

# Bemerkung zu einer notwendigen Bedingung von Picone in der Variationsrechnung.

Autor(en): **Gautschi, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **31 (1956-1957)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515695>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Bemerkung zu einer notwendigen Bedingung von PICONE in der Variationsrechnung<sup>1)</sup>

VON WALTER GAUTSCHI, Rom

I. Es sei vorgegeben:

1. Eine reelle Funktion  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ , die in einem abgeschlossenen Bereich  $E$  des  $(x, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ -Raumes ( $n \geq 0$ ) definiert und stetig ist;
2. eine Menge  $\Gamma$  von reellen Funktionen  $y(x)$  [oder, wie wir auch sagen, von «Kurven»  $y_0 = y(x)$ ], die folgende Eigenschaften haben:
  - a) Jede Funktion  $y(x)$  der Menge  $\Gamma$  ist in einem gewissen endlichen, abgeschlossenen Intervall, dessen Endpunkte mit  $a[y(x)]$  und  $b[y(x)]$  bezeichnet seien, definiert und besitzt in diesem Intervall stetige Ableitungen  $y^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) bis zur  $n$ -ten Ordnung und stückweise stetige  $(n + 1)$ -ste Ableitung
  - b) falls  $x$  im Intervall  $\langle a[y(x)], b[y(x)] \rangle$  variiert, bleibt der Punkt  $[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)]$  im Bereich  $E$ .

Für jede Funktion  $y(x)$  der Menge  $\Gamma$  ist dann das Integral

$$I[y(x)] = \int_{a[y(x)]}^{b[y(x)]} f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)] dx \quad (1)$$

wohl definiert und gibt Anlaß zum klassischen Variationsproblem, unter allen Funktionen der Menge  $\Gamma$  diejenigen – falls sie existieren – zu finden, die  $I[y(x)]$  den kleinsten Wert erteilen.

Es sind wohl bekannt die notwendigen Bedingungen (von EULER, LEGENDRE, WEIERSTRASS usw.), die in jedem Punkt einer Minimalkurve erfüllt sein müssen, falls dieser Punkt in einem bestimmten Sinne «im Innern» der Funktionenmenge  $\Gamma$  gelegen ist. Kürzlich hat PICONE<sup>2)</sup> eine neue Bedingung formuliert, die in der Regel auch in «Randpunkten» von  $\Gamma$  gelten muß. Die Bedingung von PICONE hat bemerkenswerte Konsequenzen, unter anderem auch neue Fassungen der LEGENDRESCHEN und WEIERSTRASSSCHEN Bedingungen.

In der folgenden Nr. II soll PICONES Bedingung in den wesentlichen Zügen entwickelt werden. In Nr. III geben wir eine Variante des ursprünglichen

---

<sup>1)</sup> Arbeit, die im «Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo» in Rom ausgeführt wurde.

<sup>2)</sup> M. PICONE, Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni, Mem. Acc. Naz. Lincei, ser. (8), vol. 4 (1954), p. 137–176.

Beweises von PICONE, die nur Stetigkeit von  $f$  voraussetzt, und beantworten damit eine von PICONE<sup>3)</sup> aufgeworfene Frage.

II. Sei  $y_0 = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) die Gleichung einer Kurve der Menge  $\Gamma$  und  $P_0[x_0, y(x_0)]$ ,  $x_0 < b$ , ein fester Punkt auf dieser Kurve. Seien ferner

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu, p$$

fest vorgegebene reelle Zahlen und die letzten  $\nu + 1$  hiervon positiv. Wir setzen

für ein  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < (b - x_0) / (p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s)$

$$x_s = x_0 + (p_1 + p_2 + \dots + p_s) \varepsilon \quad (s = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$x_{\nu+1} = x_\nu + p\varepsilon.$$

Sei  $y(x, \varepsilon)$  die Funktion

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} y(x) & (a \leq x \leq x_0) \\ \eta_s(x, \varepsilon) & (x_{s-1} \leq x \leq x_s; s = 1, 2, \dots, \nu) \\ \zeta(x, \varepsilon) & (x_\nu \leq x \leq x_{\nu+1}) \\ y(x) & (x_{\nu+1} \leq x \leq b), \end{cases} \quad (2)$$

wo  $\eta_s(x, \varepsilon)$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  durch die folgenden drei Bedingungen eindeutig festgelegt sind:

- (a)  $\eta_s(x, \varepsilon)$  ist ein Polynom in  $x$  höchstens vom Grade  $n + 1$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  ein Polynom höchstens vom Grade  $2n + 1$
- (b) es gilt  $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \eta_s(x, \varepsilon) = \lambda_s$  ( $s = 1, 2, \dots, \nu$ ),
- (c) es ist  $y(x, \varepsilon)$  im ganzen Intervall  $\langle a, b \rangle$   $n$ -mal stetig differenzierbar.

Der Punkt  $P_0$  heißt dann nach PICONE ein  $\nu$ -facher Konzentrationspunkt nach rechts für die Kurven der Menge  $\Gamma$ , mit den Werten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$  der ersten und  $p_1, p_2, \dots, p_\nu, p$  der zweiten Parameter, falls für jedes absolut hinreichend kleine  $\varepsilon$  die Kurve  $y_0 = y(x, \varepsilon)$  der Menge  $\Gamma$  angehört.

Ganz analog – mit  $\varepsilon < 0$  – wird ein Konzentrationspunkt nach links definiert. (In der Definitionsformel (2) für  $y(x, \varepsilon)$  ist dann  $a$  mit  $b$  zu vertauschen und in allen Ungleichungen  $\leq$  durch  $\geq$  zu ersetzen.)

<sup>3)</sup> loc. cit., pag. 28

Die Funktionen  $\eta_s(x, \varepsilon)$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  genügen folgenden Grenzrelationen<sup>4)</sup>

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_s^{(k)}(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon) = y^{(k)}(x_0) \quad (s = 1, 2, \dots, \nu; \quad k = 0, 1, \dots, n) \quad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta^{(k)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon) = y^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta^{(n+1)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon) = y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t), \quad (5)$$

worin  $t$  eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet und  $\Omega(t)$  in (5) ein wohl bestimmtes Polynom vom Grade  $\leq n$ . Ferner ist

$$y^{(n+1)}(x_0^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} y^{(n+1)}(x)$$

gesetzt, und es gilt in (5) das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem, ob  $\varepsilon$  über positive oder negative Werte nach Null geht.

Es gilt nun folgende

**Bedingung von PICONE.** Falls die Kurve  $C$  mit der Gleichung  $y_0 = y(x)$  eine Minimalkurve für das Integral (1) bezüglich der Menge  $\Gamma$  ist, so gilt in jedem Punkt  $P_0[x_0, y(x_0)]$  von  $C$ , der  $\nu$ -facher Konzentrationspunkt ist, die Relation

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm), \lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p] \geq 0, \quad (6)$$

wo  $F$  gegeben ist durch

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm), \lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p] \equiv \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) - (p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s) f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] + p \int_0^1 f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] dt. \quad (7)$$

Hierin bedeuten  $Q_0$  der Punkt  $[x_0, y(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)]$ , und  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p$  beziehungsweise die ersten und zweiten Parameter, mittels deren sich der Punkt  $P_0$  als Konzentrationspunkt erweist, und es gilt in (6) das Zeichen  $+$  oder  $-$ , je nachdem, ob  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach rechts oder nach links ist.

Für verschiedene interessante Spezialfälle dieser Bedingung sei auf die Originalarbeit von PICONE verwiesen.

III. *Beweis.* Sei  $C$  eine Minimalkurve und  $P_0$  ein Konzentrationspunkt auf  $C$ . Wir bilden gemäß (2) die Kurve  $C_\varepsilon$  mit der Gleichung  $y_0 = y(x, \varepsilon)$ . Das entsprechende, nach (1) gebildete Integral  $I(C_\varepsilon)$  ist sicher definiert für alle hinreichend kleinen positiven  $\varepsilon$ , falls  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach rechts ist, und für alle absolut hinreichend kleinen negativen  $\varepsilon$ , falls  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach links ist.

---

<sup>4)</sup> M. PICONE, loc. cit., pag. 22, pag. 24 Formel (21), pag. 25 Formel (25).

Da ferner  $C$  eine Minimalkurve ist, gilt für jedes absolut hinreichend kleine  $\varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} [I(C_\varepsilon) - I(C)] \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } \varepsilon > 0, \\ \leq 0 & \text{falls } \varepsilon < 0, \end{cases}$$

das heißt, sowohl für  $\varepsilon > 0$  als auch  $\varepsilon < 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &\equiv \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^{\nu} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f[x, \eta_s(x, \varepsilon), \dots, \eta_s^{(n)}(x, \varepsilon), \lambda_s] dx \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f[x, \zeta(x, \varepsilon), \dots, \zeta^{(n)}(x, \varepsilon), \zeta^{(n+1)}(x, \varepsilon)] dx \\ &- \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_{\nu+1}} f[x, y(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)] dx \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

In jedem der  $\nu + 2$  Teilintegrale von (8) führen wir eine neue Integrationsvariable  $t$  ein, indem wir in den ersten  $\nu$  Integralen der Reihe nach die Substitutionen

$$x = x_{s-1} + \varepsilon p_s t \quad (s = 1, 2, \dots, \nu),$$

im vorletzten Integral die Substitution

$$x = x_\nu + \varepsilon p t$$

und im letzten Integral die Substitution

$$x = x_0 + \varepsilon \sigma t, \quad \sigma = p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s$$

ausüben. Man erhält

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} p_s f[x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \eta_s(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon), \dots, \eta_s^{(n)}(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon), \lambda_s] \right. \\ &+ p f[x_\nu + \varepsilon p t, \zeta(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon), \dots, \zeta^{(n)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon), \zeta^{(n+1)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon)] \\ &\left. - \sigma f[x_0 + \varepsilon \sigma t, y(x_0 + \varepsilon \sigma t), \dots, y^{(n)}(x_0 + \varepsilon \sigma t), y^{(n+1)}(x_0 + \varepsilon \sigma t)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Durch den Grenzübergang  $\varepsilon \downarrow 0$  (beziehungsweise  $\varepsilon \uparrow 0$ ) unter dem Integralzeichen in (9) folgt dann bei Berücksichtigung der Relationen (3) – (5)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) &= \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) + p f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] - \sigma f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] \right\} dt \\ &= \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) - \sigma f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] + p \int_0^1 f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] dt \end{aligned}$$

und somit, wegen (8), die Bedingung (6).

(Eingegangen den 5. August 1955)