

Teilmengen von Mengen mit Relationen.

Autor(en): **Specker, Ernst**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **31 (1956-1957)**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515706>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Teilmengen von Mengen mit Relationen

VON ERNST SPECKER, Zürich

Sind die k -zählige Teilmengen einer unendlichen Menge S auf endlich viele Klassen C_1, \dots, C_n verteilt, so gibt es eine unendliche Teilmenge S' von S und eine solche Zahl j ($1 \leq j \leq n$), daß jede k -zählige Teilmenge von S' zu der Klasse C_j gehört.

Dieser Satz von RAMSEY [4] ist der Hauptsatz derjenigen Art kombinatorischer Mengenlehre, mit der sich die vorliegende Arbeit beschäftigt. Eine systematische Darstellung findet sich in der Arbeit [2] von P. ERDÖS und R. RADO.

Der allgemeine Fall des Satzes von RAMSEY ergibt sich sehr leicht durch Induktion aus seinem Spezialfall $n:2$ (Zerlegung der Menge der k -zählige Teilmengen in zwei Klassen C_1 und C_2); entsprechende Verallgemeinerungen sind auch bei den folgenden Sätzen möglich.

Im ersten Teil der Arbeit wird (in Beantwortung einer Frage von Herrn ERDÖS) der folgende Satz 1 bewiesen: *Sind die zweizählige Teilmengen einer Menge S , die nach dem Typus ω^2 geordnet ist, auf zwei Klassen C_1, C_2 verteilt, so gibt es entweder eine solche n -zählige Teilmenge S' von S , daß jede zweizählige Teilmenge von S' zu C_1 gehört, oder es gibt eine solche Teilmenge S'' von S vom Typus ω^2 , daß jede zweizählige Teilmenge von S'' zu C_2 gehört.* (Die Ordnung einer Teilmenge S'' einer geordneten Menge S ist dabei hier und im folgenden stets die durch die Ordnung von S induzierte.)

Im zweiten Teil zeigen wir, daß die naheliegenden Verallgemeinerungen dieses Satzes nicht richtig sind; so kann « zweizählige » nicht durch « dreizählige », der Typus ω^2 nicht durch den Typus ω^3 ersetzt werden.

Der Versuch, für weitere Zahlen der zweiten Zahlklasse entsprechende Gegenbeispiele zu konstruieren, führt zu folgender Frage: α, β seien Ordnungszahlen der zweiten Zahlklasse, S sei eine geordnete Menge vom Typus α , T eine geordnete Menge vom Typus β ; gibt es dann eine solche Abbildung f von S auf T , daß das Bild jeder Teilmenge von S vom Typus α in T den Typus β besitzt? Wir können diese Frage nur für ganz spezielle Paare α, β beantworten.

Bevor wir den Beweis des Satzes 1 in einzelne Hilfssätze zerlegen, formulieren wir ihn noch etwas anders. Um die Äquivalenz der beiden Fassungen zu erkennen, wählen wir als Menge S vom Typus ω^2 die Menge der Paare $\langle h, i \rangle$ von natürlichen Zahlen, ordnen diese Paare antilexikographisch und definieren S_i als Menge der Paare mit zweitem Glied i ; ferner definieren wir auf Grund der Klasseneinteilung C_1, C_2 der zweizählige Teilmengen von S eine zwei-

stellige symmetrische Relation R gemäß der folgenden Vorschrift: Für $a \neq b$ gelte $R(a, b)$ genau dann, wenn die Menge (a, b) zu C_1 gehört. (Über $R(a, a)$ brauchen wir keine Festsetzung zu treffen.)

Satz 1. *Es seien S_i ($i: 1, 2, \dots$) abzählbare disjunkte Mengen, S die Vereinigung der Mengen S_i ; R sei eine zweistellige symmetrische Relation auf S . Dann gibt es entweder eine solche n -zählige Teilmenge S' von S , daß zwei verschiedene Elemente von S' stets in der Relation R stehen, oder es gibt eine solche Teilmenge S'' von S , daß der Durchschnitt $S'' \cap S_i$ für unendlich viele Indices i unendlich ist und daß keine zwei verschiedenen Elemente von S'' in der Relation R stehen.*

Wir beweisen den Satz mit Induktion nach « n »; für $n: 2$ ist er trivial. Ferner nehmen wir an, daß es keine n -zählige Teilmenge S' von S gibt, so daß je zwei verschiedene Elemente von S' in der Relation R stehen, und beweisen unter dieser Voraussetzung die Existenz einer Menge S'' mit den verlangten Eigenschaften.

Hilfssatz 1. *P sei eine zweistellige Relation auf der Menge N der natürlichen Zahlen. Dann gibt es eine solche unendliche Teilmenge N' von N , daß P auf N' einer der folgenden Relationen äquivalent ist: (1.1) $a \leq b$; (1.2) $a < b$; (2.1) $b \leq a$; (2.2) $b < a$; (3.1) $a = b$; (3.2) $a \neq a$ (Relation nie erfüllt); (4.1) $a = a$ (Relation stets erfüllt); (4.2) $a \neq b$.*

Bemerkung. Die Numerierung ist so gewählt, daß für $a \neq b$ die Relationen $(h, 1)$ und $(h, 2)$ äquivalent sind. (Zu diesem Hilfssatz vergleiche man R. FRAISSÉ [3].)

Beweis. Wir teilen die zweizahligen Teilmengen von N in vier Klassen C_i ($i: 1, 2, 3, 4$) ein, je nachdem (1) $a < b$, $P(a, b)$ und nicht $P(b, a)$ oder $b < a$, $P(b, a)$ und nicht $P(a, b)$; (2) $a < b$, $P(b, a)$ und nicht $P(a, b)$ oder $b < a$, $P(a, b)$ und nicht $P(b, a)$; (3) weder $P(a, b)$ noch $P(b, a)$; (4) sowohl $P(a, b)$ als auch $P(b, a)$. Eine zweizahlige Teilmenge von N gehört zu einer dieser Klassen; nach dem Satz von RAMSEY gibt es somit eine unendliche Teilmenge N'' von N und eine solche Zahl h ($1 \leq h \leq 4$), daß alle zweizahligen Teilmengen von N'' zu C_h gehören. Ferner gibt es eine solche unendliche Teilmenge N' von N'' , daß entweder für alle Elemente a von N' die Relation $P(a, a)$ gilt oder daß für alle Elemente a von N' die Relation $P(a, a)$ nicht gilt; je nach diesen beiden Fällen ist P auf N' äquivalent der Relation $(h, 1)$ oder $(h, 2)$.

Hilfssatz 2. *Es sei P eine zweistellige Relation auf der Menge N der natürlichen Zahlen; dann gibt es entweder n verschiedene Elemente a_1, \dots, a_n von N ,*

derart daß $P(a_i, a_k)$ gilt für $1 \leq i < k \leq n$, oder es gibt eine solche unendliche Teilmenge N' von N , daß $P(a, b)$ nicht gilt für zwei verschiedene Elemente a, b von N' .

Beweis. N' sei so gewählt, daß P auf N' einer der Relation von Hilfssatz 1 äquivalent ist und daß N' unendlich. Ist P auf N' äquivalent (3.1) oder (3.2), so liegt eine unendliche Menge der gewünschten Art vor; andernfalls wählen wir in N' eine Menge A von n Elementen und zählen A entweder auf- oder absteigend ab, je nachdem die Fälle (1, i) oder (2, i) vorliegen (bei den Fällen (4, i) ist die Abzählung beliebig).

Die folgenden Hilfssätze handeln von Mengen, auf denen ein 0-1-Maß μ definiert ist. Unter einem solchen Maß auf einer Menge T verstehen wir eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der Teilmengen von T ist und die die folgenden Eigenschaften besitzt: (1) μ nimmt nur die Werte 0 und 1 an, (2) $\mu(T) = 1$, (3) $\mu(A) = 0$ für jede endliche Menge A , (4) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für disjunkte Mengen A und B . Auf jeder unendlichen Menge existiert ein solches Maß (vergleiche zum Beispiel [1], S. 185). Beim Beweis wird allerdings – auch für abzählbare Mengen – das Auswahlaxiom benutzt; für unsere Zwecke könnte es vermieden werden, indem man sich überlegte, daß ein Maß ausreicht, das nur für gewisse Teilmengen definiert ist.

Ist μ ein 0-1-Maß auf T , T' eine Teilmenge von T vom Maße 1, so ist die Funktion, die einer Teilmenge A von T' den Wert $\mu(A)$ zuordnet, ein 0-1-Maß auf T' ; wir werden dieses Maß auch etwa mit « μ » bezeichnen.

Hilfssatz 3. M sei eine abgezählte Menge, μ ein 0-1-Maß auf M ; M_i ($i: 1, 2, \dots$) seien Teilmengen von M vom Maße 0; jedes Element von M sei nur für endlich viele i in M_i enthalten. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge M' von M und eine Indexfolge i_k ($k: 1, 2, \dots; i_k < i_{k+1}$), so daß der Durchschnitt von M' und M_{i_k} leer ist für alle k : $M' \cap M_{i_k} = \emptyset$.

Beweis. Wir definieren rekursiv Teilmengen M'_n von M und Zahlen i_n ($n: 1, 2, \dots$), so daß folgendes gilt: $M'_{n-1} \subseteq M'_n$; M'_n hat $n - 1$ Elemente; $M'_n \cap M_{i_k} = \emptyset$ für $1 \leq k \leq n$; $i_{n-1} < i_n$.

a) $M'_1 = \emptyset$; $i_1 = 1$. b) Seien M'_n und i_k ($1 \leq k \leq n$) definiert, so daß die obigen Bedingungen erfüllt sind. Die Mengen M'_n und M_{i_k} ($k \leq n$) haben das Maß 0; dasselbe gilt somit von ihrer Vereinigung, die daher von M verschieden ist. Sei a_n das erste Element (in der gegebenen Abzählung) von M , das weder zu M'_n noch zu einer der Mengen M_{i_k} ($k \leq n$) gehört. Sei $M'_{n+1} = M'_n \cup (a_n)$; M'_{n+1} hat n Elemente und der Durchschnitt von M'_{n+1} mit M_{i_k} ($k \leq n$) ist leer. Da die Menge M'_{n+1} endlich ist, so ist der Durchschnitt von M'_{n+1} mit M_i leer für fast alle i (denn nach Voraussetzung ist ein Element von M nur in endlich

vielen Mengen M_i enthalten): es sei i_{n+1} die kleinste Zahl j , welche größer ist als i_n und für welche $M'_{n+1} \cap M_j = \emptyset$. Es ist somit $M'_{n+1} \cap M_{i_k} = \emptyset$ für $k \leq n+1$. Sei nun M' die Vereinigung der Mengen M'_n ; M' ist unendlich, denn M'_n enthält $n-1$ Elemente. Ferner ist $M' \cap M_{i_k} = \emptyset$ für alle k . Da M' die Vereinigung der M'_n ist, genügt es, zu zeigen, daß $M'_n \cap M_{i_k} = \emptyset$ für alle n . Es ist dies nach Konstruktion der Fall für $k \leq n$; ist $n < k$, so ist M'_n in M'_k enthalten und da $M'_k \cap M_{i_k} = \emptyset$ somit auch $M'_n \cap M_{i_k} = \emptyset$.

Hilfssatz 4. T_1, T_2, \dots, T_n seien abzählbare disjunkte Mengen, μ_i ein 0-1-Maß auf T_i ($1 \leq i \leq n$); T sei die Vereinigung der Mengen T_i ($i: 1, \dots, n$) und R sei eine zweistellige Relation auf T . Für $a \in T$ sei $V(a)$ die Menge derjenigen $x \in T$, für welche $R(a, x)$ gilt. A_i^k sei die Menge derjenigen $a \in T_i$, für welche $\mu_k(V(a) \cap T_k) = 1$. Ist $\mu_i(A_i^k) = 1$ für $i < k$, so gibt es Elemente $t_j \in T_j$ ($j: 1, \dots, n$), derart daß $R(t_i, t_k)$ gilt für $i < k$.

Beweis. Induktion nach der Anzahl n ; für $n: 1$ ist der Satz trivial. Da nach Voraussetzung die Mengen A_1^k ($2 \leq k$) das Maß 1 haben, so ist ihr Durchschnitt nicht leer und es gibt somit ein Element $t_1 \in T_1$ mit $t_1 \in A_1^k$ ($2 \leq k$). Es sei $T_k^* = T_k \cap V(t_1)$. Es gilt $R(t_1, b)$ für $b \in T_k^*$. Da T_k^* das Maß 1 hat, so ist μ_k auch ein 0-1-Maß für T_k^* . Es sei A_i^{*k} die Menge der $a \in T_i^*$, für welche $V(a) \cap T_k^*$ das Maß 1 hat. Da mit $V(a) \cap T_k$ auch $V(a) \cap T_k^*$ das Maß 1 hat, so ist $A_i^{*k} = T_i^* \cap A_i^k$ und daher $\mu_i(A_i^{*k}) = 1$ für $2 \leq i < k$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es Elemente $t_j \in T_j^* \subseteq T_j$ ($j: 2, \dots, n$), derart, daß $R(t_i, t_k)$ für $2 \leq i < k$. Da $R(t_1, t_k)$ für $1 < k$, so ist allgemein $R(t_i, t_k)$ für $1 \leq i < k \leq n$.

Hilfssatz 5. Es seien S_i ($i: 1, 2, \dots$) abzählbare disjunkte Mengen, S die Vereinigung der Mengen S_i , R eine zweistellige symmetrische Relation auf R und $V(a)$, $a \in S$, die Menge der $x \in S$ mit $R(a, x)$. μ_i sei ein 0-1-Maß auf S_i und B_i^k sei die Menge der $a \in S_i$, für welche $\mu_k(V(a) \cap S_k) = 1$ ($i, k: 1, 2, \dots$). Dann gibt es entweder eine n -zählige Teilmenge S' von S , derart daß je zwei verschiedene Elemente von S' in der Relation R stehen, oder es gibt eine unendliche Menge N' von natürlichen Zahlen, derart daß $\mu_i(B_i^k) = 0$ für $i, k \in N'$, $i \neq k$.

Beweis. Wir definieren eine zweistellige Relation P auf der Menge N der natürlichen Zahlen: $P(i, k)$ gilt genau dann, wenn $\mu_i(B_i^k) = 1$. Nach Hilfssatz 2 gibt es entweder n verschiedene Zahlen a_i ($i: 1, \dots, n$), derart, daß $P(a_i, a_k)$ gilt für $1 \leq i < k \leq n$, oder es gibt eine unendliche Teilmenge N' von N , derart, daß $P(i, k)$ nicht gilt für $i, k \in N'$, $i \neq k$. In diesem Fall ist somit $\mu_i(B_i^k) \neq 1$, das heißt $\mu_i(B_i^k) = 0$ für $i, k \in N'$, $i \neq k$. Sind andererseits a_i ($i: 1, \dots, n$) Zahlen mit $P(a_i, a_k)$ für $i < k$, so setzen wir $S_{a_i} = T_i$. $A_i^k = B_{a_i}^k$ ist die Menge der $a \in T_i$, für welche $V(a) \cap T_k$ das Maß 1 hat.

Es ist $\mu_{a_i}(A_i^k) = 1$ für $i < k$ und nach Hilfssatz 3 gibt es somit n verschiedene Elemente t_i ($i: 1, \dots, n$), für welche $R(t_i, t_k)$ gilt für $i < k$; da die Relation R nach Voraussetzung symmetrisch ist, so gilt allgemein $R(t_i, t_k)$ für $i \neq k$.

Hilfssatz 6. *Es seien T_i ($i: 1, 2, \dots$) abzählbare disjunkte Mengen, T die Vereinigung der T_i , R eine zweistellige symmetrische Relation auf T und $V(a)$, $a \in T$, die Menge der $x \in T$ mit $R(a, x)$. Es gebe keine n -zählige Teilmenge T' von T , derart, daß je zwei verschiedene Elemente von T' in der Relation R stehen. μ_i sei ein 0-1-Maß auf T_i und A_i^k sei die Menge der $a \in T_i$, für welche $\mu_k(V(a) \cap T_k) = 1$. Ist $\mu_1(A_1^k) = 0$ für alle k mit $2 \leq k$, so erfüllt die Menge der T_i die These des Satzes 1 (das heißt es gibt eine Teilmenge T'' von T , derart, daß der Durchschnitt $T_i \cap T''$ für unendlich viele Indizes i unendlich ist und daß keine zwei Elemente von T'' in der Relation R stehen) oder es gibt eine unendliche Menge N' von natürlichen Zahlen mit $1 \in N'$, für jedes $i \in N'$ eine unendliche Teilmenge T_i^* von T_i und ein Maß μ_i^* auf T_i^* , derart, daß die Mengen A_1^{*k} und A_k^{*1} ($k \in N'$, $k \neq 1$) leer sind. (Dabei ist A_i^{*k} die Menge der $a \in T_i^*$, für welche $\mu_k^*(V(a) \cap T_k^*) = 1$.)*

Beweis. Sei $a \in T_1$. Ist $a \in A_1^k$ für $k \in N'$, N' unendlich, so ist $T'_k = V(a) \cap T_k$ unendlich für $k \in N'$. Da alle Elemente aus T'_k , $k \in N'$, mit a in der Relation R stehen, so gibt es keine $n - 1$ Elemente in der Vereinigung der T'_k ($k \in N'$, $2 \leq k$), so daß je zwei verschiedene Elemente davon in der Relation R stehen. Nach Induktionsvoraussetzung existiert somit eine Menge T'' , derart daß keine zwei verschiedenen Elemente von T'' in der Relation R stehen und daß $T'_k \cap T''$ unendlich ist für unendlich viele Zahlen k aus N' ; es ist dann auch $T_k \cap T''$ unendlich für unendlich viele Indizes k .

Wir dürfen somit annehmen, daß jedes Element von T_1 nur für endlich viele k in A_1^k liegt. Nach dem Hilfssatz 3 existiert dann eine unendliche Teilmenge T_1^* von T_1 und eine unendliche Menge N^* von natürlichen Zahlen, derart daß $T_1^* \cap A_1^k = \emptyset$ für $k \in N^*$. Es sei μ_1^* ein 0-1-Maß auf T_1^* , B_k^1 die Menge der $a \in T_k$ mit $\mu_1^*(V(a) \cap T_1^*) = 1$. Sei nun B_k^1 unendlich für $k \in N''$, $N'' \subseteq N^*$, N'' unendlich. Ist B die Vereinigung der B_k^1 ($k \in N''$, $2 \leq k$), so gibt es in B keine $n - 1$ Elemente, derart, daß je zwei verschiedene davon in der Relation R stehen. Jedes Element von B steht nämlich in der Relation R mit den Elementen einer Teilmenge von T_1^* , die das Maß 1 besitzt; zu endlich vielen Elementen in B gibt es somit ein Element in T_1^* , das mit jedem dieser endlich vielen in der Relation R steht. Nach Induktionsvoraussetzung existiert somit eine Teilmenge B'' von B , derart, daß keine zwei verschiedenen Elemente von B'' in der Relation R stehen und daß $B'' \cap B_k^1$ (und damit auch $B'' \cap T_k$) unendlich ist für unendlich viele Indizes k .

Wir dürfen somit annehmen, daß B_k^1 endlich ist für $k \in N'$, $N' \subseteq N^*$, N' un-

endlich. Wir setzen $T_k^* = T_k - B_k^1$ ($k \in N', 2 \leq k$). μ_k ist dann auch ein 0-1-Maß μ_k^* auf T_k^* ($2 \leq k$). Es gibt kein Element $a \in T_1^*$, für welches $V(a) \cap T_k^*$ das Maß 1 besitzt: A_1^{*k} ist leer für $k \in N', 2 \leq k$. Ferner gibt es kein Element $a \in T_k^*$ ($2 \leq k, k \in N'$), derart, daß $V(a) \cap T_1^*$ das Maß 1 besitzt: A_k^{*1} ist leer.

Hilfssatz 7. *Es seien U_i ($i: 1, 2, \dots$) abzählbare disjunkte Mengen, U die Vereinigung der U_i , R eine zweistellige symmetrische Relation auf U und $V(a)$, $a \in U$, die Menge der $x \in U$ mit $R(a, x)$. μ_i sei ein 0-1-Maß auf U_i und C_i^k sei die Menge der $a \in U_i$, für welche $\mu_k(V(a) \cap U_k) = 1$. Sind die Mengen C_1^k und C_k^1 leer für $k \neq 1$, so gibt es eine Teilmenge U'' von U , derart daß $U'' \cap U_k$ unendlich für alle k und daß ein Element aus $U'' \cap U_1$ und ein Element aus $U'' \cap U_k$ ($k \neq 1$) nicht in der Relation R stehen.*

Beweis. Wir definieren rekursiv Elemente a_n von U , derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Ist $a_m \in U_1$, $a_n \in U_k$, $k \neq 1$, so gilt $R(a_m, a_n)$ nicht; ist $n = 2^{k-1} \cdot u$ (u ungerade), so ist a_n Element von U_k . Die Menge U'' dieser Elemente a_n erfüllt dann ersichtlich die gestellten Bedingungen. a_1 sei das erste Element von U_1 (in einer Abzählung von U_1). Seien a_1, \dots, a_{n-1} definiert. Ist n ungerade, so haben die Mengen $V(a_i) \cap U_1$ für gerades i das Maß 0, und es gibt somit $b \in U_1$, derart daß $R(a_i, b)$ nicht gilt für $i < n$, i gerade; a_n sei das erste solche b . Ist $n = 2^{k-1} \cdot u$, $2 \leq k$, so ist $V(a_i) \cap U_k$ eine Menge vom Maß 0 für ungerades i : Es gibt somit ein $b \in U_k$, derart, daß $R(a_i, b)$ nicht gilt für i ungerade, $i < n$; a_n sei das erste solche b in der Abzählung von U_k .

Hilfssatz 8. *Es seien S_i ($i: 1, 2, \dots$) abzählbare disjunkte Mengen, S die Vereinigung der Mengen S_i und R eine zweistellige symmetrische Relation auf S . Es gebe keine n -zählige Teilmenge S' von S , derart, daß je zwei verschiedene Elemente von S' in der Relation R stehen. Dann gibt es eine Teilmenge S^* von S und eine unendliche Menge natürlicher Zahlen N^* mit kleinstem Element k_1 , derart daß $S^* \cap S_k$ unendlich für $k \in N^*$ und daß ein Element aus $S^* \cap S_{k_1}$ und ein Element aus $S^* \cap S_k$ ($k \in N^*, k \neq k_1$) nicht in der Relation R stehen.*

Beweis. μ_i sei ein 0-1-Maß auf S_i ($i: 1, 2, \dots$); $V(a)$, $a \in S$, sei die Menge der $x \in S$ mit $R(a, x)$ und B_i^k die Menge der $a \in S_i$ mit $\mu_k(V(a) \cap S_k) = 1$. Nach Hilfssatz 5 gibt es somit eine unendliche Menge N' von natürlichen Zahlen, derart, daß $\mu_i(B_i^k) = 0$ für $i, k \in N', i \neq k$. Sei p eine Abzählung von N' und $S_{p(i)} = T_i$, $\mu_{p(i)} = \nu_i$. Die Mengen T_i und die Maße ν_i erfüllen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 6: Ist A_i^k die Menge der $a \in T_i$, für welche $\nu_k(V(a) \cap T_k) = 1$, so ist $\nu_1(A_1^k) = 0$ für $2 \leq k$. Es gibt somit entweder eine Teilmenge T'' der Vereinigung T der Mengen T_i , derart, daß keine zwei

verschiedenen Elemente von T'' in der Relation R stehen und daß $T'' \cap T_i$ unendlich ist für unendlich viele i ; es ist dann auch $T'' \cap S_k$ unendlich für die Elemente k einer unendlichen Menge N^* . Oder es gibt eine unendliche Menge N'' , $1 \in N''$, Teilmengen T_i^* von T_i und Maße ν_i^* auf T_i^* , $i \in N''$, so daß A_1^{*k} und A_k^{*1} leer sind für $k \in N''$, $k \neq 1$. (Dabei ist A_i^{*k} die Menge der $a \in T_i^*$, für welche $\nu_k^*(V(a) \cap T_k^*) = 1$.) Sei q eine Abzählung der Zahlen von N'' und $T_{q(i)}^* = U_i$, $\nu_{q(i)}^* = \varrho_i$. Die Mengen U_i und die Maße ϱ_i erfüllen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7, und es gibt somit eine Teilmenge U'' der Vereinigung der U_i , derart, daß $U'' \cap U_k$ unendlich für unendlich viele Indizes k und daß ein Element aus $U'' \cap U_1$ und ein Element aus $U'' \cap U_k$ ($k \neq 1$) nicht in der Relation R stehen. Ist $S^* = U''$ und N^* die Menge der Zahlen $p(q(i))$ ($i: 1, 2, \dots$), so sind die Bedingungen erfüllt: N^* ist unendlich und ein Element aus $S^* \cap S_{p(q(1))} = U'' \cap U_1$ und ein Element aus $S^* \cap S_{p(q(k))} = U'' \cap U_k$ ($k \neq 1$) stehen nicht in der Beziehung R .

Beweis von Satz 1. Es seien S_i abzählbare disjunkte Mengen ($i: 1, 2, \dots$), S die Vereinigung der S_i und R eine zweistellige symmetrische Relation auf S . Wir definieren rekursiv Teilmengen S_k^* von S und Teilmengen N_k^* der Menge der natürlichen Zahlen, und zwar so, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: N_k^* ist unendlich, N_{k+1}^* ist eine Teilmenge von N_k^* , die k kleinsten Elemente von N_k^* sind auch Elemente von N_{k+1}^* ; $S_k^* \cap S_i$ ist unendlich für $i \in N_k^*$, S_{k+1}^* ist eine Teilmenge von S_k^* , es ist $S_{k+1}^* \cap S_i = S_k^* \cap S_i$ für die k kleinsten Zahlen i aus N_k^* ; ist i eine der k kleinsten Zahlen aus N_k^* , so steht ein Element aus $S_k^* \cap S_i$ und ein Element aus $S_k^* \cap S_j$ ($j \in N_k^*$, $j \neq i$) nicht in der Relation R . Es sei N_0^* die Menge aller natürlichen Zahlen, S_0^* die Menge S . Es seien die Mengen N_k^* und S_k^* definiert für $k < n$ und es sei p eine monotone Abzählung der Zahlen von N_{n-1}^* , die nicht gleich einer der $n - 1$ kleinsten Zahlen von N_{n-1}^* sind. (Die Abzählung p ist monoton, wenn $p(h) < p(i)$ für $h < i$.) Die Mengen $T_i = S_{p(i)} \cap S_{n-1}^*$ erfüllen die Voraussetzungen des Hilfssatzes 8, und es gibt somit eine Teilmenge T^* der Vereinigung der Mengen T_i und eine unendliche Menge M' von natürlichen Zahlen mit kleinstem Element k_1 , derart, daß $T^* \cap T_k$ unendlich ist für $k \in M'$ und daß ein Element aus $T^* \cap T_{k_1}$ und ein Element aus $T^* \cap T_k$ ($k \in M'$, $k \neq k_1$) nicht in der Relation R stehen. Die Menge N_n^* bestehe nun aus den $n - 1$ kleinsten Zahlen von N_{n-1}^* und aus denjenigen Zahlen $i \in N_{n-1}^*$, für welche $p^{-1}(i) \in M'$ (dabei ist p^{-1} die Umkehrabbildung der Abzählung p). S_n^* sei die Vereinigung der Menge T^* und der Mengen $S_{n-1}^* \cap S_i$, wobei i eine der $n - 1$ kleinsten Zahlen von N_{n-1}^* ist. S_n^* ist eine Teilmenge von S_{n-1}^* ; es ist $S_n^* \cap S_i$ unendlich für $i \in N_n^*$ und $S_n^* \cap S_i = S_{n-1}^* \cap S_i$ für die $n - 1$ kleinsten Zahlen i aus N_{n-1}^* . Ein Element aus $S_n^* \cap S_i$ und ein Element aus $S_n^* \cap S_j$ stehen nicht in der Relation R , falls

i eine der n kleinsten Zahlen aus N_n^* und $j \in N_n^*$, $j \neq i$. Ist i eine der $n - 1$ kleinsten Zahlen, so gilt dies, weil $i \in N_{n-1}^*$; ist i die n -te kleinste Zahl, weil $S_n^* \cap S_i = T^* \cap T_{k_1}$ und ein Element aus $S_n^* \cap S_j$, $j \in N_n^*$, entweder zu einer Menge $T^* \cap T_k$, $k \in M'$, oder zu einer Menge $S_{n-1}^* \cap S_j$ gehört, wobei j eine der $n - 1$ kleinsten Zahlen von N_{n-1}^* ist.

Sei nun N^* der Durchschnitt der Mengen N_k^* ; N^* ist unendlich, da die k kleinsten Zahlen von N_k^* für alle j zu N_j^* gehören. q sei eine monotone Abzählung der Menge N^* ; S^* sei die Vereinigung der Mengen $S_k^* \cap S_{q(k)}$; diese Mengen sind unendlich, da $q(k) \in N_k^*$. Ist $x \in S_j^* \cap S_{q(j)}$, $y \in S_k^* \cap S_{q(k)}$, $j < k$, so gilt $R(x, y)$ nicht, da $q(j)$ die j -te Zahl aus N_j^* und $y \in S_j^* \cap S_{q(k)}$ mit $q(k) \in N_j^*$.

Nach dem Satz von RAMSEY enthält $S_k^* \cap S_{q(k)}$ eine unendliche Teilmenge $S'_{q(k)}$, derart, daß zwei verschiedene Elemente aus $S'_{q(k)}$ nicht in der Relation R stehen. Ist somit S' die Vereinigung der Mengen $S'_{q(k)}$, so stehen zwei verschiedene Elemente von S' nicht in der Relation R und es ist $S' \cap S_i$ unendlich für $i \in N^*$.

Die folgenden Sätze zeigen, inwiefern Satz 1 nicht verallgemeinert werden kann.

Satz 2. *Auf einer geordneten Menge S vom Typus ω^2 gibt es eine solche dreistellige symmetrische Relation R , daß jede vierzählige Teilmenge S' von S drei verschiedene Elemente a_i ($i: 1, 2, 3$) enthält, für welche $R(a_1, a_2, a_3)$ nicht gilt, und daß jede Teilmenge S'' von S vom Typus ω^2 drei verschiedene Elemente a_i ($i: 1, 2, 3$) enthält, für welche $R(a_1, a_2, a_3)$ gilt.*

(Zusatz Januar 1957.) Nach P. ERDÖS und R. RADO gilt sogar der folgende

Satz 2'. *Auf einer geordneten Menge S vom Typus ω^2 gibt es eine solche dreistellige symmetrische Relation R , daß jede vierzählige Teilmenge S' von S drei verschiedene Elemente a_i ($i: 1, 2, 3$) enthält, für welche $R(a_1, a_2, a_3)$ nicht gilt, und daß jede Teilmenge S'' von S vom Typus $\omega + 1$ drei verschiedene Elemente a_i ($i: 1, 2, 3$) enthält, für welche $R(a_1, a_2, a_3)$ gilt.*

Beweis. Es sei S die Menge der Paare $\langle h, i \rangle$ natürlicher Zahlen, antilexikographisch geordnet. $R(a_1, a_2, a_3)$ mit $a_k = \langle h_k, i_k \rangle$ ($k: 1, 2, 3$) gelte genau dann, wenn es eine solche Permutation p der Zahlen $(1, 2, 3)$ gibt, daß $i_{p(1)} = i_{p(2)} < i_{p(3)}$. Diese Relation R besitzt die verlangten Eigenschaften.

(1) Es sei S' eine vierzählige Teilmenge von S ; die Elemente von S' seien so numeriert, daß mit $a_k = \langle h_k, i_k \rangle$ ($k: 1, 2, 3, 4$) gilt $i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq i_4$. Gilt $R(a_1, a_2, a_3)$ so ist somit $i_1 = i_2 < i_3$; gilt $R(a_2, a_3, a_4)$, so ist $i_2 = i_3 < i_4$: Es gelten somit nicht $R(a_1, a_2, a_3)$ und $R(a_2, a_3, a_4)$.

(2) Es sei S'' eine Teilmenge von S vom Typus $\omega + 1$; $a = \langle h, i \rangle$ sei das Element von S'' , dem unendlich viele Elemente von S'' vorangehen. Von den Paaren aus S'' haben höchstens $h - 1$ das zweite Glied i , alle anderen besitzen ein kleineres zweites Glied; es gibt somit in S'' zwei verschiedene Elemente b und c mit demselben zweiten Glied i' , $i' < i$. Die Elemente a, b, c stehen in der Relation R .

Satz 3. *Auf einer geordneten Menge S vom Typus ω^3 gibt es eine solche zweistellige symmetrische Relation R , daß jede dreizahlige Teilmenge S' von S zwei verschiedene Elemente a_1, a_2 enthält, für welche $R(a_1, a_2)$ nicht gilt, und daß jede Teilmenge S'' von S vom Typus ω^3 zwei verschiedene Elemente a_1, a_2 enthält, für welche $R(a_1, a_2)$ gilt.*

Beweis. Es sei S die Menge der Tripel $\langle h, i, k \rangle$ natürlicher Zahlen, antilexikographisch geordnet. $R(a_1, a_2)$ mit $a_j = \langle h_j, i_j, k_j \rangle$ ($j: 1, 2$) gelte genau dann, wenn es eine solche Permutation p der Zahlen $(1, 2)$ gibt, daß $i_{p(1)} \leq k_{p(2)} \leq h_{p(1)} < i_{p(2)}$; falls $R(a_1, a_2)$ gilt, ist somit $i_1 \neq i_2$. Diese Relation R besitzt die verlangten Eigenschaften. (1) Es sei S' eine dreizahlige Teilmenge von S . Sind nicht alle mittleren Glieder der Tripel aus S' verschieden, so gibt es zwei verschiedene Elemente in S' , für welche R nicht gilt. Es seien somit die mittleren Glieder verschieden, und die Elemente von S' seien so numeriert, daß mit $a_j = \langle h_j, i_j, k_j \rangle$ ($j: 1, 2, 3$) gilt $i_1 < i_2 < i_3$. Gilt $R(a_1, a_2)$, so ist $i_1 \leq k_2 \leq h_1 < i_2$; gilt $R(a_1, a_3)$, so ist $i_1 \leq k_3 \leq h_1 < i_3$. Aus $R(a_1, a_2)$ und $R(a_1, a_3)$ folgt somit $k_3 < i_2$; es ist daher nicht $i_2 \leq k_3 \leq h_2 < i_3$, das heißt $R(a_2, a_3)$ gilt nicht. (2) Sei S'' eine Teilmenge von S vom Typus ω^3 . Ist S_{ik} die Menge der Tripel von S mit zweitem Glied i und drittem Glied k , so gibt es eine unendliche Menge K von natürlichen Zahlen und zu jedem $k \in K$ eine unendliche Menge I_k von natürlichen Zahlen, derart, daß für $k \in K$, $i \in I_k$ die Menge $S'' \cap S_{ik}$ unendlich ist. Sei k_1 die kleinste Zahl aus K , i_1 die kleinste Zahl aus I_{k_1} ; sei k_2 die kleinste Zahl k aus K , für welche $i_1 \leq k$; sei h_1 die kleinste Zahl h für welche $k_2 \leq h$ und $\langle h, i_1, k_1 \rangle \in S'' \cap S_{i_1 k_1}$; sei i_2 die kleinste Zahl i , für welche $h_1 < i$ und $i \in I_{k_2}$; sei h_2 die kleinste Zahl h , für welche $\langle h, i_2, k_2 \rangle \in S''$. Es ist somit $i_1 \leq k_2 \leq h_1 < i_2$, $\langle h_j, i_j, k_j \rangle \in S''$ ($j: 1, 2$); diese beiden Tripel stehen in der Relation R .

Satz 4. *Auf einer geordneten Menge S vom Typus α (α Zahl der zweiten Zahlklasse) gibt es eine solche zweistellige symmetrische Relation R , daß jede unendliche Teilmenge S' von S zwei verschiedene Elemente a_1, a_2 enthält, für welche $R(a_1, a_2)$ nicht gilt, und daß jede Teilmenge S'' von S vom Typus $\omega + 1$ zwei verschiedene Elemente a_1, a_2 enthält, für welche $R(a_1, a_2)$ gilt.*

Beweis. Die Menge S sei geordnet nach dem Typus α , h sei eine ein-

deutige Abbildung von S auf die Menge N der natürlichen Zahlen. $R(a_1, a_2)$ gelte genau dann, wenn entweder $a_1 < a_2$ (in der in S gegebenen Ordnung) und $h(a_2) < h(a_1)$ (in der natürlichen Ordnung von N) oder $a_2 < a_1$ und $h(a_1) < h(a_2)$. Diese Relation R besitzt die verlangten Eigenschaften. (1) Sei S' eine unendliche Teilmenge von S ; S' ist als Teilmenge einer wohlgeordneten Menge in natürlicher Weise wohlgeordnet und enthält somit eine Teilmenge S^* vom Typus ω : Sei $a_i \in S'$ ($i: 1, 2, \dots$) mit $a_i < a_j$ (in der Ordnung von S) für $i < j$. Da es nur endlich viele natürlichen Zahlen gibt, welche kleiner als $h(a_1)$ sind, so gibt es eine solche Zahl j , daß $h(a_1) < h(a_j)$. Da auch $a_1 < a_j$, so gilt $R(a_1, a_j)$ nicht. (2) Sei S'' eine Teilmenge von S vom Typus $\omega + 1$; a_1 sei dasjenige Element von S'' , dem unendlich viele Elemente aus S'' vorangehen. Es gibt dann ein Element a_2 in S'' , für welches $h(a_1) < h(a_2)$. Da $a_2 < a_1$, so gilt $R(a_1, a_2)$.

Um uns im folgenden kurz ausdrücken zu können, definieren wir eine Aussage $A(m, n, \alpha)$, wobei m, n natürliche Zahlen, α eine Zahl der zweiten Zahlklasse ist. $A(m, n, \alpha)$ ist die folgende Aussage: Zu jeder m -stelligen symmetrischen Relation R auf einer Menge S vom Typus α gibt es entweder eine solche n -zählige Teilmenge S' von S , daß für je m verschiedene Elemente von S' die Relation R gilt, oder es gibt eine solche Teilmenge S'' von S vom Typus α , daß für je m verschiedene Elemente von S'' die Relation R nicht gilt. Satz 1 besagt, daß $A(2, n, \omega^2)$ gilt für alle natürlichen Zahlen n . Satz 2 besagt, daß $A(3, 4, \omega^2)$ nicht gilt, Satz 3, daß $A(2, 3, \omega^3)$ nicht gilt.

Wir stellen zunächst einige einfache Eigenschaften von « $A(m, n, \alpha)$ » zusammen.

(A₁) $A(m, n, \alpha)$ gilt für $n \leq m$.

(A₂) Gilt $A(m, n, \alpha)$, so auch $A(m, n', \alpha)$ für $n' \leq n$.

(A₃) Ist $m < n$ und ist α darstellbar als Summe $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i < \alpha$ ($i: 1, 2$), so gilt $A(m, n, \alpha)$ nicht.

Zum Beweise sei die Menge S vom Typus α dargestellt als Vereinigung der disjunkten Mengen S_i ($i: 1, 2$) vom Typus α_i und gelte die Relation R für die Elemente a_1, \dots, a_m genau dann, wenn es genau eine solche Zahl i gibt ($1 \leq i \leq m$), daß $a_i \in S_2$. Sei nun S' eine n -zählige Teilmenge von S ; enthält $S' \cap S_2$ höchstens ein Element, so enthält $S' \cap S_1$ mindestens m Elemente und für m Elemente aus $S' \cap S_1$ gilt die Relation R nicht; enthält aber $S' \cap S_2$ mindestens zwei Elemente, so gilt die Relation R nicht für m Elemente, unter denen sich zwei aus $S' \cap S_2$ befinden. Sei nun S'' eine Teilmenge von S ; die Relation R gelte nicht für je m verschiedene Elemente von S'' . Es ist dann entweder $S'' \cap S_2$ leer oder $S'' \cap S_1$ enthält höchstens $m - 2$ Elemente. Im ersten Fall ist der Typus von S'' höchstens gleich α_1 , das heißt kleiner als α ; im

zweiten Fall ist der Typus von S'' höchstens gleich $(m - 2) + \alpha_2$, welche Ordnungszahl nur dann größer als α_2 ist, wenn α_2 selbst endlich ist; in diesem Falle aber ist der Typus von S'' endlich, das heißt kleiner als α , das wir als unendlich vorausgesetzt haben. (Der Fall eines endlichen α ließe sich sehr leicht behandeln.)

(A₄) *Es sei α eine Limeszahl der zweiten Zahlklasse, $A(m, n, \alpha)$ gelte nicht; dann gilt auch nicht $A(m + k, n + k, \alpha)$, wobei k eine natürliche Zahl ist.*

Beweis. Da $A(m, n, \alpha)$ nicht gilt, so gibt es auf einer Menge S vom Typus α eine solche symmetrische m -stellige Relation R , daß jede n -zählige Teilmenge S' von S ein m -Tupel verschiedener Elemente enthält, für welche R nicht gilt, und daß jede Teilmenge S'' von S vom Typus α ein m -Tupel verschiedener Elemente enthält, für welche R gilt. Auf Grund einer solchen Relation R definieren wir eine $(m + k)$ -stellige Relation R^* folgendermaßen: $R^*(a_1, \dots, a_{m+k})$ gilt genau dann, wenn es eine solche Permutation p der Zahlen $(1, \dots, m + k)$ gibt, daß $a_{p(i)} < a_{p(j)}$ für $1 \leq i < j \leq m + k$ und daß $R(a_{p(1)}, \dots, a_{p(m)})$ gilt. Wir zeigen zunächst, daß jede $(n + k)$ -zählige Teilmenge von T' von S ein $(m + k)$ -Tupel verschiedener Elemente enthält, für welches R^* nicht gilt: Es seien a_i ($i: 1, \dots, n + k$) die Elemente von T' und es sei $a_i < a_j$ für $i < j$. Die Menge (a_1, \dots, a_n) enthält m verschiedene Elemente b_i ($i: 1, \dots, m$), welche nicht in der Relation R stehen; sei ferner $b_i = a_i$ für $i: m + 1, \dots, m + k$; dann gilt $R^*(b_1, \dots, b_{m+k})$ nicht. Sei nun S'' eine Teilmenge von S vom Typus α ; S'' enthält m verschiedene Elemente a_i ($i: 1, \dots, m$), für welche $R(a_1, \dots, a_m)$ gilt; da der Typus von S'' ein Limeszahltypus ist, so gibt es in S'' Elemente a_i ($i: m + 1, \dots, m + k$) mit $a_m < a_i$ für $m < i \leq m + k$; dann gilt auch $R^*(a_1, \dots, a_{m+k})$.

(A₅) $A(m, n, \omega^2)$ gilt nicht für $3 \leq m < n$. Dies folgt unmittelbar aus Satz 3, (A₃) und (A₄).

(A₆) *Gilt $A(m, n, \alpha)$ und gibt es eine solche Abbildung f einer Menge S vom Typus α auf eine Menge T vom Typus β , daß das Bild einer Teilmenge von S vom Typus α in T den Typus β besitzt, so gilt $A(m, n, \beta)$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $A(m, n, \beta)$ nicht gilt; dann ist $m < n$. Ferner sei f eine solche Abbildung der Menge S vom Typus α auf die Menge T vom Typus β , daß das Bild $T^* = f(S^*)$ den Typus β besitzt, falls S^* eine Teilmenge von S vom Typus α ist. R sei eine m -stellige symmetrische Relation auf T ; jede n -zählige Teilmenge T' von T enthalte m verschiedene Elemente, für welche R nicht gilt, und jede Teilmenge T'' von T vom Typus β enthalte m verschiedene Elemente, für welche R gilt. $R(b_1, \dots, b_m)$, $b_i \in T$ ($i: 1, \dots, m$), gelte nicht, falls es Zahlen i, j gibt mit $b_i = b_j$ und $i \neq j$. Wir definieren

eine m -stellige symmetrische Relation R^* auf S : $R^*(a_1, \dots, a_m)$, $a_i \in S$ ($i: 1, \dots, m$) gelte genau dann, wenn $R(f(a_1), \dots, f(a_m))$ gilt. Sei S' eine n -zählige Teilmenge von S . Ist $T' = f(S')$ nicht n -zählig, so gibt es zwei verschiedene Elemente $a_1, a_2 \in S'$ mit $f(a_1) = f(a_2) = b$; sind a_i ($i: 3, \dots, m$) irgendwelche weiteren verschiedenen Elemente von S' ($a_i \neq a_j$ für $i \neq j$), so gilt $R^*(a_1, a_2, \dots, a_m)$ nicht, da $R(b, b, \dots, f(a_m))$ nicht gilt. Ist $T' = f(S')$ eine n -zählige Menge, so enthält es m verschiedene Elemente b_i ($i: 1, \dots, m$), für welche R nicht gilt; ist dann $f(a_i) = b_i$, $a_i \in S'$ ($i: 1, \dots, m$), so sind diese Elemente von S' verschieden und die Relation R^* gilt nicht für sie. Ist S'' eine Teilmenge von S vom Typus α , so ist $T'' = f(S'')$ eine Teilmenge von T vom Typus β . T'' enthält somit m verschiedene Elemente b_i ($i: 1, \dots, m$), für welche R gilt; sind dann a_i Elemente von S'' mit $b_i = f(a_i)$ ($i: 1, \dots, m$), so gilt $R^*(a_1, \dots, a_m)$.

Bemerkung. Da $A(2, 3, \omega^2)$ gilt, nicht aber $A(2, 3, \omega^3)$ (Sätze 2 und 4), so gibt es zu jeder Abbildung f einer Menge S vom Typus ω^2 auf eine Menge T vom Typus ω^3 eine solche Teilmenge S^* von S vom Typus ω^2 , daß das Bild $T^* = f(S^*)$ in T nicht den Typus ω^3 besitzt. Dies kann auch auf anderm Wege leicht eingesehen werden.

Hilfssatz 9. *Ist α eine Zahl der zweiten Zahlklasse mit $\omega^2 \leq \alpha$, so läßt sich eine Menge S vom Typus α so auf eine Menge T vom Typus ω^2 abbilden, daß das Bild einer Teilmenge S^* von S vom Typus α in T den Typus ω^2 besitzt.*

Beweis. Es sei γ die größte Zahl ξ mit $\omega^\xi \leq \alpha$. S enthält dann eine solche Teilmenge S_1 vom Typus ω^γ , daß der Typus von $S'' \cap S_1$ gleich ω^γ ist, falls S'' eine Teilmenge von S vom Typus α ist. (Dies ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung von α als Summe von ω -Potenzen.) Mit S_1 läßt sich dann auch S auf die gewünschte Art abbilden; wir nehmen daher im folgenden an, daß α selbst eine ω -Potenz ist. α ist somit insbesondere ω -Limes: $\alpha = \lim \alpha_n$. Daraus ergibt sich eine Darstellung von S als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren disjunkten Mengen S_n , derart, daß die Vereinigung von endlich vielen Mengen S_n einen Typus α' besitzt mit $\alpha' < \alpha$. Die Mengen S_i seien abgezählt durch a_h^i ($h, i: 1, 2, \dots$). T sei die Menge der Paare $\langle h, i \rangle$ von natürlichen Zahlen, antilexikographisch geordnet; T besitzt den Typus ω^2 . f bilde S folgendermaßen in T ab: $f(a_h^i) = \langle h, i \rangle$. Sei nun S'' eine Teilmenge von S ; gibt es eine solche Zahl n , daß für alle i mit $n < i$ der Durchschnitt $S'' \cap S_i$ endlich ist, und ist der Typus der Vereinigung der Mengen S_1, \dots, S_n gleich α' , so ist der Typus von S'' höchstens gleich $\alpha' + \omega$, das heißt kleiner als α . Ist somit S'' vom Typus α , so ist der Durchschnitt $S'' \cap S_i$ unendlich für unendlich viele Zahlen i und das Bild von S'' hat als Teilmenge von T den Typus ω^2 .

Satz 5. $A(m, n, \alpha)$ gilt nicht für $3 \leq m < n$ und $\omega < \alpha$.

Beweis. Nach (A_5) gilt $A(m, n, \omega^2)$ nicht für $3 \leq m < n$. Nach (A_6) gilt somit nicht $A(m, n, \alpha)$ ($3 \leq m < n$) für alle Ordnungszahlen α , die die Eigenschaft besitzen, daß eine Menge S vom Typus α sich so auf eine Menge T vom Typus ω^2 abbilden läßt, daß das Bild einer Teilmenge von S vom Typus α in T den Typus ω^2 besitzt; nach Hilfssatz 9 ist dies der Fall für alle Ordnungszahlen größergleich ω^2 . Ist $\omega < \alpha < \omega^2$, so ist α darstellbar als Summe zweier kleinerer Ordnungszahlen und $A(m, n, \alpha)$ gilt nicht für $m < n$ nach (A_3) .

Bemerkung. $A(m, n, \omega)$ gilt nach dem Satz von RAMSEY. Zusammen mit (A_1) ist damit für $3 \leq m$ vollständig beantwortet, für welche n und α die Aussage $A(m, n, \alpha)$ gilt.

Bei Berücksichtigung von (A_3) bleibt somit zu entscheiden, für welche n und welche Ordnungszahlen ω^γ die Aussage $A(2, n, \omega^\gamma)$ gilt. $A(2, n, \omega^\gamma)$ gilt nach RAMSEY für $\gamma : 1$, nach Satz 1 für $\gamma : 2$ und nach Satz 4 nicht für $\gamma : 3$. Es ergibt sich aber aus diesem letzten nicht (entsprechend dem Beweis von Satz 5), daß $A(2, n, \alpha)$ nicht gilt für alle Ordnungszahlen α der zweiten Zahlklasse mit $\omega^3 \leq \alpha$. Dies liegt daran, daß das Analogon von Hilfssatz 9 nicht gilt: Nicht jede abzählbare Ordnungszahl α mit $\omega^3 \leq \alpha$ besitzt die Eigenschaft, daß eine Menge S vom Typus α sich so auf eine Menge T vom Typus ω^3 abbilden läßt, daß das Bild einer Teilmenge von S vom Typus α in T den Typus ω^3 besitzt; eine solche Abbildung existiert zum Beispiel nicht für Mengen vom Typus ω^ω . Für andere Ordnungszahlen ist die Existenz einer solchen Abbildung leicht nachzuweisen; dies ist insbesondere der Fall für die Ordnungszahlen ω^k , $3 \leq k$, k endlich. Es ergibt sich daraus, daß $A(2, n, \omega^k)$ nicht gilt für $2 < n$, $3 \leq k$, k endlich.

Der einfachste Fall, der unentschieden bleiben muß, ist somit $A(2, 3, \omega^\omega)$. Weitere Fragen, die sich in diesem Zusammenhang stellen, sind etwa die folgenden: Folgt $A(2, n, \alpha)$ aus $A(2, 3, \alpha)$? Für welche Ordnungszahlen α läßt sich eine Menge S vom Typus α so auf eine Menge T vom Typus ω^3 abbilden, daß das Bild einer Teilmenge von S vom Typus α in T den Typus ω^3 besitzt?

LITERATUR

- [1] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2. Aufl., New York 1948.
- [2] P. ERDÖS and R. RADO, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 427–489.
- [3] R. FRAISSÉ, *Sur quelques classifications des systèmes de relations*, Chartres 1955.
- [4] F. P. RAMSEY, *On a problem of formal logic*, Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1930), 264–286.

(Eingegangen den 8. Oktober 1956.)