Geometrie

von Hans Hornich, Graz

Die Sätze über Ein- und Mehrdeutigkeit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$y' = \varphi(x, y) \tag{1}$$

finden ihr Analogon in Sätzen über Lösbarkeit und Unlösbarkeit der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y) \ , \tag{2}$$

wobei die Sätze über die Unlösbarkeit auch im kleinen, also in jedem Teilgebiet, ausgesprochen werden können[1]).

Die Bedingungen, unter denen diese Fälle eintreten, lassen sich nun, wie hier gezeigt werden soll, geometrisch in eigenartiger Weise interpretieren: Führt man an Stelle der euklidischen Entfernung ϱ zweier Punkte eine Funktion $\delta(\varrho)$ als Distanzfunktion ein, wobei $\delta(\varrho)$ mit Hilfe der Funktion $\varphi(x, y)$ definiert ist, so werden die Geometrien, denen überall unlösbare Differentialgleichungen (2) entsprechen können, dadurch geometrisch charakterisiert, daß das „Streckungsverhältnis" $\dfrac{\delta(\varrho)}{\varrho}$ mit $\varrho \to 0$ in bestimmter Weise sehr stark gegen ∞ strebt; so wird zum Beispiel die Länge jeder Kurve in dieser Geometrie unendlich.

Sei G ein beliebiges konvexes Gebiet der Ebene und $\varphi(x, y)$ eine nichtkonstante, gleichmäßig stetige Funktion auf G. Sei mit $\varrho \geqslant 0$ und für alle Punktepaare $P_1 P_2$ aus G mit einem euklidischen Abstand $P_1 P_2 \leqslant \varrho$

$$\sup|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| = \delta(\varrho) \ . \tag{3}$$

---

[1]) Die Lösbarkeit von (1) bei stetigem φ bewies zuerst Peano, Math. Ann. **37** (1890) 182–228. die Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung gab Osgood, Monatsh. Math. Phys. **9** (1898) 331–345; vgl. auch Perron, Math. Ann. **76** (1915) 471–484 und viele andere; ein Beispiel für mehrfache Lösungen von (1) in jedem Punkt eines Gebietes gab Lawrentieff, Math. Z. **23** (1925) 197–209. Vgl. auch A. Wintner, Amer. Journ. Math. **72** (1950) 733–734. Zur Unlösbarkeit von (2) als Folge von mehrfachen Lösungen von (1), und zwar sogar in jedem Teilgebiet, vgl. H. Hornich, Monatsh. Math. **59** (1955) 34–42, allgemeiner Jahresber. Deutsch. Math. Verein **58** (1956) 103–109.

Es ist dann

$$\delta(0) = 0\,, \quad \delta(\varrho) > 0 \quad \text{für} \quad \varrho > 0\,, \quad \delta(\varrho) \to 0 \quad \text{für} \quad \varrho \to 0\,, \tag{4}$$

$$\delta(\varrho) \text{ monoton nichtabnehmend} \tag{5}$$

und für je zwei Zahlen $\varrho_1, \varrho_2 \geqslant 0$ gilt

$$\delta(\varrho_1 + \varrho_2) \leqslant \delta(\varrho_1) + \delta(\varrho_2)\,. \tag{6}$$

Daraus folgt auch

$$|\,\delta(\varrho + h) - \delta(\varrho)\,| \leqslant \delta(|h|)\,,$$

also die Stetigkeit von $\delta(\varrho)$.

Wir führen auf der xy-Ebene eine neue Metrik ein, indem wir je zwei Punkten mit dem euklidischen Abstand ϱ die Zahl $\delta(\varrho)$ als Distanz zuordnen. Dadurch wird die Ebene ein metrischer Raum E; insbesonders gilt die Dreiecksungleichung, da für je drei Punkte $P_1\,P_2\,P_3$ mit den euklidischen Abständen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ wegen $\varrho_3 \leqslant \varrho_1 + \varrho_2$ auch gilt:

$$\delta(\varrho_3) \leqslant \delta(\varrho_1 + \varrho_2) \leqslant \delta(\varrho_1) + \delta(\varrho_2)\,. \tag{7}$$

Wir betrachten das „Streckungsverhältnis" $\dfrac{\delta(\varrho)}{\varrho}$ für $\varrho \to 0$. Wegen (6) gilt:

$$2^n\,\delta(2^{-n}) \leqslant 2^{n+1}\,\delta(2^{-n-1})\,,$$

so daß die Folge der Zahlen $\eta_n = 2^n\,\delta(2^{-n})$ eine nichtabnehmende ist. Für das halboffene Intervall $I_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$ ist nach (5)

$$\delta(2^{-n}) \leqslant \delta(\varrho) \leqslant \delta(2^{-n+1})\,.$$

Es ist daher die Summe $\sum\limits_n \dfrac{1}{\eta_n}$ entweder konvergent oder gegen $+\infty$ divergent, je nachdem das Integral $\int\limits_0^1 \dfrac{d\varrho}{\delta(\varrho)}$ existiert oder nicht.

Sei nun $\delta(\varrho)$ ganz allgemein eine den Bedingungen (4) (5) (6) genügende stetige Funktion, und denken wir uns in der obigen Weise eine metrische Geometrie auf der Ebene eingeführt. Dann haben wir zwei verschiedene Arten der Geometrie zu unterscheiden:

I. Es ist $\sum\limits_n \dfrac{1}{\eta_n}$ konvergent, also $\int\limits_0^1 \dfrac{d\varrho}{\delta(\varrho)} < +\infty$. Dann ist $\eta_n \to +\infty$, geometrisch: Denkt man sich eine Strecke der euklidischen Länge 1 fortgesetzt halbiert, so haben wir beim n-ten Schritt $2^n + 1$ Teilungspunkte, und je zwei aufeinanderfolgende Teilungspunkte haben die Distanz $\delta(2^{-n})$ und die

Summe aller dieser Distanzen, also η_n strebt $\to +\infty$, und zwar so stark, daß auch $\sum\limits_n \frac{1}{\eta_n}$ konvergiert. Denkt man sich für eine Kurve mit einer im Euklidischen gemessenen Länge >0 nunmehr in der üblichen Weise auch die Länge in dieser Geometrie gemessen, so ist diese Länge stets $+\infty$.

Ist nun G ein beliebiges Gebiet der Ebene, so gibt es[2]) Funktionen $\varphi(x,y)$ auf G, so daß für je zwei Punkte $P_1 P_2$ auf G

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| < \delta(P_1 P_2) \tag{8}$$

gilt, so daß die partielle Differentialgleichung (2) keine Lösung hat in jedem Teilgebiet von G, in dem die Funktion $f(x,y)$ stetig ist und eine nichtverschwindende stetige Ableitung nach y hat.

Die gewöhnliche Differentialgleichung (1) hat in G überall dicht Doppelwege als Lösungen, das heißt in jedem Teilgebiet G' von G gibt es Punktepaare, zwischen denen zwei Lösungskurven in G' verlaufen.

II. Es ist $\sum\limits_n \frac{1}{\eta_n} = +\infty$ also auch $\int\limits_0^1 \frac{d\varrho}{\delta(\varrho)} = +\infty$. In dem speziellen Fall, wo $\frac{\delta(\varrho)}{\varrho} \to a$ für $\varrho \to 0$, multipliziert sich die Länge einer Kurve gegenüber dem euklidischen Fall mit dem konstanten Faktor a. Ferner ist für diesen Fall die Abbildung der euklidischen Ebene auf E eine konforme, da die Winkel zweier Kurven erhalten bleiben.

Ist G wieder ein beliebiges Gebiet der Ebene, so hat für jede Funktion $\varphi(x,y)$ auf G, für welche mit je zwei Punkten $P_1 P_2$ auf G (8) gilt, die partielle Differentialgleichung (2) mit einer stetigen Funktion f zumindest in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Punktes P von G eine Lösung, die wenigstens in der durch (2) gegebenen Richtung eine Ableitung hat.. Die gewöhnliche Differentialgleichung (1) schickt durch jeden Punkt von G nur eine Lösungskurve[3]).

(Eingegangen den 15. November 1955)

---

[2]) Vgl. HORNICH, l. c.

[3]) Vgl. OSGOOD, l. c.