Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques.

Autor(en): **Hersch, Joseph**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **30 (1956)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23899

Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques

par JOSEPH HERSCH, Zurich

1. Fonctions pseudo-analytiques et transformations pseudo-conformes

1.1. Une *transformation intérieure* (*Stoïlow* [16], p. 107) d'une variété topologique V à deux dimensions dans une autre W, est une application jouissant des trois propriétés suivantes :

A) Elle est continue.

B) Elle transforme tout ensemble ouvert de V en un ensemble ouvert de W.

C) Elle ne transforme aucun continu de V en un point unique de W.

On voit que toute transformation topologique est une transformation intérieure biunivoque, et réciproquement.

Stoïlow a démontré que la notion de transformation intérieure d'une variété V *dans la sphère de Riemann* S exprime exactement le contenu topologique de la notion de fonction analytique. En d'autres termes : a) Toute fonction analytique est une transformation intérieure. b) Toute transformation intérieure I : $V \to S$ est de la forme

$$I = AT \ , \tag{1}$$

où T est une transformation topologique de V dans une *surface de Riemann*, et A est une fonction analytique. — On peut par exemple transposer localement la structure conforme (w) de S sur V, c'est-à-dire on construit une surface de Riemann $V^{(w)}$ homéomorphe à V ; c'est la *surface de recouvrement* de S induite par I ; A est la „projection" $V^{(w)} \to S$.

Tout point $p \in V$ a un voisinage $U(p)$ topologiquement équivalent soit à $I(U(p))$ (alors p est un „point ordinaire" pour I), soit à un *élément de recouvrement sur* $I(U(p))$, ramifié sur $I(p)$ ($p =$ „point de ramification"). *Dans les deux cas, je désignerai par* $U'(I(p))$ *ce voisinage, image topologique de* $U(p)$.

1.2. Soit maintenant $R^{(z)}$ une surface de Riemann, avec sa structure *topologique* R (variété) et sa structure *conforme* (z).

Avec *Pfluger* [13, 14], j'appellerai une fonction complexe $w(p)$ *fonction* (ou application) *D-pseudo-analytique* dans un domaine $G^{(z)}$ de $R^{(z)}$ si c'est une transformation intérieure de G dans S satisfaisant à la condition suivante :

D) Tout point p de $G^{(z)}$ a un voisinage $U(p)$ tel que, pour tout quadrilatère[1]) $Q \subset U(p)$, un module $\mu = \mu(Q)$ et le module correspondant $\mu' = \mu(Q')$ $(Q' \subset U'(w(p)))$ satisfont aux inégalités[2])

$$D^{-1}\mu \leqslant \mu' \leqslant D\mu \qquad (D \geqslant 1). \tag{2}$$

J'appellerai *transformation D-pseudo-conforme*[3]) une application topologique satisfaisant à la condition D).

1.3. Soit $w(p)$ une application D-pseudo-analytique de $G^{(z)} \subset R^{(z)}$ dans S $(G^{(z)} \to w(G) \subset S)$. L'application $G \to S$ (G étant seulement *variété*) est une transformation intérieure ; on peut (cf. Stoïlow) définir dans G une structure conforme (w) (différente de (z)), obtenue par inversion locale de $w(p)$; $G^{(w)}$ est une surface de Riemann, et P: $G^{(w)} \to w(G) \subset S$ une application analytique (la „projection" de $G^{(w)}$ dans S).

Occupons-nous maintenant de la transformation F : $G^{(z)} \to G^{(w)}$; elle est topologique (identité !), car les surfaces de Riemann $G^{(z)}$ et $G^{(w)}$ sont définies sur *la même variété topologique G* ; elle satisfait à la condition D) ; F est donc *D-pseudo-conforme.*

$$\begin{tikzcd} G^{(z)} \arrow[d, "\substack{w(z)\\ \text{pseudo-analytique}}"'] \arrow[drr, "F\ \text{pseudo-conforme}"] & & \\ w(G^{(z)}) & & G^{(w)} \arrow[ll, "P\ \text{analytique}"] \end{tikzcd} \tag{3}$$

Théorème 1. *Toute fonction D-pseudo-analytique $w(p)$ peut être mise sous la forme*

$$w = PF \ , \tag{1'}$$

où F est une transformation D-pseudo-conforme et P est une fonction analytique. (La réciproque est triviale.)

---

[1]) Domaine de Jordan avec quatre points désignés sur la frontière. – Le *module* $\mu_{\beta'\beta''}$ d'un rectangle dont les côtés β' et β'' ont la longueur b et les côtés α' et α'' la longueur a, est a/b; la représentation conforme étend cette définition du module à tout quadrilatère.

[2]) Nous montrerons (§ 2.1) que le comportement *métrique* au voisinage des points de ramification n'est pas essentiel: il suffit d'imposer D) aux points ordinaires. – *Caccioppoli* a indiqué dans un récent travail [2] que, sous des hypothèses de dérivabilité, on peut se passer de postuler B) et C).

[3]) Ce terme est employé dans un sens différent en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes; aucune confusion n'est possible ici.

Ce théorème permet de séparer les deux actions d'une fonction pseudo-analytique : F respecte la topologie, P la métrique locale.

2. Variation du module d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe

Théorème 2. *Soient Q un quadrilatère quelconque, Q' son image par une transformation D-pseudo-conforme* $z' = f(z)$, topologique aussi sur le contour de Q. *Alors les inégalités* (2) *sont aussi satisfaites par les modules* $\mu = \mu(Q)$ *et* $\mu' = \mu(Q')$.

Démonstration. D'une propriété locale, il s'agit de déduire la propriété globale analogue.

Soient $Q(\beta_0\, \alpha_0\, \beta_1\, \alpha_1)$ et $\mu = \mu_{\beta_0\beta_1 Q}$. Appelons u la fonction harmonique dans Q, solution du problème de Dirichlet-Neumann suivant: $u = 0$ sur β_0, $u = 1$ sur β_1, $\partial u/\partial n = 0$ sur α_0 et α_1. Soient

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = 1$$

des nombres réels partageant l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ en n parties. Le domaine Q_i: $\lambda_i < u < \lambda_{i+1}$ est un quadrilatère : sa frontière est formée par les lignes de niveau θ_i $(u = \lambda_i)$, θ_{i+1} $(u = \lambda_{i+1})$ et des portions des arcs α_0 et α_1 $(\theta_0 = \beta_0,\ \theta_n = \beta_1)$; $\mu_i = \mu_{\theta_i \theta_{i+1} Q_i}$.

Posons $\int_{\beta_1}(\partial u/\partial n)\, ds = e$ ($\vec{n}$ = normale extérieure) ; alors

$$e = \iint_Q \operatorname{grad}^2 u\, d\tau = 1/\mu.\ ^{4)}$$

Considérons maintenant Q_i au lieu de Q ; au lieu de u, on a ici

$$u_i = (u - \lambda_i)/(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \ ,$$

donc

$$1/\mu_i = \iint_{Q_i} \operatorname{grad}^2 u_i d\tau = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{-2} \iint_{Q_i} \operatorname{grad}^2 u\, d\tau \ ;$$

d'où

$$\mu_i = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)/e \ .$$

Donc $\sum\limits_i \mu_i = \mu$. (Nous avons *ici* l'*additivité* des modules au lieu de la suradditivité.)

Appliquons toute cette figure dans le plan (z') par $z' = f(z)$. En vertu de la suradditivité des modules, $\mu' = \mu_{\beta_0'\beta_1' Q'} \geqslant \sum\limits_i \mu_i'$. Je désigne maintenant par ω_i' la fonction harmonique dans Q_i' telle que $\omega_i' = 0$ sur α_0',

---

4) ds est l'élément linéaire, $d\tau$ l'élément de surface.

$\omega_i' = 1$ sur α_1', $\partial\omega_i'/\partial n = 0$ sur θ_i' et θ_{i+1}'. Puis je procède avec ω_i' dans Q_i' exactement comme j'ai procédé avec u dans Q. Je coupe Q_i' par des lignes de niveau η_k' : $\omega_i' = \sigma_k$ $(0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = 1)$ en de petits quadrilatères Q_{ik}' $(\sigma_k < \omega_i' < \sigma_{k+1})$; $\mu_{ik}' = \mu_{\eta_k' \eta_{k+1}' Q_{ik}'}$. Grâce aux propriétés des représentations topologiques, on peut rendre les images réciproques Q_{ik} *arbitrairement petites*. On obtient $1/\mu_i' = \sum_k \mu_{ik}'$ (additivité), et $1/\mu_i \geqslant \sum_k \mu_{ik}$ (suradditivité) ; d'où $\mu = \sum_i \mu_i \leqslant \sum_i (\sum_k \mu_{ik})^{-1}$ et $\mu' \geqslant \sum_i \mu_i' = \sum_i (\sum_k \mu_{ik}')^{-1}$. Supposons que l'on ait construit les Q_{ik} assez petits pour que $\mu_{ik}' \leqslant D \cdot \mu_{ik}$. Alors il s'ensuit que $\mu' \geqslant \mu/D$, et (par une démonstration analogue) $\mu \geqslant \mu'/D$, ce qu'on voulait démontrer.

Il reste à montrer qu'il est possible de construire les Q_{ik} assez petits : c'est possible si toute la *fermeture* de Q est intérieure au domaine de pseudo-conformité (on peut alors, selon Heine-Borel, recouvrir Q par un nombre fini de voisinages $U(p)$, etc.) ; si tel n'est pas le cas, on procédera par exhaustion de Q au moyen de quadrilatères intérieurs. c. q. f. d.

Les bornes (2) sont exactes (cas extrémal : Q et Q' sont des rectangles).

2.1. La démonstration ci-dessus reste valable si l'on admet que des points isolés désobéissent à D) : il suffit de faire passer une ligne θ_i par chacun de ces points.

Corollaire. Toute transformation intérieure pour laquelle chaque point ordinaire satisfait D), *est D-pseudo-analytique.*

En effet, elle est (cf. (1)) le produit d'une transformation D-pseudo-conforme (car les points de ramification sont isolés) et d'une fonction analytique. — On voit que ces points ne jouent qu'un rôle topologique, mais pas de rôle métrique.

2.2. **Théorème 2'.** *Soient D un domaine doublement connexe, de module*[5] μ, *et D' (de module μ') son image par une transformation D-pseudo-conforme. Alors μ et μ' satisfont les inégalités* (2).

La démonstration serait calquée sur celle du théorème 2.

2.3. Les théorèmes 2 et 2' permettent de généraliser immédiatement aux fonctions pseudo-analytiques plusieurs propriétés des fonctions analytiques : cf. [9] (I. 3. D).

---

[5]) J'appelle *module* de la couronne circulaire $1 < |z| < R$ la grandeur $\mu = (1/2\pi)\ln R$; cette définition s'étend par représentation conforme à tout domaine doublement connexe.

3. La fonction $\nu(r)$ et ses principales propriétés

Nous allons avoir besoin de la fonction $\nu(r)$ définie dans ma thèse ([9], Chap. II, § 1); je rappelle ici ses principales propriétés (pour les démonstrations, voir ce travail).

Définition. $\nu(r)$ $(0 \leqslant r < 1)$ est le module du domaine doublement connexe dont les contours sont le cercle-unité $|z| = 1$ et le segment réel $0 \leqslant x \leqslant r$.

Propriétés.

(a) ν est une fonction monotone décroissante (non-négative).

(b) $\nu(r) = (1/4)\,K'(r)/K(r)$, où $K(r) = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}$ et $K'(r) = K(\sqrt{1-r^2})$.

(c) $\nu(r)\,\nu(\sqrt{1-r^2}) \equiv 1/16$.

(d) $2\nu(r) = \nu((1-\sqrt{1-r^2})^2/r^2)$; $\nu(r)/2 = \nu(2\sqrt{r}/(1+r))$.

(e) $\nu(r)\,\nu((1-r)/(1+r)) \equiv 1/8$.

(f) Cas limite $r \to 0$: $\nu(r) = (1/2\pi)\ln(4/r) + O(r^2)$.

(g) Cas limite $r \to 1$: $\pi/\nu(r) = 4\ln(8/(1-r)) + O(1-r)$.

(h) $\ln((1+\sqrt{1-r})^2/r) \leqslant 2\pi\,\nu(r) \leqslant \ln(4/r)$;

d'autres évaluations s'obtiennent à partir de (h) à l'aide de (d) et (e).
(i) Valeurs particulières : $\nu(1/\sqrt{2}) = 1/4$; $\nu(\sqrt{2}-1) = 1/(2\sqrt{2})$; on peut dès lors résoudre élémentairement toute équation en r de la forme $\nu(r) = 2^{n/2}$ (n entier), par application itérée d'une des formules (d). Exemple : $1/2 = 2\nu(1/\sqrt{2}) = \nu((\sqrt{2}-1)^2) = \nu(3-2\sqrt{2})$.

4. Variation de la mesure harmonique

4.1. Soit G un domaine *de Jordan* de frontière Γ, sur lequel on a désigné un point intérieur p et un *arc-frontière connexe* α ; soit $z' = f(z)$ une transformation *D-pseudo-conforme* appliquant G sur un autre domaine de Jordan G' ; $\omega = \omega_{p\alpha G}$ et $\omega' = \omega_{p'\alpha' G'}$; alors

$$\frac{1}{D}\,\nu\left(\sin\frac{\pi\omega}{2}\right) \leqslant \nu\left(\sin\frac{\pi\omega'}{2}\right) \leqslant D\nu\left(\sin\frac{\pi\omega}{2}\right) \;{}^{6)} \qquad (4)$$

Démonstration. — Comme représentants des configurations de $G^{p\alpha}$ et $G'^{p'\alpha'}$, je choisis les cercles-unités $|z| < 1$ et $|z'| < 1$, avec $p = 0$,

[6]) Ce résultat a été brièvement annoncé dans la Note [10].

$p' = 0$, les arcs α et α' ayant pour milieu le point d'affixe 1. J'appelle η le segment réel $-1 \leqslant x \leqslant 0$; η' est alors un arc joignant 0 à $\Gamma' - \alpha'$; soit $Q(\omega)$ le quadrilatère de côtés opposés η et α (dans $|z| < 1$). On calcule facilement (cf. [9], Chap. II, § 2) que $\mu_{\alpha\eta} = 2\nu(\sin \pi\omega/2)$; en vertu de [9] (III. 2. C), $\mu_{\alpha'\eta'} \leqslant 2\nu(\sin \pi\omega'/2)$. Selon le théorème 2, $\mu_{\alpha'\eta'} \geqslant \mu_{\alpha\eta}/D$, d'où l'inégalité de gauche dans (4). On démontrerait de même l'inégalité de droite. c. q. f. d.

La démonstration montre aussi que les évaluations (4) sont *exactes*, car les inégalités (2) pour les modules le sont : on peut construire une transformation extrémale, en appliquant d'abord $Q(\omega)$ sur un rectangle, et η' sera de nouveau le segment réel $-1 \leqslant x' \leqslant 0$.

Cas limite $\omega \to 0$:

$$(\pi/8)^{D-1}\omega^{D}(1 + O(\omega^{2D})) \leqslant \omega' \leqslant (8/\pi)^{1-1/D}\omega^{1/D}(1 + O(\omega^{2/D})) \ . \qquad (4')$$

Cas $D = 2$: (d), § 3 donne

$$\sin \frac{\pi\omega'}{2} \geqslant \mathrm{tg}^2 \frac{\pi\omega}{4} \, , \qquad (4'')$$

et naturellement l'inégalité obtenue en permutant ω et ω'.

En itérant (d), on peut de même obtenir pour le cas $D = 2^n$ (n entier) des évaluations où n'interviennent que des fonctions élémentaires.

4.2. Le théorème 1 et l'inégalité de droite dans (4) permettent, compte tenu du principe de Nevanlinna sur l'augmentation de la mesure harmonique par une application analytique, d'arriver au théorème suivant :

Soient $G^{p\alpha}$ une figure du type considéré ; $z' = f(z)$ une fonction *D-pseudo-analytique* dans G ; alors

$$\nu\left(\sin \frac{\pi\omega'}{2}\right) \leqslant D\nu\left(\sin \frac{\pi\omega}{2}\right) \qquad (4''')$$

quels que soient $G' = f(G)$ et $\alpha' = f(\alpha)$. — Si $D = 2$, cette inégalité devient (4″).

5. Variation de la distance hyperbolique (et de la fonction de Green). Lemme de Schwarz généralisé

5.1. Soient G un domaine simplement connexe, dans lequel on a désigné deux points p, q ; $z' = f(z)$ une transformation *D-pseudo-conforme* : $f(G) = G'$; $h = h_{pqG}$, $h' = h_{p'q'G'}$, $g = g_{pqG}$, $g' = g_{p'q'G'}$. Alors

$$\left.\begin{aligned} D^{-1}\,\nu(e^{-2h}) &\leqslant \nu(e^{-2h'}) \leqslant D\,\nu(e^{-2h}) \\ D^{-1}\,\nu(e^{-g}) &\leqslant \nu(e^{-g'}) \leqslant D\,\nu(e^{-g}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Démonstration. — Il suffit de nouveau de considérer le cas où G et G' sont des cercles-unités, avec $p = 0$, $p' = 0$ et q, q' réels positifs : $q = \operatorname{Th} h = e^{-g}$, $q' = \operatorname{Th} h' = e^{-g'}$. (Th désigne la tangente hyperbolique.) Soit η le segment réel $0 \leqslant x \leqslant q$; le domaine doublement connexe D de contours Γ ($|\,z\,| = 1$) et η a un module $\mu = \nu(q) = 1/8\nu(e^{-2h})$; $\eta' = f(\eta)$ est un arc de Jordan joignant $p' = 0$ à q' ; en vertu de [9] (III. 1. C), $\mu' = \mu(D') \leqslant 1/8\nu(e^{-2h'}) = \nu(e^{-g'})$. Le théorème $2'$ dit que $\mu' \geqslant \mu/D$, d'où la moitié des inégalités (5) ; les autres s'obtiennent en permutant les rôles de z et z'. c. q. f. d.

Les évaluations (5) sont *les meilleures possibles*, car les inégalités pour les modules μ, μ' le sont, ce qui permet de construire une transformation extrémale (η' sera alors le segment réel $0 \leqslant x' \leqslant q'$). — *Elles restent valables pour des domaines multiplement connexes* (h étant définie à l'aide de la surface universelle de recouvrement) ; mais elles sont alors très „inexactes“.

Cas limite $g \to \infty$:

$$D^{-1}g-(1-D^{-1}) \ln 4+O(e^{-2g/D}) \leqslant g' \leqslant Dg+(D-1) \ln 4+O(e^{-2Dg}) \tag{5'}$$

Cas limite $h \to \infty$

$$D^{-1}h-(1-D^{-1}) \ln 2+O(e^{-4h/D}) \leqslant h' \leqslant Dh+(D-1) \ln 2+O(e^{-4Dh}) \tag{5''}$$

Cas $D = 2$: $\operatorname{Ch} h' \leqslant e^{2h}$; $e^{g'} \geqslant \operatorname{Ch}(g/2)$, $\quad (5''')$

et les inégalités en sens contraire, obtenues en permutant h et h', g et g'. De nouveau : simplification pour $D = 2^n$ (n entier), par itération de (d), § 3.

5.2. En vertu du théorème 1, de (5) et du principe de *Nevanlinna* sur la distance hyperbolique, on a la propriété :

Si $z' = f(z)$ est une fonction *D-pseudo-analytique* dans un domaine

$$G \ni p, q, \quad \nu(e^{-2h'}) \leqslant D\,\nu(e^{-2h}), \text{ soit } \nu(e^{-g'}) \geqslant D^{-1}\,\nu(e^{-g}) . \tag{5^{IV}}$$

Si $D = 2$, ces inégalités deviennent équivalentes à $(5''')$.

5.3. *Généralisation du lemme de Schwarz.*

Soit $w(z)$ une fonction D-pseudo-analytique définie dans $G : |\,z\,| < 1$, telle que $w(0) = 0$ et $|\,w(z)\,| < 1$ dans G. Alors

$$\nu(|\,w(z)\,|) \geqslant D^{-1}\nu(|\,z\,|) \,. \,^{6)} \tag{6}$$

Ou bien, ce qui revient au même,

$$| w(z) | \leqslant f_D^+(| z |) \ , \tag{6'}$$

la fonction $f_D^+(r)$ $(0 \leqslant r < 1)$ étant définie par

$$\nu(f_D^+(r)) = D^{-1}\nu(r) \ . \tag{7}$$

Je définis en même temps la fonction inverse $f_D^-(r)$ par

$$\nu(f_D^-(r)) = D\,\nu(r) \ . \tag{7'}$$

Démonstration par ce qui précède : (6) est une conséquence immédiate de (5^{IV}).

Démonstration n'utilisant pas le principe de Nevanlinna : Soient de nouveau (cf. § 5.1) η le segment rectiligne joignant 0 à z ; D le domaine doublement connexe de contours Γ et η ; $\mu_D = \nu(| z |)$; $w(z) = PF(z)$ (F est D-pseudo-conforme, P est analytique) ; j'applique à P la propriété [9] (I. 3. D. f) : soient Γ_1 le „contour extérieur" de $w(G)$ et η_1 celui de $w(\eta)$; $\mu_{F(D)} \leqslant \mu_{\Gamma_1\eta_1} \leqslant \nu(| w(z) |)$; mais $\mu_{F(D)} \geqslant D^{-1}\mu_D$ (théorème 2'), d'où (6). c. q. f. d.

Remarque. — Si $D = 1$, (6) exprime le *lemme de Schwarz* $| w(z) | \leqslant | z |$, et l'extrémale $(w = e^{i\alpha}z)$ est indépendante de z ; si $D > 1$, (6) reste *exacte, mais l'application extrémale dépend alors de* z.

Cas limite $| z | \to 0$: $\quad | w(z) | \leqslant 4^{1-1/D} | z |^{1/D}(1 + O(| z |^{2/D}))$ (6″)

Cas limite $| z | \to 1$: $\quad 1 - | w(z) | \geqslant 8^{1-D}(1 - | z |)^D + O((1 - | z |)^{2D})$ (6‴)

Cas $D = 2$: $\quad | w(z) | \leqslant 2\sqrt{| z |}/(1 + | z |)$ (6^{IV})

Cas $D = 4$: $\quad | w(z) | \leqslant 2^{3/2}\sqrt{1 + | z |}\,\sqrt[4]{| z |}/(1 + \sqrt{| z |})^2$ (6^{V})

6. Généralisation du théorème de Schottky

6.1. Soit $\{w(z)\}$ la classe des fonctions *D-pseudo-analytiques* dans le cercle-unité G, telles que $w(0) = c$ (c donné), et qui ne prennent nulle part dans G les $p \geqslant 3$ valeurs $a_1, \ldots, a_p$. Alors la distance sphérique $\delta_{w(z), a_p}$ du point $w(z)$ et du point a_p possède une borne inférieure

$$d_D[| z |, c ; a_1, \ldots, a_p] > 0 \ .$$

La démonstration est analogue à celle du cas analytique $D = 1$: C'est une conséquence de la quasi-invariance de h_{0zG} par la transformation pseudo-conforme $F(z)$ qui applique G *dans* la surface universelle de recouvrement relative à $a_1, \ldots, a_p$ en sorte que $w = PF$ (§ 5.1).

Supposons connue la borne exacte du théorème classique de Schottky ($D = 1$), c'est-à-dire la fonction $d_1[|z|, c; a_1, \ldots, a_p]$; *je veux alors déterminer* $d_D[\ldots]$. Il est clair que d_1 et d_D sont des fonctions décroissantes de $|z|$. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $w(z)$ du type considéré et telle que $\delta_{w(z_0), a_p} < d_D[|z_0|, \ldots] + \varepsilon$ pour un $z_0 \in G$ donné; $w = PF$ (F étant D-pseudo-conforme, P analytique); appliquons *conformément* $F(G)$ *sur* G par une transformation T telle que $T(F(0)) = 0$. On a alors dans le cercle-unité G deux structures conformes différentes, et l'application TF fait passer de l'une à l'autre; elle est D-pseudo-conforme et satisfait les hypothèses du lemme de Schwarz généralisé (§ 5.3). Donc $|TF(z_0)| \leqslant f_D^+(|z_0|)$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "w"'] \arrow[drr, "F"] & = & TF(G) \\
w(G) & & F(G) \arrow[ll, "P"'] \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd} \tag{8}$$

PT^{-1} est une fonction analytique; $PT^{-1}(0) = PT^{-1}TF(0) = PF(0) = w(0) = c$; on voit que PT^{-1} est du type considéré; donc

$$\begin{aligned} d_D[|z_0|, \ldots] + \varepsilon > \delta_{w(z_0), a_p} = \delta_{PT^{-1}(TF(z_0)), a_p} &\geqslant d_1[|TF(z_0)|, \ldots] \\ &\geqslant d_1[f_D^+(|z_0|), \ldots] \end{aligned}$$

L'inégalité entre les membres extrêmes ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $d_D[|z_0|, c; a_1, \ldots, a_p] \geqslant d_1[f_D^+(|z_0|), c; a_1, \ldots, a_p]$.

Inversement, soit $\psi(z)$ une transformation D-pseudo-conforme de G sur lui-même extrémale du lemme de Schwarz: $\psi(0) = 0$, $|\psi(z_0)| = f_D^+(|z_0|)$ pour un point z_0 particulier. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction analytique φ dans G telle que $\varphi(0) = c$, $\varphi \neq a_1, \ldots, a_p$ et $\delta_{\varphi(\psi(z_0)), a_p} < d_1[f_D^+(|z_0|), \ldots] + \varepsilon$; $w(z) = \varphi(\psi(z))$ est une fonction D-pseudo-analytique du type considéré;

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[d, "w"'] & & \psi(G) = G \arrow[dll, "\varphi"] \\
w(G) & &
\end{tikzcd} \tag{9}$$

donc $d_D[|z_0|, \ldots] < d_1[f_D^+(|z_0|), \ldots] + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $d_D[|z_0|, \ldots] \leqslant d_1[f_D^+(|z_0|), \ldots]$; on obtient ainsi finalement

$$d_D[|z|, c; a_1, \ldots, a_p] = d_1[f_D^+(|z|), c; a_1, \ldots, a_p]\,. \tag{10}$$

Remarque. — Il est tout à fait indifférent, pour notre raisonnement, que δ et d se rapportent à la distance sphérique ou à une autre métrique. — *La méthode de démonstration caractérisée par les schémas* (8) *et* (9) *est adéquate pour généraliser au cas* $D > 1$ *des propriétés connues pour* $D = 1$ (*fonctions analytiques*).

6.2. *Cas particulier* $p = 3$; $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$; $M_D(r, c) = \operatorname{Sup}_{|z| \leqslant r} |w(z)|$, où sont admises à concurrence toutes les fonctions D-pseudo-analytiques $w(z) \in \{w(z)\}$. *W. K. Hayman* [6] a obtenu pour $M_1(r, c)$ les évaluations suivantes :

$$\begin{aligned} & M_1(r, c) \leqslant (\operatorname{Max}[1, |c|]\, e^{\pi})^{(1+r)/(1-r)}; \\ & \text{si } |c| = e^{-\gamma} < 1, \quad \text{alors } M_1(r, c) \leqslant e^{\pi^2/\gamma \cdot (1+r)/(1-r)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Pour les fonctions D-pseudo-analytiques, on obtient des évaluations correspondantes en remplaçant dans (11) $M_1(r, c)$ par $M_D(r, c)$ et, dans les membres de droite, r par $f_D^+(r)$; en vertu de (e), § 3, cela équivaut à *remplacer* $(1 - r)/(1 + r)$ *par* $f_D^-((1 - r)/(1 + r))$. — Le *cas limite* intéressant ici est celui où $r \to 1$: Il faut alors remplacer, dans (11), $(1 + r)/(1 - r)$ par $4^{D-1}(1 + r)^D/(1 - r)^D(1 + O((1 - r)^{2D}))$.

Cas $D = 2$: Il faut remplacer, dans (11),

$$\frac{1+r}{1-r} \text{ par } \left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}\right)^2.$$

Les recettes indiquées ci-dessus permettent aussi de généraliser les évaluations obtenues par *R. M. Robinson* [15] *pour le cas* $p = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ (ce cas se ramène immédiatement au précédent : il suffit de considérer, au lieu de w, la fonction $(w + 1)/2$) : il obtenait

$$8M_1 - 10 < (8|c| + 10)^{(1+r)/(1-r)} \text{ et } 8M_1 + 10 > (8|c| - 10)^{(1+r)/(1-r)};$$

ces deux évaluations lui fournissaient la formule asymptotique

$8M_1 \sim (8|c|)^{(1+r)/(1-r)}$ lorsque $c \to \infty$ ($A \sim B$ signifie : $A = B(1 + o(1))$).

On généralise ces évaluations en posant de nouveau

$M_D(r, \ldots) = M_1(f_D^+(r), \ldots)$, c'est-à-dire que $f_D^-((1 - r)/(1 + r))$ remplace $(1 - r)/(1 + r)$.

7. Généralisation de l'inégalité de Jensen et du théorème de Blaschke

7.1. La *multiplicité* n d'un point a pour une transformation intérieure $z' = f(z)$ est le nombre de tours que décrit z' autour de a' lorsque

z tourne une fois autour de a (dans un voisinage $U(a)$ sans point de ramification différent de a) („degré de l'application"). — Si $f(z)$ est topologique, $n = 1$ en tout point.

Si $f(z)$ est une fonction D-pseudo-analytique, on montre facilement à l'aide de (6″) et du théorème 1 qu'il existe un voisinage de a et une constante $K > 0$ tels que

$$K^{-1} | z - a |^{Dn} \leqslant | z' - a' | \leqslant K | z - a |^{n/D} \tag{12}$$

dans ce voisinage.

7.2. *Inégalité de Jensen. — Soit $w(z)$ une fonction D-pseudo-analytique dans $| z | < 1$, satisfaisant $| w(z) | < 1$, et dont les points a_i (en nombre fini ou dénombrable) sont des zéros de multiplicités n_i. Alors*

$$| w(0) | \leqslant \prod_i [f_D^+ (| a_i |)]^{n_i} , \tag{13}$$

où f_D^+ est définie par (7).

Démonstration. — $w(z) = PF(z)$ (F est D-pseudo-conforme, P analytique) ; je construis encore l'application conforme T en sorte de compléter le schéma (8). $w(z) = PT^{-1}TF(z)$; TF satisfait le lemme de Schwarz généralisé (§ 5.3), donc $| TF(a_i) | \leqslant f_D^+ (| a_i |)$; la fonction analytique PT^{-1} satisfait l'inégalité classique de Jensen ($TF(a_i)$ est un zéro de multiplicité n_i), donc

$$| w(0) | \leqslant \prod_i | TF(a_i) |^{n_i} \leqslant \prod_i [f_D^+ (| a_i |)]^{n_i} .$$

c. q. f. d.

Remarque. — La borne donnée par (13) n'est *pas la meilleure possible* („pas exacte") ; en effet (cf. la remarque au § 5.3), si $D > 1$, la fonction extrémale du lemme de Schwarz généralisé dépend du point z ; aucune fonction TF ne réalise *simultanément* $| TF(a_i) | = f_D^+ (| a_i |)$ pour tous les a_i.

7.3. L'inégalité (13) peut aussi être interprétée sous la forme suivante :

Soit $w(z)$ une fonction D-pseudo-analytique dans $| z | < 1$, telle que $w(0) = 0$ et $| w(z) | < 1$; et soient $a_1, a_2, \ldots$ les points où elle prend la valeur a (avec les multiplicités $n_1, n_2, \ldots$) ; alors

$$| a | \leqslant \prod_i [f_D^+ (| a_i |)]^{n_i} . \tag{14}$$

Démonstration. — (14) s'obtient à partir de (13) par un mouvement hyperbolique (dans le cercle-unité) amenant $w(0)$ à l'origine, et l'origine en a. c. q. f. d.

Cette façon particulièrement élégante de formuler l'inégalité de Jensen est due (pour $D = 1$; alors $|a| \leqslant \prod_i |a_i|^{n_i}$) à *Lehto* ([12], p. 8). Sous cette forme, l'inégalité de Jensen apparaît comme un *renforcement du lemme de Schwarz.*

7.4. Dans le cas limite $|a_i| \to 1$,

$$1 - f_D^+(|a_i|) = 8^{1-D}(1 - |a_i|)^D \; (1 + o(1))$$

(cf. (6‴)), ce qui permet de généraliser au cas $D > 1$, par une formule simple, le *théorème de Blaschke* :

Soient $w(z)$ *une fonction D-pseudo-analytique bornée dans* $|z| < 1$ *et* $a_1, a_2, a_3, \dots.$ *ses zéros* (*de multiplicités* $n_1, n_2, n_3, \dots$). *Alors la somme* $\sum_{i=1}^{\infty} n_i(1 - |a_i|)^D$ *converge.*[6])

Démonstration. — $w(z) = PT^{-1}TF(z)$ comme au § 7.2. En vertu du théorème classique de Blaschke (conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen), appliqué à la fonction analytique (*non constante*) PT^{-1}, le produit $\prod_i |TF(a_i)|^{n_i}$ converge (>0), c'est-à-dire $\sum_i n_i(1 - |TF(a_i)|)$ converge, donc *a fortiori* $\sum_i n_i(1 - |a_i|)^D$. c. q. f. d.

8. Généralisation du théorème de Phragmén-Lindelöf

8.1. *Forme générale* (cf. [8], [9] (III. 3. C)).

J'appelle *coupure* d'un domaine un arc de Jordan à extrémités sur la frontière. — Soient G un domaine de Jordan (de frontière Γ), qu'une coupure θ_0 partage en deux domaines G_0 et G_0' ; p un point de G_0 ; $\{\theta_\lambda\}$ ($0 < \lambda < \infty$, λ = paramètre continu ou discret) des coupures emboîtées intérieures à G_0' (θ_λ sépare p de tous les $\theta_{\lambda'}$, où $\lambda' > \lambda$) telles que $\mu_{0\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} \to \infty$ quand $\lambda \to \infty$. Les θ_λ convergent vers un point E de Γ.

Soit $w(z)$ une fonction *D-pseudo-analytique* dans G, telle que $\limsup_{z\to\zeta} |w(z)| \leqslant 1$ pour chaque $\zeta \in \Gamma - E$. Je pose $M_\lambda = \operatorname{Max}_{z\in\theta_\lambda} |w(z)|$,

$$\sigma_\varkappa^{(D)} = \liminf_{\lambda\to\infty}(e^{-\pi\mu_{\varkappa\lambda}/D} \ln M_\lambda) \quad \text{et} \quad \tau_\varkappa^{(D)} = \liminf_{\lambda\to\infty}(e^{-D\pi\mu_{\varkappa\lambda}} \ln M_\lambda). \quad (15)$$

Si $\liminf_{\lambda\to\infty} M_\lambda \geqslant 1$, *alors* $\ln|w(p)| \leqslant (8/\pi)\sigma_0^{(D)} e^{-(2\pi/D)\nu(\sin(\pi\omega_{p\theta_0}/2))}$. (16)

Démonstration. — $w = PF$ (F est D-pseudo-conforme, P analytique). J'écris ω_λ pour $\omega_{p\theta_\lambda G_\lambda}$, ω_λ^F pour $\omega_{F(p),F(\theta_\lambda),F(G_\lambda)}$, et $\mu_{\varkappa\lambda}^F$ pour $\mu_{F(\theta_\varkappa),F(\theta_\lambda)}$. L'évaluation ([9], formule (III. 8) ; soit [8] (6)) est valable pour la fonction $u(t) = \ln | P(t) |$, sous-harmonique dans $F(G)$; donc

$$\ln | w(p) | = \ln | PF(p) | \leqslant (8/\pi) \liminf_{\lambda\to\infty} (e^{-\pi\mu^F_{0\lambda}} \ln M_\lambda) \cdot e^{-2\pi\nu(\sin\pi\omega^F_0/2)} ;$$

comme $\mu^F_{0\lambda} \geqslant \mu_{0\lambda}/D$ et, selon (4), $\nu(\sin\pi\omega^F_0/2) \geqslant (1/D)\,\nu(\sin\pi\omega_0/2)$, on en déduit (16). c. q. f. d.

Comme le montre [9] (I. 3. C), $\mu_{0\lambda} = \mu_{\varkappa\lambda} + O(1)$ lorsque $\lambda \to \infty$ $\varkappa$ restant fixe ; donc les $\sigma^{(D)}_\varkappa$ sont soit tous nuls, soit tous différents de zéro. $\sigma^{(D)}_0 = 0$ entraîne $\sigma^{(D)}_\varkappa = 0$ pour tous les $\varkappa$, donc, en vertu de (16) (où l'on peut remplacer l'indice 0 par $\varkappa$) $\ln | w(z) | \leqslant 0$ dans $\bigcup_\varkappa G_\varkappa = G$.

Théorème. — *Si* $\sigma^{(D)}_0 \leqslant 0$, *alors* $| w(z) | \leqslant 1$ *dans tout* G.

Une transformation intérieure conservant les ensembles ouverts, le principe du maximum est valable ici : le théorème est banal dans le cas $\sigma^{(D)}_0 < 0$.

Théorème. — *Pour tout* $\varkappa$, $\tau^{(D)}_\varkappa > -\infty$.

Démonstration. — Supposons $\liminf_{\lambda\to\infty} M_\lambda < 1$ (sinon le théorème est trivial). $w(z) = PF(z)$ comme plus haut. Le théorème 2 de [9] (III. 3. C), appliqué à la fonction sous-harmonique $u(t) = \ln | P(t) |$ dans $F(G)$, montre que

$$-\infty < \liminf_{\lambda\to\infty} (e^{-\pi\mu^F_{\varkappa\lambda}} \ln M_\lambda) \leqslant \liminf_{\lambda\to\infty} (e^{-D\pi\mu_{\varkappa\lambda}} \ln M_\lambda) = \tau^{(D)}_\varkappa.$$

c. q. f. d.

Dans les applications (cf. par exemple [9] (III. 3. A)), on ne connaît souvent pour $\mu_{\varkappa\lambda}$ qu'une évaluation par défaut ; le second théorème est alors inutilisable.

8.2. *Pour un domaine angulaire* : $0 < \arg z < \alpha$; θ_R = arc du cercle $| z | = R$; G_R = secteur de $| z | < R$.

Soit $w(z)$ une fonction D-pseudo-analytique dans ce domaine angulaire G, telle que $\limsup_{z\to\zeta} | w(z) | \leqslant 1$ pour $\zeta = 0$ et pour $\arg \zeta = 0$ ou α. Soit M_R le maximum de $| w(z) |$ sur l'arc θ_R.

$$\sigma^{(D)}_1 = \liminf_{R\to\infty} (R^{-\pi/D\alpha} \ln M_R) ; \quad \tau^{(D)}_1 = \liminf_{R\to\infty} (R^{-D\pi/\alpha} \ln M_R). \quad (15')$$

On a de nouveau les deux théorèmes ci-dessus ; le calcul direct à partir de (4) donne plus précisément ceci : *Supposons* $\arg p = \alpha/2$; alors $\omega_R = \omega_{p\theta_R G_R} \sim (4/\pi)(| p |/R)^{\pi/\alpha}$ lorsque $R \to \infty$; $w = PF$; en vertu de (4′), $(2^{3-D}/\pi)(| p |/R)^{D\pi/\alpha} \lesssim \omega^F_R \lesssim (2^{3-1/D}/\pi)(| p |/R)^{\pi/D\alpha}$. Je considère de nouveau dans $F(G_R)$ la fonction sous-harmonique $u(t) =$

$\ln |P(t)|$ $(t = F(z))$. En vertu du principe de la majorante harmonique :

Si $\liminf_{R\to\infty} M_R \geqslant 1$, $\ln |w(p)| \leqslant (2^{3-1/D}/\pi)\, \sigma_1^{(D)}\, |p|^{\pi/D\alpha}$. (17)

Si $\liminf_{R\to\infty} M_R \leqslant 1$, $\ln |w(p)| \leqslant (2^{3-D}/\pi)\, \tau_1^{(D)}\, |p|^{D\pi/\alpha}$. (18)

(17) est valable *a fortiori* si $\arg p \neq \alpha/2$; (18) n'est valable que si $\arg p = \alpha/2$. — (On remarquera que l'on n'a *pas* fait l'hypothèse $|p| \leqslant 1$.)

9. Fonctions pseudo-analytiques à dérivées partielles continues et transformations quasi-conformes. Variation de la longueur extrémale

9.1. J'appellerai *transformation D-quasi-conforme* une application topologique douée de dérivées partielles continues et satisfaisant à la condition

D') En tout point p, le *quotient des dilatations*

$$Q(p) = |\partial w/\partial z|_{\max}/|\partial w/\partial z|_{\min} \quad \text{reste} \leqslant D \quad (D \geqslant 1) .$$

On peut aussi dire que l'image d'un cercle infinitésimal est une ellipse infinitésimale dont le rapport a/b des axes est borné supérieurement par une constante $D \geqslant 1$. (Cf. *Grötzsch* [3] [4].)

9.2. Soit ϱ une répartition (fonction réelle non-négative) dans un domaine G ; elle fait correspondre à toute courbe c dans G le nombre $C_\varrho(c) = \underline{\int}_c \varrho\, ds$; nous posons encore $A_\varrho = A_\varrho(G) = \overline{\int\int}_G \varrho^2 d\tau$. [7])

J'appelle *famille numérique* de courbes dans G une loi C faisant correspondre à toute courbe $c \subset G$ un nombre réel $C(c) \geqslant 0$. *Le module de C est défini par $M(C) = \inf_\varrho A_\varrho$, où l'on admet à concurrence toutes les répartitions ϱ telles que $C_\varrho \geqslant C$* (cf. [9], Appendice du Chap. I). — Si la loi C n'attribue que les valeurs 0 ou 1, elle désigne simplement une famille (ordinaire) de courbes $\{c\}$, et $M(C) = M\{c\} = L_{\{c\}}^{-1}$, où $L_{\{c\}}$ est la *longueur extrémale* de la famille $\{c\}$ (c'est essentiellement la définition d'*Ahlfors* et *Beurling* [1]).

9.3. **Théorème 3.** — *Soit $z' = f(z)$ une transformation D-quasi-conforme d'un domaine G sur un autre G' ; soient C une famille numérique dans G et C' son image : $C'(f(c)) = C(c)$. Alors*

$$D^{-1}M(C) \leqslant M(C') \leqslant DM(C) . \tag{19}$$

---

[7]) $\bar{\int}$ est l'intégrale supérieure, $\underline{\int}$ l'intégrale inférieure de Darboux.

Démonstration. — Soit $\varrho(z)$ une répartition concurrente pour $M(C)$, c'est-à-dire $C_\varrho(c) \geqslant C(c)$ pour toute courbe c; la répartition $\varrho'(z') = \varrho(z) \mid \partial z/\partial z' \mid_{\max}$ est alors concurrente pour $M(C')$, car

$$C_{\varrho'}(c') \geqslant C_\varrho(c) \geqslant C(c) = C'(c')$$

pour toute courbe $c' = f(c)$. En outre $A_{\varrho'}(G') \leqslant D \cdot A_\varrho(G)$, car

$$\mid \partial z/\partial z' \mid^2_{\max} \leqslant D \mid \partial z/\partial z' \mid_{\max} \mid \partial z/\partial z' \mid_{\min} = D \cdot d\tau/d\tau' \ .$$

Donc $C_\varrho \geqslant C$ entraîne $A_\varrho \geqslant D^{-1}M(C')$, d'où $M(C) \geqslant D^{-1}M(C')$. — On montrerait de même $M(C') \geqslant D^{-1}M(C)$, d'où (19). c. q. f. d. [8])

9.4. *Corollaire. — Toute transformation D-pseudo-conforme à dérivées partielles continues est D-quasi-conforme, et réciproquement.*

Démonstration. — a) Soit $w(z)$ une transformation D-quasi-conforme; il suffit d'appliquer le théorème 3 au problème de longueur extrémale définissant un module d'un quadrilatère ([9] (I. 3. a)), on voit ainsi que D') entraîne D) (§ 1.2). — b) Soit maintenant $w(z)$ une transformation D-pseudo-conforme à dérivées partielles continues; soit p un point quelconque; choisissons pour Q un carré infinitésimal dont p est un sommet, et dont les côtés ont les directions de la plus grande et de la plus petite dilatation; son image est (si l'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur) un rectangle de module $Q(p) \leqslant D$; la condition D') est donc bien satisfaite. c. q. f. d.

On montre de même: *Sous l'hypothèse de la continuité des dérivées partielles,* toute fonction D-pseudo-analytique est une transformation intérieure satisfaisant D'), et réciproquement. (Utiliser le corollaire 2.1.)

9.5. **Théorème 4.** — *Soient C une famille numérique dans un domaine G; $z' = f(z)$ une fonction D-pseudo-analytique à dérivées partielles continues, définie dans G; et C' la famille numérique définie dans $G' = f(G)$ par $C'(c') = \mathrm{Max}_{f(c)=c'} C(c)$. Alors*

$$M(C') \leqslant DM(C) \ . \tag{20}$$

Démonstration. — 1°) Il suffit de modifier légèrement la démonstration de [11] ou [9] (Appendice Chap. I, C. i): définir

$$\varrho'(z') = \mathrm{Max}_i [\varrho(z_i) \mid \partial z_i/\partial z' \mid_{\max}] \ ,$$

etc.; 2°) On peut aussi écrire $f(z) = PF(z)$ (F étant D-pseudo-conforme, P analytique); en vertu de [11] ou [9] et du théorème 3,

$$M(C') \leqslant M(F(C)) \leqslant DM(C) \ .$$

c. q. f. d. [8])

On peut préciser l'inégalité (20), en vertu de [9] (Appendice Chap. I, C. j) : *on a encore*

$$M(C^*) \leqslant DM(C) \tag{20'}$$

pour la famille numérique C^* définie par $C^*(c') = \sqrt{\sum\limits_{f(c)=c'} [C(c)]^2}$.

9.6. Les théorèmes 3 et 4 permettent de retrouver immédiatement, à partir des formules (II. 12) et (II. 13) de [9] (mettant en rapport longueurs extrémales d'une part, mesure harmonique et distance hyperbolique d'autre part), les évaluations exactes (4), (4'''), (5), (5^{IV}), pour les cas où $z' = f(z)$ est une transformation quasi-conforme ou une fonction pseudo-analytique à dérivées partielles continues. [9])

10. Transformations intérieures à dérivées partielles continues: Variation de la longueur extrémale et lemme de Schwarz

10.1. Soient $z' = f(z)$ une *transformation topologique à dérivées partielles continues* dans un domaine G ; $Q(z)$ son quotient des dilatations (§ 9.1) ; C une famille numérique et C' son image.

Soit $\varrho(z)$ une répartition concurrente pour $M(C)$;

$$\varrho'(z') = \varrho(z) \mid \partial z/\partial z' \mid_{\max}$$

est alors concurrente pour $M(C')$; $\mid \partial z/\partial z' \mid^2_{\max} \leqslant Q(z)\cdot d\tau/d\tau'$; donc $M(C') \leqslant \overline{\iint}_{G'} \varrho'^2(z')\, d\tau' \leqslant \overline{\iint}_G Q(z)\, \varrho^2(z)\, d\tau$. [8])

Théorème 5. — *Si* $\varrho(z)$ *est concurrente pour* $M(C)$, *alors*

$$M(C') \leqslant \overline{\iint}_G Q(z)\, \varrho^2(z)\, d\tau \ . \text{ [10])} \tag{21}$$

En particulier, si le problème variationnel définissant $M(C)$ admet une *répartition extrémale* ϱ_0, $M(C) = \overline{\iint}_G \varrho_0^2(z) d\tau$, d'où[11])

$$M(C') - M(C) \leqslant \overline{\iint}_G [Q(z) - 1]\, \varrho_0^2(z) d\tau \ . \text{ [10])} \tag{21'}$$

---

[8]) La *continuité* des dérivées partielles n'est pas essentielle à la démonstration; il faut seulement que $\mid \partial z/\partial z' \mid^2_{\max} \leq D \cdot d\tau/d\tau'$. En outre, on peut admettre des points isolés où les dérivées partielles n'existent même pas (cf. *Teichmüller* [17], p. 666—667).

[9]) Il se peut que (19) soit valable pour toutes les transformations D-pseudo-conformes, et (20) pour toutes les fonctions D-pseudo-analytiques. Je n'ai pu l'établir que dans les cas se ramenant au module d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe (théorèmes 2 et 2' du § 2).

[10]) Ce résultat a été brièvement annoncé dans la Note [7].

[11]) Car, si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, $\overline{\iint} (f + g) d\tau \leq \overline{\iint} f d\tau + \overline{\iint} g d\tau$.

Cette inégalité est particulièrement utile si $Q(z)$ n'est différent de 1 *que dans une partie de G* (par exemple dans le *voisinage d'un point*). — La borne donnée par (21') n'est pas en général „exacte". [12])

Dans le cas particulier où G est un domaine doublement connexe, (21') devient équivalente à un théorème récent de *G. af Hällström* ([5], p. 5); voir aussi *Teichmüller* [17], p. 668.

10.2. *Les inégalités* (21) *et* (21') *restent valables si* $z' = f(z)$ *est une transformation intérieure à dérivées partielles continues, la famille numérique C' étant définie par* $C'(c') = \mathrm{Max}_{f(c)=c'} C(c)$; *on a même le droit d'y remplacer C' par C^*, définie par* $C^*(c') = \sqrt{\sum_{f(c)=c'} [C(c)]^2}$. — On le démontre (comme au § 9.5) à l'aide de [9] (Appendice Chap. I, C. i et j).

(21) et (21') restent encore valables si l'on y remplace $Q(z)$ par toute *fonction majorante connue* $D(z) \geqslant Q(z)$; elles prennent alors la place de (19) et (20) : elles donnent une précision bien meilleure (si $D(z)$ est une „bonne" majorante), et restent applicables si $Q(z)$ n'est pas borné dans G.

10.3. *Généralisation du lemme de Schwarz.*

10.3.1. *Transformation topologique à dérivées partielles continues* $z' = f(z)$ du cercle-unité G sur lui-même, telle que $f(0) = 0$.

Soit Γ la frontière $|z| = 1$ de G. Désignons dans G les points 0 et r $(0 < r < 1)$. Considérons la famille $\{c\}$ des courbes fermées de Jordan séparant 0 et r de Γ, et la famille $\{\gamma\}$ des coupures séparant 0 de r. Nous avons alors (cf. [9], Chap. II, § 3) $M\{c\} = \nu(r)$, $M\{\gamma\} = [4\,\nu(r)]^{-1}$; $\{f(c)\} = \{c'\}$, $\{f(\gamma)\} = \{\gamma'\}$; $M\{c'\} = \nu(|f(r)|)$, $M\{\gamma'\} = [4\,\nu(|f(r)|)]^{-1}$.

Pour déterminer les répartitions extrémales ϱ_{0c} et $\varrho_{0\gamma}$ pour $M\{c\}$ et pour $M\{\gamma\}$, il suffit d'appliquer conformément le quadrilatère (défini par le demi-plan inférieur et les points-frontière ∞, $1/r$, r, 0) sur le rectangle $(0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2)$ (ω_1 réel > 0, $\omega_2 = i\,|\,\omega_2\,|$) par l'intégrale elliptique $w(z) = \int_\infty^z dz/\sqrt{z(z-r)(z-1/r)}$;

$$\omega_1 = w(1/r) = 2\sqrt{r}K(r) \quad \text{et} \quad |\,\omega_2\,| = 2\sqrt{r}K'(r)$$

(cf. § 3 et [9] (II. 1. B)). On obtient

$$\varrho_{0c} = \frac{1}{2\omega_1}\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1}{4K(r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z| \cdot |z-r| \cdot |1-rz|}}$$

---

[12]) Exemple: G = rectangle de côtés 1 et 3; $Q = 1$ dans un carré de côté 1, $Q = 2$ ailleurs; G' = rectangle de côtés 1 et 2.

et

$$\varrho_{0\gamma} = \frac{1}{|\omega_2|}\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1}{2K'(r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z| \cdot |z-r| \cdot |1-rz|}} .$$

Si, au lieu du point réel r, on a z_0 ($|z_0| < 1$), il faut remplacer $K(r)$ par $K(|z_0|)$, $K'(r)$ par $K'(|z_0|)$, $|z-r|$ par $|z-z_0|$, et $|1-rz|$ par $|1-\bar{z}_0 z|$. L'inégalité (21') fournit donc les deux évaluations :

$$\nu(|z_0'|) - \nu(|z_0|) \leqslant \frac{1}{16K^2(|z_0|)} \iint\limits_{|z|<1} \frac{Q(z)-1}{|z|\cdot|z-z_0|\cdot|1-\bar{z}_0 z|}\, d\tau \; ; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\nu(|z_0'|)} - \frac{1}{\nu(|z_0|)} \leqslant \frac{1}{K'^2(|z_0|)} \iint\limits_{|z|<1} \frac{Q(z)-1}{|z|\cdot|z-z_0|\cdot|1-\bar{z}_0 z|}\, d\tau \, . \quad (23)$$

10.3.2. *Transformation intérieure à dérivées partielles continues* $z' = f(z)$ dans le cercle-unité, telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$.

Tout comme au § 1.3, on voit que $f(z) = PF(z)$, où $F(z)$ est topologique à dérivées partielles continues, et de quotient des dilatations $= Q(z)$ en tout point ordinaire z (les points de ramification sont isolés, cf. [8]), et P est analytique ; on peut choisir $F(z)$ du type considéré ci-dessus (§ 10.3.1) : comme P obéit alors au lemme classique de Schwarz, $|z_0'| \leqslant |F(z_0)|$.

L'inégalité (23) *reste donc valable : c'est la généralisation cherchée du lemme de Schwarz.*

(23) se réduit à (6) (§ 5.3) lorsqu'on sait seulement de $Q(z)$ qu'il est borné par une constante $D \geqslant 1$.

Ce travail est fortement imprégné d'idées du Prof. A. Pfluger, auquel j'exprime ma vive reconnaissance.

Note complémentaire. Après la correction des épreuves, je constate que deux *idées* importantes des paragraphes 4 et 5 se trouvent déjà dans le travail de *H. Grötzsch : Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 84, 1932, p. 114—120.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *L. Ahlfors et A. Beurling:* Conformal invariants and function theoretic null-sets. Acta Math. **83**, 1950, p. 101–129.

[2] *R. Caccioppoli:* Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti classe sci. fis.-mat.-nat., serie 8, vol. **13**, 1952, p. 197–204.

[3] *H. Grötzsch:* Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. **80**, 1928, p. 503–507.

[4] *H. Grötzsch:* Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. **82**, 1930, p. 69–80.

[5] *G. af Hällström:* Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendungen auf die Wertverteilungslehre. Acta Acad. Abo., Math.-Phys. **18**.8, 1952, p. 3–16.

[6] *W. K. Hayman:* Some remarks on Schottky's theorem. Proc. Cambridge Phil. Soc. **43**, 1947, p. 442–454.

[7] *J. Hersch:* Longueurs extrémales, mesure harmonique et distance hyperbolique. C. R. Acad. Sci. Paris **235**, 1952, p. 569–571.

[8] *J. Hersch:* Sur une forme générale du théorème de Phragmén-Lindelöf. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 1953, p. 641–643.

[9] *J. Hersch:* Longueurs extrémales et théorie des fonctions. Comment. Math. Helv. **29**, 1955, fasc. 4.

[10] *J. Hersch et A. Pfluger:* Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1952, p. 43–45.

[11] *J. Hersch et A. Pfluger:* Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 1953, p. 1205–1207.

[12] *O. Lehto:* A majorant principle in the theory of functions. Math. Scand. **1**, 1953, p. 1–17.

[13] *A. Pfluger:* Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 1950, p. 1022–1023.

[14] *A. Pfluger:* Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität. Ann. Inst. Fourier II, 1950, p. 69–80.

[15] *R. M. Robinson:* On numerical bounds in Schottky's theorem. Bull. Amer. Math. Soc. **45**, No 12, 1939, p. 907–910.

[16] *S. Stoïlow:* Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris 1938.

[17] *O. Teichmüller:* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. **3**, 1938, p. 621–678.

(Reçu le 19 mai 1954)