Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen

von ALBERT PFLUGER, Zürich

1. Einleitung

Eine fundamentale Aufgabe zur Konstruktion Abelscher Integrale auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche R ist die folgende: *Zu einer orientierten nicht zerlegenden Jordankurve Γ auf R ist eine im Gebiet $R - \Gamma$ eindeutige harmonische Funktion u gesucht, die auf R unbegrenzt harmonisch fortgesetzt werden kann und dabei längs jeden geschlossenen Weges Γ' die Periode 1 hat, der in $R - \Gamma$ das linke mit dem rechten Ufer von Γ verbindet.* Die Existenz einer solchen Funktion u kann etwa mit der *Ahlfors*schen Formulierung des Dirichletschen Prinzips [1] bewiesen werden, indem man zeigt, daß unter den eindeutigen exakten Differentialen ω auf R mit $\int_{\Gamma'} \omega = \Gamma \times \Gamma'$ (d. i. die Schnittzahl von Γ mit Γ') genau eines mit minimaler Norm existiert; dieses ist harmonisch und sein Integral die gesuchte Funktion u. Diese Methode ist nicht konstruktiv. Der klassische Weg führt über Elementarintegrale dritter Gattung χ_{ab} mit den logarithmischen Singularitäten und Residuen $+1$ und -1 in den «benachbarten» Punkten a und b. Ihre Superposition entlang einer Punktreihe $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = a_1$ längs Γ, d. i. $\sum_{i=1}^{i=n} \chi_{a_i a_{i+1}}$ liefert die gewünschte Funktion u. Diese Methode ist nicht direkt.

Nun hat *H. A. Schwarz* [2], nachdem er sein alternierendes Verfahren zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems entwickelt und vielseitig angewendet hatte, auch zur direkten Konstruktion der obgenannten Funktion u ein alternierendes Verfahren vorgeschlagen, bei dessen Konvergenzbeweis er aber dann auf Schwierigkeiten gestoßen ist und sich durch Heranziehung von berandeten kompakten Flächen auf andere Weise behelfen mußte. Das Problem einer direkten Konstruktion der Potentiale erster Gattung durch Verwendung eines alternierenden Verfahrens ist erst durch Herrn *A. Steiner* [3] erfolgreich behandelt worden. Er hat die Schwierigkeit dadurch überwunden, daß er das Verfahren von Schwarz zunächst so modifizierte, daß die Konvergenz sichergestellt werden konnte. Diese Modifikation bedingte aber das Auftreten einer additiven Konstanten, von der dann noch bewiesen werden mußte, daß sie verschwindet.

Angeregt durch diese Arbeit von Herrn Steiner werde ich im folgenden unter Verwendung des Kalküls mit der Dirichletschen Bilinearform

$$D_F(u,\, v) = \iint_F (u_x v_x + u_y v_y)\, dx dy \tag{1.1}$$

zeigen, daß das ursprüngliche, von H. A. Schwarz in natürlicher Weise angesetzte Verfahren in bezug auf die durch (1.1) definierte Metrik konvergiert. Ausschlaggebend ist die bekannte Tatsache, daß die auf F eindeutigen harmonischen Funktionen mit endlichem Dirichletintegral in bezug auf das Skalarprodukt (1.1) einen Hilbertraum bilden, wenn Funktionen, die sich nur um eine Konstante unterscheiden, als äquivalent betrachtet werden[1]). Die Methode läßt sich verwenden, um direkt, ohne eine kanonische Homologiebasis heranzuziehen, zu jedem singularitätenfreien exakten Differential auf R ein dazu kohomologes harmonisches Differential zu konstruieren. Sie gibt also in diesem Falle eine konstruktive Variante zum Dirichletschen Prinzip. Zum Schluß wird noch gezeigt, daß dieselbe Methode auch einen Konvergenzbeweis für das sogenannte Neumannsche alternierende Verfahren liefert. Sie kann auch auf offenen Flächen verwendet werden.

2. Das Schwarzsche Verfahren

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, setzen wir voraus, daß Γ analytisch sei. Wir bezeichnen Γ mit Γ_0 und wählen einen zweiten einfach geschlossenen analytischen Weg Γ_1, so daß $\Gamma_1 - \Gamma_0$ auf R genau zwei Teilgebiete berandet. Das im positiven Sinne umlaufene Gebiet bezeichnen wir mit R_0, das andere mit R_1. Wird R längs einem $\Gamma_i (i = 0, 1)$ aufgeschnitten, so entsteht eine berandete Fläche F_i mit den beiden Randkomponenten (rechtes und linkes Schnittufer) Γ_i^+ und Γ_i^- $(i = 0, 1)$.

Nun konstruiert *Schwarz* eine Doppelfolge von harmonischen Funktionen $u_n^{(i)} (i = 0, 1;\; n = 0, 1, 2, \ldots)$. Die $u_n^{(i)}$ sind auf F_i harmonisch und alternierend durch folgende Randbedingungen festgelegt:

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= \begin{cases} u_n^{(0)} + 1 & \text{auf } \Gamma_1^+ \\ u_n^{(0)} & \text{auf } \Gamma_1^- \end{cases} \\ u_{n+1}^{(0)} &= \begin{cases} u_n^{(1)} & \text{auf } \Gamma_0^+ \\ u_n^{(1)} - 1 & \text{auf } \Gamma_0^+ \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und $u_0^{(0)} \equiv 0$.

[1]) Vgl. z. B. [4], S. 339–342.

Wenn das Verfahren konvergiert, d. h. die $u_n^{(i)}$ auf F_i lokal gleichmäßig konvergieren, so sind die Grenzfunktionen $u^{(i)}$ auf $F_i (i = 0, 1)$ harmonisch mit $u^{(0)} = u^{(1)}$ auf R_0 und $u^{(0)} + 1 = u^{(1)}$ auf R_1. Damit wäre dann offenbar die Aufgabe gelöst. Es genügt aber, die Konvergenz der Differentiale $du_n^{(i)}$ nachzuweisen. Hiezu setzen wir

$$f_n^{(1)} = \begin{cases} u_n^{(0)} + 1 & \text{auf } R_1 \\ u_n^{(0)} & \text{auf } R_0 \end{cases}$$
$$f_n^{(0)} = \begin{cases} u_{n-1}^{(1)} - 1 & \text{auf } R_1 \\ u_{n-1}^{(1)} & \text{auf } R_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

für $n = 1, 2, \ldots$. Die $f_n^{(i)} - u_n^{(i)}$ sind auf F_i eindeutig, stetig und stückweise stetig differenzierbar und verschwinden auf den beiden Randkomponenten Γ_i^+ und $\Gamma_i^- (i = 0, 1)$. Überdies sind die $u_n^{(i)}$ auch auf dem Rande von F_i harmonisch, da Γ_i analytisch ist. Unter Verwendung der Bilinearform (1.1) folgt aus der Greenschen Formel, angewandt auf F_i,

$$D_{F_i}(u_m^{(i)}, f_n^{(i)} - u_n^{(i)}) = \int_{\Gamma_i^- - \Gamma_i^+} (f_n^{(i)} - u_n^{(i)})\, du^{*(i)}_m = 0 \text{ [2]},$$

oder wegen (2.2)

$$D_R(u_m^{(1)}, u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = 0, \quad D_R(u_m^{(0)}, u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0 \tag{2.3}$$

für $m, n = 1, 2, \ldots$. Diese Relationen (2.3) ergeben die Konvergenz der $du_n^{(i)}$ in folgender Weise.

Zunächst folgt aus (2.3) für $m = n$

$$D(u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = D(u_n^{(0)}) - D(u_n^{(1)}) \tag{2.4}$$

und

$$D(u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = D(u_{n-1}^{(1)}) - D(u_n^{(0)}) . \tag{2.5}$$

Dies liefert die monotone Sequenz

$$\ldots \geqq D(u_n^{(0)}) \geqq D(u_n^{(1)}) \geqq D(u_{n+1}^{(0)}) \geqq \ldots .$$

Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} D(u_n^{(0)}) = \lim_{n \to \infty} D(u_n^{(1)}) = d \tag{2.6}$$

und wegen (2.4) und (2.5)

$$\lim_{n \to \infty} D(u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = \lim_{n \to \infty} D(u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0 . \tag{2.7}$$

[2]) du^* ist das konjugierte Differential zu du.

Das Ziel ist der Beweis von (2.10). Würden neben (2.3) auch die Relationen $D(u_m^{(0)}, u_n^{(1)} - u_n^{(0)}) = 0$ und $D(u_m^{(1)}, u_n^{(0)} - u_{n-1}^{(1)}) = 0$ gelten, so könnte dieser nach bekannten Verfahren sofort erbracht werden. Aber hier ist noch eine weitere Rechnung nötig. Die Relationen (2.3) liefern zusammen mit der Symmetrieeigenschaft $D(u, v) = D(v, u)$ nacheinander $D(u_m^{(0)}, u_n^{(0)}) = D(u_m^{(0)}, u_{n-1}^{(1)}) = D(u_m^{(1)}, u_{n-1}^{(1)})$ und analog $D(u_m^{(1)}, u_n^{(1)}) = D(u_{m+1}^{(0)}, u_n^{(0)})$. Beides zusammen ergibt

$$D(u_m^{(i)}, u_n^{(i)}) = D(u_{m+1}^{(i)}, u_{n-1}^{(i)})$$

und daraus folgt durch Iteration

$$D(u_{m+2p}^{(i)}, u_m^{(i)}) = D(u_{m+p}^{(i)}) \tag{2.8}$$

für $m, p = 1, 2, 3, \ldots; i = 0, 1$.

Daher ist $D(u_{m+2p}^{(i)} - u_m^{(i)}) = D(u_{m+2p}^{(i)}) + D(u_m^{(i)}) - 2D(u_{m+2p}^{(i)}, u_m^{(i)}) = D(u_{m+2p}^{(i)}) + D(u_m^{(i)}) - 2D(u_{m+p}^{(i)})$ und wegen (2.6) für beliebige p

$$\lim_{m\to\infty} D(u_{m+2p}^{(i)} - u_m^{(i)}) = 0 \,. \tag{2.9}$$

Mit der Dreiecksungleichung $\sqrt{D(u+v)} \leqq \sqrt{D(u)} + \sqrt{D(v)}$ folgt daraus zusammen mit (2.7)

$$\lim_{m,n\to\infty} D(u_m^{(i)} - u_n^{(i)}) = 0 \,, \quad i = 0, 1 \,. \tag{2.10}$$

Dies bedeutet, daß die $u_n^{(i)}$ in bezug auf den Distanzbegriff

$$d(u, v) = \sqrt{D(u - v)}$$

eine Cauchy-Folge bilden. Nun sind die $u_n^{(i)}$ wegen der Randbedingungen (2.1) und des analytischen Charakters der Randkurven Γ_i auf $\bar{F}_i$ harmonisch, und deshalb konvergieren die Differentiale $du_n^{(i)}$ auf $\bar{F}_i$ gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential ω_i. Wegen (2.7) ist aber $\omega_0 = \omega_1$ in $F_0 \frown F_1$, d. h. es ist ein einziges auf R harmonisches Differential ω konstruiert worden. Für ein festes $p_0 \in F_0$ konvergiert

$$u_n^{(0)}(p) - u_n^{(0)}(p_0)$$

auf F_0 gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion U mit $dU = \omega$, die beim Übergang von Γ_0^+ zu Γ_0^- den Sprung -1 erfährt: Dieses u hat also die in Nr. 1 geforderten Eigenschaften.

Die Methode ist auch auf beliebige offene Flächen anwendbar, sofern 1.) Γ wiederum die Fläche nicht zerlegt, auch nicht in nichtkompakte

Teile, und 2.) zu den Randbedingungen (2.1) eine zusätzliche Bedingung für den «idealen Rand» gestellt wird. Ist F irgendein in der Riemannschen Fläche R kompaktes Teilgebiet mit dem Rand γ und ist

$$\omega = \omega(p, \gamma, R - \overline{F})$$

das harmonische Maß von γ in bezug auf $R - \overline{F}$, so kann diese Zusatzbedingung so formuliert werden: Für geeignete positive Konstanten K_n soll in einer Umgebung des «idealen Randes»

$$| u_n^{(i)} | < K_n \cdot \omega \tag{2.1'}$$

sein. Dann sind die $u_n^{(i)}$ eindeutig konstruierbar, und man kann zeigen, daß dann auch die Relationen (2.3) gültig sind.

3. Verallgemeinerung

Es sei R wieder eine geschlossene Riemannsche Fläche und $z = x + iy$ irgendein zulässiger lokaler Parameter. Zufolge der konformen Struktur ist jedem (reellen) Differential $\omega = p dx + q dy$ ein konjugiertes Differential $\omega^* = - q dx + p dy$ zugeordnet. ω ist exakt, wenn seine äußere Ableitung $d\omega = (q_x - p_y)\, dx dy$ überall auf R verschwindet. Sind ω und ω^* exakt, so heißt ω harmonisch, d. h. es gibt lokal eine harmonische Funktion h mit $\omega = dh = h_x dx + h_y dy$. ω heißt total, wenn eine eindeutige Funktion f mit $df = \omega$ existiert. Ist $\omega_1 = p_1 dx + q_1 dy$ und $\omega_2 = p_2 dx + q_2 dy$, so wird ihr inneres Produkt (ω_1, ω_2) durch

$$(\omega_1, \omega_2) = \iint_R (p_1 p_2 + q_1 q_2)\, dx dy$$

definiert. Die positive Quadratwurzel aus (ω, ω) ist die Norm $\| \omega \|$ von ω.

Es ist eine fundamentale Tatsache in der Theorie der harmonischen Differentiale auf geschlossenen Flächen, daß zu jedem singularitätenfreien exakten Differential ω_0 auf R ein harmonisches Differential φ existiert, so daß $\varphi - \omega_0$ total ist. Dieses φ kann etwa auf Grund einer kanonischen Homologiebasis aus den Potentialen u der Nr. 1 gewonnen werden. Einen andern, besonders eleganten Zugang liefert das Dirichletsche Prinzip in der *Ahlfors*schen Begründung [1]: Man betrachte die Kohomologieklasse Ω in der ω_0 liegt, d. h. sämtliche singularitätenfreien exakten Differentiale ω, wo $\omega - \omega_0$ total ist. Dann existiert eine

Folge $\{\omega_n\}$ aus Ω mit $\|\omega_n\| \to \operatorname*{Inf}_{\omega \in \Omega} \|\omega\|$ und man zeigt, daß diese Minimalfolge stark gegen ein harmonisches Differential φ konvergiert und $\varphi \in \Omega$ ist. Unsere Methode (Nr. 2) kann so modifiziert werden, daß sie eine direkte Konstruktion einer solchen Minimalfolge liefert. Wir setzen voraus, daß ω_0 stetig differenzierbar und exakt sei und bezeichnen mit Ω die Klasse der Differentiale ω von der Form $\omega = \omega_0 + df$, wo f eine stetige Funktion ist und stückweise glatt in folgendem Sinne: Abgesehen von der Vereinigungsmenge A endlichvieler analytischer Kurvenbogen, also auf der offenen Menge $R - A$ ist f stetig differenzierbar und das über $R - A$ erstreckte Dirichletintegral endlich.

Unter Parameterzelle verstehen wir eine Umgebung V und eine zugehörige konforme Abbildung α, die in einer umfassenderen Umgebung, welche $\overline{V}$ (abgeschlossene Hülle von V) enthält, noch definiert ist und V in den Parameterkreis $K = \{z \,|\, |z| < 1\}$ überführt. Da R kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit Parameterzellen, die wir für das Folgende festgewählt und numeriert mit $V_i, i = 0, 1, 2, \ldots, k$ bezeichnen. Wir definieren für jede Parameterzelle V_i einen linearen Operator Φ_i: Zu $\omega \in \Omega$ gibt es in $\overline{V}_i$ eine stetige Funktion f_i mit $df_i = \omega$ in V_i. Da f_i auf dem Rande von V_i stetig ist, kann man die zugehörige erste Randwertaufgabe lösen, d. h. jene in V_i harmonische und auf $\overline{V}_i$ noch stetige Funktion F_i konstruieren, die auf dem Rande von V_i mit f_i übereinstimmt.

Wir setzen

$$\Phi_i \omega = \begin{cases} \omega & \text{in} \quad R - \overline{V}_i \\ dF_i & \text{in} \quad V_i \end{cases} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, k\,.$$

$\Phi_i \omega$ ist durch ω und den Index i eindeutig bestimmt und es gehört auch $\Phi_i \omega$ zur Klasse Ω. Es gilt der

Hilfssatz: *Für jedes exakte Differential φ mit endlicher Norm, das in V_i harmonisch ist, gilt*

$$(\varphi, \omega - \Phi_i \omega) = 0\,. \tag{3.1}$$

Beweis: Da $\omega = \Phi_i \omega$ ist in $R - V_i$, so bedeutet die Gleichung (3.1), daß bei Beschränkung auf V_i und Verpflanzung in den Parameterkreis K_i $(\varphi, \omega - \Phi_i \omega)_{V_i} = (\varphi, \omega - \Phi_i \omega)_{K_i} = 0$ ist. Nun gilt $\omega = df_i$, $\Phi_i \omega = dF_i$ und F_i löst für den Kreis K_i in bezug auf die Randwerte von f_i das Dirichletsche Randwertproblem. Es ist also $D(F_i) \leqq D(f_i) < \infty$. Ferner sieht man leicht, daß es eine Folge von stetigen und stückweise glatten

Funktionen g_n gibt, die im Kreisring $\{ z_i \mid 1 - {}^1/_n < | z_i | < 1 \}$ verschwinden und der Bedingung $\lim_{n \to \infty} D(g_n - f_i - F_i) = 0$ genügen. Offenbar ist $(\varphi, dg_n) = 0$, woraus sich durch Grenzübergang dann die gewünschte Gleichung ergibt.

Das angekündigte Konstruktionsverfahren verläuft nun folgendermaßen. Ausgehend von dem gegebenen Differential ω_0 wird eine Folge von Differentialen ω_n aus Ω gebildet, wo jedes aus dem Vorangehenden durch Anwenden des Operators Φ_i hervorgeht, und der Index i ständig die Zahlenreihe $0, 1, 2, \ldots, k$ hin und her durchläuft. Wir setzen also $\Phi_1 \omega_0 = \omega_1$, $\Phi_2 \omega_1 = \omega_2, \ldots$, $\Phi_k \omega_{k-1} = \omega_k$, $\Phi_{k-1} \omega_k = \omega_{k+1}$, $\Phi_{k-2} \omega_{k+1} = \omega_{k+2}, \ldots$, $\Phi_1 \omega_{2k-2} = \omega_{2k-1}$, $\Phi_0 \omega_{2k-1} = \omega_{2k}$, usw., d. h.

$$\Phi_i \omega_{2k\nu+i-1} = \omega_{2k\nu+i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k$$

und

$$\Phi_i \omega_{2k(\nu+1)-i-1} = \omega_{2k(\nu+1)-i}, \quad i = k-1, k-2, \ldots, 2, 1 \; .$$

Gemäß (3.1) ist daher $(\varphi, \omega_n - \omega_{n-1}) = 0$ für jedes exakte φ endlicher Norm, das in V_i harmonisch ist, und $n = 2k\nu \pm i$ mit $\nu = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Nun ist ω_m mit $m = 2k\mu \pm i$ in V_i harmonisch und somit

$$(\omega_m, \omega_n - \omega_{n-1}) = 0 \quad \text{für} \quad m \equiv \pm n \pmod{2k} \; . \tag{3.2}$$

Daraus folgt zunächst mit $m = n$

$$\| \omega_n - \omega_{n-1} \|^2 = \| \omega_{n-1} \|^2 - \| \omega_n \|^2 \; .$$

Es sind also die Normen $\| \omega_n \|$ monoton abnehmend, es existiert

$$\lim_{n \to \infty} \| \omega_n \| = d \tag{3.3}$$

und es ist

$$\lim_{n \to \infty} \| \omega_n - \omega_{n-1} \| = 0 \; . \tag{3.4}$$

Weiter folgt aus (3.2) $(\omega_m, \omega_n) = (\omega_{m+1}, \omega_{n-1})$ für $m \equiv -n \pmod{2k}$; denn es ist in diesem Falle neben (3.2) auch $(\omega_{n-1}, \omega_{m+1} - \omega_m) = 0$. Dies ergibt

$$(\omega_m, \omega_{m+2\nu}) = \| \omega_{m+\nu} \|^2$$

für alle m und ν. Daher ist

$$\begin{aligned} \| \omega_{m+2\nu} - \omega_m \|^2 &= \| \omega_{m+2\nu} \|^2 + \| \omega_m \|^2 - 2(\omega_{m+2\nu}, \omega_m) \\ &= \| \omega_{m+2\nu} \|^2 + \| \omega_m \|^2 - 2 \, \| \omega_{m+\nu} \|^2 \end{aligned}$$

und somit für beliebige ν $\lim_{m \to \infty} \| \omega_{m+2\nu} - \omega_m \| = 0$. Zusammen mit (3.4) und der Subadditivität der Norm folgt dann

$$\lim_{m,n\to\infty} \| \omega_m - \omega_n \| = 0 \ .$$

Die ω_n bilden also eine Cauchy-Folge. Für ein festes i ist $\varphi_\nu^{(i)} = \omega_{2k\nu+i}$ in V_i harmonisch, und es gilt bei Restriktion auf V_i a fortiori

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} \| \varphi_\mu^{(i)} - \varphi_\nu^{(i)} \|_{V_i} = 0 \ .$$

Daher konvergieren die $\varphi_\nu^{(i)}$ in V_i lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential $\varphi^{(i)}$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \| \varphi_\nu^{(i)} - \varphi^{(i)} \|_{V_i} = 0 \ . \tag{3.5}$$

Damit ist in jeder Parameterumgebung V_i ein harmonisches Differential $\varphi^{(i)}$ konstruiert worden, das der Bedingung (3.5) genügt. Für zwei beliebige i und j aus der Indexmenge $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ gilt aber nun

$$\| \varphi_\nu^{(i)} - \varphi_\nu^{(j)} \| = \| \omega_{2k\nu+i} - \omega_{2k\nu+j} \| \to 0$$

für $\nu \to \infty$ und daraus folgt bei Restriktion auf den Durchschnitt $V_i \cap V_j$ $\| \varphi^{(i)} - \varphi^{(j)} \|_{V_i \cap V_j} = 0$, d. h. die Differentiale $\varphi^{(i)}$ und $\varphi^{(j)}$ stimmen im Durchschnitt $V_i \cap V_j$ überein, sind als harmonische Fortsetzungen voneinander und definieren ein einziges, auf R eindeutiges und harmonisches Differential φ. Da die ω_n eine Cauchy-Folge bilden, ist wegen (3.5) $\lim\limits_{n\to\infty} \| \omega_n - \varphi \|_{V_i} = 0$ für $i = 0, 1, 2, \ldots, k$, woraus sich unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty} \| \omega_n - \varphi \|_R = 0 \tag{3.6}$$

ergibt: Die ω_n konvergieren stark gegen das harmonische Differential φ.

Es ist noch zu zeigen, daß $\varphi - \omega_0$ total ist. Man kann leicht zu jedem geschlossenen Weg Γ auf R ein Differential ψ_Γ konstruieren, so daß $\int_\Gamma \omega = (\psi_\Gamma, \omega)$ ist für jedes exakte Differential ω [3]). Nun ist $\omega_{n+1} - \omega_n$ total, also auch $\omega_n - \omega_0$ und daher $(\psi_\Gamma, \omega_n - \omega_0) = 0$. Aus (3.6) folgt dann $(\psi_\Gamma, \varphi - \omega_0) = 0$ oder $\int_\Gamma (\varphi - \omega_0) = 0$ für jeden geschlossenen Weg Γ. Also ist $\varphi - \omega_0$ total und φ das gesuchte harmonische Differential.

Es ist mir nicht gelungen, dieses Verfahren direkt auf offene Flächen zu übertragen, da das periodische Hinundherlaufen des Operators Φ_i auf den Parameterzellen V_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ sehr wesentlich ist. Dagegen ist es unmittelbar auf einen Kreisbereich B einer offenen Fläche, d. i. eine zusammenhängende Vereinigungsmenge von endlich vielen Para-

---

[3]) Vgl. etwa [5], § 11.

meterzellen, anwendbar. Man gewinnt dadurch ein in B harmonisches Differential φ mit $\varphi - \omega_0 = df$ in B und $f = 0$ auf dem Rande von B. Schöpft man die offene Fläche R durch Kreisbereiche aus, so erhält man dann ein auf R harmonisches Differential φ, so daß $\varphi - \omega_0$ auf R total ist. Damit dieses Ausschöpfungsverfahren konvergiere, ist natürlich notwendig, daß das gegebene Differential ω_0 von endlicher Norm sei.

4. Anwendung auf das Neumannsche alternierende Verfahren

Zum Schluß soll noch gezeigt werden, daß man mit unserer Methode auch die Konvergenz des Neumannschen Verfahrens beweisen kann. Es sei die Riemannsche Fläche R der Einfachheit halber wieder geschlossen, F_1 eine Parameterzelle und α die konforme Abbildung, die den Parameterkreis $\{ z \mid |z| < 1 \}$ in F_1 überführt. Wir bezeichnen mit R_1 bzw. K das α-Bild von $\{ z \mid |z| \leqq 1/2 \}$ bzw. $\{ z \mid 1/2 \leqq |z| \leqq 1 \}$ und setzen $R - R_1 = F_0$, $R - F_1 = R_0$. Γ_i sei der Rand von F_i, $i = 0, 1$. Das Neumannsche Verfahren löst die Aufgabe, zu gegebener harmonischer Funktion H in K mit

$$\int_{\Gamma_0} dH^* = 0 \tag{4.1}$$

in F_0 und F_1 je eine harmonische Funktion H_0 und H_1 zu finden, so daß $H_0 - H_1 = H$ ist in K. Hiefür wird eine Doppelfolge von harmonischen Funktionen $u_n^{(i)}$ in F_i, $i = 0, 1$, durch folgende alternierende Randbedingungen konstruiert:

$$\begin{aligned} u_n^{(0)} &= u_{n-1}^{(1)} + H \quad \text{auf} \quad \Gamma_0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ u_n^{(1)} &= u_n^{(0)} \quad - H \quad \text{auf} \quad \Gamma_1 \qquad u_0^{(1)} \equiv 0\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Man zeigt, daß die $u_n^{(i)}$ in F_i lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Grenzfunktion H_i, $i = 0, 1$, konvergieren. Daher ist nach (4.2) $H_0 - H_1 = H$ auf K.

Es genügt aber die Konvergenz der $du_n^{(i)}$ und diese kann durch eine ähnliche Betrachtung wie in Nr. 2 bewiesen werden. Wegen (4.1) existiert in R_1 eine harmonische Funktion h mit $dh^* = dH^*$ längs Γ_0. Wir setzen

$$\overline{H} = \begin{cases} h \text{ im Innern von } R_1 \\ H \text{ auf } K\,. \end{cases} \tag{4.3}$$

$\overline{H}$ ist stückweise in R_1 und K harmonisch, aber nicht stetig; dagegen sind die Normalableitungen von $\overline{H}$ längs Γ_0 stetig.

Wir setzen

$$f_n^{(0)} = \begin{cases} u_n^{(0)} & \text{auf} \quad F_0 \\ u_{n-1}^{(1)} + \overline{H} & \text{auf} \quad R_1 \end{cases}$$
$$f_n^{(1)} = \begin{cases} u_n^{(0)} & \text{auf} \quad R_0 \\ u_n^{(1)} + \overline{H} & \text{auf} \quad F_1 . \end{cases} \tag{4.4}$$

Die $f_n^{(i)}$ haben längs Γ_0 eine Unstetigkeitslinie. Dagegen sind die Differenzen $f_n^{(0)} - f_n^{(1)}$ und $f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}$ auf R stetig, sowie $f_n^{(0)} - f_n^{(1)} = 0$ auf R_0 und $f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)} = 0$ auf R_1. Daher ist $D_R(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = D_{F_1}(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)})$ und $D_R(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}) = D_{F_0}(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)})$. Nach der Greenschen Formel verschwinden aber diese beiden Ausdrücke, da gemäß (4.4) $f_m^{(0)}$ auf F_0 harmonisch und $f_m^{(1)}$ stückweise auf K und R_1 harmonisch ist mit stetiger Normalkomponente längs Γ_0. Es gelten also die Relationen

$$D_R(f_m^{(0)}, f_n^{(0)} - f_{n-1}^{(1)}) = D_R(f_m^{(1)}, f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = 0 \tag{4.5}$$

für $m, n = 1, 2, \ldots$, die mit $f_n^{(i)}$ an Stelle von $u_n^{(i)}$ mit (2.3) identisch sind. Gleich wie dort folgt aus (4.5)

$$\lim_{m,n \to \infty} D_R(f_m^{(i)} - f_n^{(i)}) = 0 .$$

Nun sind die Differentiale $df_n^{(0)} = du_n^{(0)}$ und $df_n^{(1)} = du_n^{(1)} + d\overline{H}$ auf F_0 bzw. F_1 harmonisch und konvergieren daher lokal gleichmäßig gegen ein harmonisches Differential φ_0 bzw. $\varphi_1 + d\overline{H}$. Wegen $\lim_{n \to \infty} D(f_n^{(0)} - f_n^{(1)}) = 0$ [entspricht (2.7)] ist $\varphi_0 = \varphi_1 + d\overline{H}$ in $F_0 \frown F_1 = K$. Die Integrale H_i der φ_i sind also in F_i harmonisch und erfüllen bei geeigneter Wahl der Integrationskonstanten in K die Gleichung $H_0 - H_1 = H$.

Ist die Fläche offen, so muß den Randbedingungen (4.2) die am Schluß von Nr. 2 angegebene Zusatzbedingung (2.1′) für den «idealen Rand» beigefügt werden.

LITERATURHINWEISE:

[1] *L. V. Ahlfors:* Die Begründung des Dirichletschen Prinzips, Soc. Sci. Fennicae, Comment. Phys.-Math. XI. 15. (1943).

[2] *H. A. Schwarz:* Auszug aus einem Brief an Herrn F. Klein, 1882, in den Ges. Math. Abh. von Schwarz, Springer 1890, 2. Bd. S. 303–306.

[3] *Antonio Steiner:* Eine direkte Konstruktion der Abelschen Integrale erster Gattung, Inaugural-Dissertation an der Universität Zürich, 1950, Orell-Füssli Verlag, Zürich.

[4] *R. Nevanlinna:* Uniformisierung, Springerverlag, 1953.

[5] *H. Weyl:* Die Idee der Riemannschen Fläche, 3. Auflage, 1955.

(Eingegangen den 22. August 1955.)