Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments.

Autor(en): **Tits, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **30 (1956)**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23912

Sur les groupes doublement transitifs continus: correction et compléments

par J. TITS [1]), Bruxelles

1. Dans [4], nous avions cru démontrer (théorème 2) que les seuls groupes doublement transitifs continus[2]) de transformations d'un espace topologique E localement compact, connexe[3]) et satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité sont, à un homéomorphisme de E près, les groupes linéaires (groupes des transformations linéaires $y = a \cdot x + b$) d'une variable réelle, d'une variable complexe et d'une variable quaternionienne. Nous en déduisions diverses conséquences (théorèmes 3, 3′ et 5) parmi lesquelles le fait (théorème 3) que les seuls presque-corps[4]) topologiques localement compacts et connexes sont, à un isomorphisme près, le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes et le corps des quaternions. Il nous est apparu depuis, que le dernier paragraphe (§ 4.11) de la démonstration du théorème 2 renferme une erreur – nous y faisons un usage abusif d'un théorème de F. Kalscheuer – et que la conclusion du théorème n'est elle-même pas valable : il existe en effet, ainsi que nous le verrons plus loin (cf. nº 2), des groupes doublement transitifs continus de transformations de l'espace euclidien à 4 dimensions qui ne sont pas semblables au groupe linéaire d'une variable quaternionienne. Par voie de conséquence, les théorèmes 3, 3′ et 5, qui ne sont essentiellement que des expressions différentes du théorème 2,

---

[1]) Bénéficiaire d'une subvention du Fonds National Belge de la Recherche Scientifique.

[2]) La terminologie utilisée est celle de [4]; en particulier, nous disons qu'un groupe de transformations d'un ensemble E est doublement transitif s'il est *simplement transitif* sur les couples ordonnés de points de E. Cette terminologie diffère de celle que nous avons adoptée notamment dans [5], où nous nommons groupes doublement transitifs tous les groupes de transformations *transitifs* sur les couples ordonnés de points (cf. note [6]) plus loin).

[3]) Ici, et à plusieurs reprises dans la suite, nous posons, pour simplifier les énoncés, une condition de connexité là où il nous suffirait en fait de supposer que les espaces topologiques envisagés ne sont pas totalement discontinus.

[4]) Rappelons que nous entendons par «presque-corps», un *vollständiger Fastkörper* au sens de H. Zassenhaus, c'est-à-dire un ensemble muni de deux opérations, addition et multiplication, satisfaisant à tous les axiomes des corps (non commutatifs) à l'exception de la loi de distributivité à droite $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

sont eux aussi inexacts ; en particulier, il existe des presque-corps topologiques homéomorphes mais non isomorphes au corps des quaternions.

Le but de la présente note est d'apporter les corrections nécessaires aux théorèmes 2, 3, 3' et 5 de [4] (cf. nº 5 ci-dessous) et, en particulier, de compléter l'énumération des groupes doublement transitifs continus et des presque-corps topologiques satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

2. Désignons par Q le corps des quaternions à coefficients réels et par Γ un sous-groupe à un paramètre du groupe multiplicatif des quaternions non nuls qui ne soit pas contenu dans le groupe des quaternions de norme 1, de sorte que pour tout nombre réel positif r il y ait dans Γ un et un seul quaternion de norme r, que nous appellerons $\gamma(r)$. Nous allons montrer que

Le groupe G_Γ constitué par les transformations de Q d'équation

$$y = a\cdot x\cdot b + c \qquad (a, b, c \in Q, \; |a| = 1, \; b \in \Gamma),$$

est un groupe doublement transitif continu.

En effet, soient p et q deux quaternions distincts quelconques. Un calcul élémentaire montre que les équations

$$\begin{aligned} p &= a\cdot 0\cdot b + c, \\ q &= a\cdot 1\cdot b + c, \\ |a| &= 1, \qquad b \in \Gamma, \end{aligned}$$

ont, en a, b, c, une solution unique, à savoir,

$$\begin{aligned} a &= (q-p)\cdot[\gamma(|q-p|)]^{-1} \\ b &= \gamma(|q-p|) \\ c &= p\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Il existe donc dans G_Γ une et une seule transformation transformant 0 et 1 respectivement en p et q, et G_Γ est doublement transitif. En outre, si on donne à G_Γ la topologie naturelle définie à partir des coefficients a, b, c, G_Γ est un groupe topologique de transformations de Q au sens de Montgomery et Zippin [6], et la transformation de G_Γ qui conserve 0 et qui transforme 1 en p est une fonction continue de p, en vertu des relations (2.1) ; par conséquent, G_Γ est bien un groupe doublement transitif continu (cf. [4], § 3.3).

Lorsque Γ est le groupe R^+ des nombres réels positifs, G_Γ n'est autre que le groupe des transformations linéaires $y = a\cdot x + b$ $(a, b \in Q, a \neq 0)$. Nous chercherons plus loin (cf. nº 3) dans quel cas les groupes G_Γ et

$G_{\Gamma'}$ correspondant à des groupes à un paramètre Γ et Γ' différents sont *semblables*, c'est-à-dire à quelle condition il existe un homéomorphisme de Q sur lui-même transformant G_Γ en $G_{\Gamma'}$. Nous verrons alors, en particulier, que *si* $\Gamma \neq R^+$, G_Γ *n'est jamais semblable au groupe des transformations linéaires*, c'est-à-dire que les groupes G_Γ $(\Gamma \neq R^+)$ constituent effectivement des contre-exemples au théorème 2 de [4].

3. Au § 2.5 de [4], nous avons associé à tout groupe doublement transitif de transformations d'un ensemble E une opération d'addition et une opération de multiplication définies sur les éléments de E, et bien déterminées dès que l'on a fixé le choix, dans E, de deux points 0 et 1, éléments neutres bilatères respectifs de ces opérations. Si on applique les définitions au groupe G_Γ en faisant coïncider les points 0 et 1 choisis avec les quaternions de même nom, on trouve que l'opération d'addition associée à G_Γ n'est autre que l'opération d'addition usuelle des quaternions, tandis que l'opération de multiplication, que nous représenterons par le symbole $\times_\Gamma$, est donnée par la relation

$$a \times_\Gamma b = a \cdot [\gamma(|a|)]^{-1} \cdot b \cdot \gamma(|a|) ,$$

où les $\cdot$ sont, comme précédemment, le symbole de la multiplication usuelle.

L'ensemble des quaternions, muni des opérations $+$ *et* $\times_\Gamma$, *est un presque-corps topologique que nous désignerons par* Q_Γ.

Lorsque $\Gamma = R^+$ (cf. n° 2), Q_Γ n'est autre que le corps des quaternions. *Lorsque* $\Gamma \neq R^+$, Q_Γ *n'est pas un corps*, ce qui infirme les théorèmes 3, 3' et 5 de [4].

4. Deux groupes G_Γ et $G_{\Gamma'}$, correspondant à deux sous-groupes à un paramètre Γ et Γ', sont semblables (cf. n° 2) si et seulement si les presque-corps topologiques Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ sont isomorphes, c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme φ de Q sur lui-même tel qu'on ait

$$\begin{aligned} (x+y)^\varphi &= x^\varphi + y^\varphi , \\ (x \times_\Gamma y)^\varphi &= x^\varphi \times_{\Gamma'} y^\varphi , \end{aligned} \tag{4.1}$$

quels que soient les quaternions x et y. Supposons qu'il en soit ainsi; on déduit alors des relations (4.1) que $0^\varphi = 0$ et $1^\varphi = 1$, et plus généralement que

$$r^\varphi = r \tag{4.2}$$

pour tout nombre réel r, l'ensemble R des nombres réels étant l'unique sous-groupe à un paramètre du groupe additif des quaternions qui contienne 1. D'autre part, le centre du groupe multiplicatif de Q_Γ (resp. $Q_{\Gamma'}$) est constitué par les éléments de Γ (resp. Γ') et leurs opposés, et on doit donc avoir

$$\Gamma^\varphi = \Gamma' . \tag{4.3}$$

En vertu de (4.2) et (4.3), il faut, pour que Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ puissent être isomorphes, que Γ et Γ' aient avec R la même intersection. Cette condition est aussi suffisante. Supposons en effet qu'elle soit vérifiée et que Γ soit différent de R^+ (si $\Gamma = R^+$, on a aussi $\Gamma' = R^+$ et la proposition est évidente), et désignons par C et C' les sous-corps complexes (c'est-à-dire isomorphes au corps des nombres complexes) de Q engendrés respectivement par Γ et Γ'. Il existe deux automorphismes intérieurs de Q transformant C en C', soient φ et ψ, et leur quotient $\varphi^{-1}\cdot\psi$, qui conserve C', induit sur C' l'automorphisme $x \to \bar{x}$. Les groupes à un paramètre Γ^φ et Γ^ψ, transformés respectifs de Γ par φ et ψ, sont conjugués (c'est-à-dire formés de quaternions conjugués), ils sont contenus dans le même corps complexe C' que Γ', et ils ont chacun avec R la même intersection que Γ', or on sait que deux sous-groupes à un paramètre du groupe multiplicatif des nombres complexes qui ont la même intersection avec l'ensemble des nombres réels sont soit confondus soit conjugués l'un de l'autre, par conséquent l'un des deux groupes Γ^φ ou Γ^ψ, soit pour fixer les idées Γ^φ, est confondu avec Γ'. Un calcul simple montre alors que φ satisfait aux relations (4.1), donc que Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ sont isomorphes. En résumé,

Pour que les groupes G_Γ et $G_{\Gamma'}$ soient semblables ou, ce qui revient au même, pour que les presque-corps topologiques Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ soient isomorphes, il faut et il suffit que Γ et Γ' renferment les mêmes nombres réels[5]).

Remarquons encore que si $\Gamma \neq R^+$ et si a désigne le plus petit nombre réel supérieur à 1 qui appartient à Γ, l'intersection $\Gamma \cap R$ se compose des nombres a^n et $-a^{n+1/2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Par conséquent,

Si $\Gamma \neq R^+$, G_Γ (resp. Q_Γ) est défini à une similitude (resp. un isomorphisme) près par la donnée du plus petit nombre réel $a > 1$ qui appartient à Γ; ce nombre peut prendre toutes les valeurs réelles supérieures à 1,

---

[5]) Notons que tout isomorphisme *algébrique* entre deux presque-corps Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ est un homéomorphisme, d'où il résulte en particulier que la condition énoncée est aussi nécessaire et suffisante pour que Q_Γ et $Q_{\Gamma'}$ soient *algébriquement* isomorphes. On peut donner de ce fait une démonstration basée sur la remarque suivante: Si $\Gamma \neq R^+$ et si C_Γ désigne le sous-corps (commutatif) de Q_Γ engendré par le centre du groupe multiplicatif de Q_Γ, les seuls éléments de C_Γ qui peuvent être mis sous la forme d'une somme de la forme $a + a^{-1}$, avec $a \notin C_\Gamma$, sont les nombres réels compris entre -2 et 2, d'où l'on déduit immédiatement une caractérisation purement algébrique de l'ensemble R des nombres réels dans le presque-corps Q_Γ.

et à des nombres a différents correspondent des groupes G_Γ non semblables (resp. des presque-corps Q_Γ non isomorphes).

5. Dans les numéros 2 et 3, nous avons construit des contre-exemples aux théorèmes 2, 3, 3′ et 5 de [4]. Nous nous proposons à présent de montrer que ces contre-exemples sont essentiellement les seuls existants, c'est-à-dire que ces théorèmes doivent être remplacés par les suivants :

Théorème 2. *Soit G un groupe doublement transitif continu de transformations d'un espace topologique E localement compact, connexe, satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité. Il existe un homéomorphisme φ de E sur l'ensemble des nombres réels, des nombres complexes ou des quaternions, tel que le transformé de G par φ soit le groupe des transformations linéaires $y = a \cdot x + b$ ou, dans le dernier cas, l'un des groupes G_Γ décrits au n° 2* [6]).

Théorèmes 3, 3′ et 5. *Le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes et les presque-corps Q_Γ décrits au n° 3 sont*

les seuls presque-corps topologiques – ou même faiblement topologiques – localement compacts et connexes;

les seuls pseudo-corps localement compacts et connexes, satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité.

Il nous suffira de démontrer ici le théorème 2, les autres se déduisant de celui-là en procédant exactement comme dans [4].

Reprenons sans modifications les notations du n° 4 de [4], et désignons par G_0 le groupe des transformations qui appartiennent à G et qui conservent le point 0. Ainsi que nous l'avons dit plus haut (cf. n° 1), la démonstration donnée dans [4] reste entièrement valable à l'exception du § 4.11 ; nous en retiendrons en particulier la conclusion que les éléments de E forment groupe par rapport à l'opération d'addition associée à G et que ce groupe, qui est abélien, est un espace vectoriel dont nous désignerons la dimension par n. En vertu de la loi de distributivité

[6]) Dans [5], nous avons donné une énumération partielle des «groupes doublement transitifs» – cette expression étant prise dans un sens plus large que celui que nous lui donnons ici (cf. note [2]) ci-dessus) – satisfaisant à certaines conditions de continuité, énumération que nous avons complétée depuis dans un mémoire inédit, intitulé «Les espaces doublement homogènes et les espaces homogènes et isotropes», et déposé le 31 décembre 1954 en vue de l'obtention d'un prix scientifique (Prix Louis Empain). Ces résultats renferment le théorème 2 comme cas très particulier; il nous paraît cependant intéressant de donner ici de ce théorème une démonstration directe ou, plus exactement, d'indiquer les modifications à apporter à la démonstration du § 4 de [4] pour la rendre correcte et complète.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (les $\cdot$ représentant ici la multiplication associée à G), les transformations $y = a \cdot x$, qui constituent le groupe G_o, sont des transformations linéaires de cet espace ; de plus, G_0 est transitif sur $E - \{0\}$. E. Cartan [1] a déterminé tous les groupes continus irréductibles de transformations linéaires réelles et il suffit, pour achever la démonstration, de rechercher parmi ces groupes ceux qui sont simplement transitifs. On arrive cependant plus rapidement au résultat en raisonnant de la façon suivante.

G_0 est isomorphe au groupe multiplicatif des éléments non nuls de E. Si nous écartons le cas trivial où $n = 1$, celui-ci est un groupe connexe à deux bouts et G_0 est donc le produit direct d'un groupe compact connexe à $n - 1$ dimensions G_c par un groupe connexe à 1 dimension G_1 (cf. [2]). G_c étant compact, il laisse invariante dans l'espace vectoriel E une forme quadratique définie positive f. D'autre part, les transformations appartenant à G_c sont sans point fixe dans $E - \{0\}$; il en résulte que les orbites de G_c dans $E - \{0\}$ sont des variétés compactes à $n - 1$ dimensions qui ne peuvent être que les sphères de centre 0, $f =$ constante, dans la métrique euclidienne définie par f. G_c est simplement transitif sur ces orbites ; il est donc homéomorphe à une sphère à $n - 1$ dimensions, c'est-à-dire qu'on doit avoir $n = 2$ ou 4 et que G_c est isomorphe, suivant le cas, au groupe multiplicatif des nombres complexes unimodulaires ou au groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 (cf. [3]). Lorsque $n = 2$ la démonstration s'achève sans difficulté. Supposons donc qu'on ait $n = 4$. Le groupe multiplicatif des quaternions de norme 1 possède, à une équivalence près, une seule représentation linéaire réelle irréductible à 4 dimensions, à savoir, celle qui associe à tout quaternion a de norme 1 la transformation linéaire $y = a \cdot x$ de l'ensemble Q des quaternions (considéré comme un espace vectoriel à 4 dimensions). Par conséquent, il existe une application linéaire φ de l'espace vectoriel E sur Q qui envoie le groupe G_c sur le groupe des transformations $y = a \cdot x$ ($|a| = 1$). L'image de G_1 par φ est un groupe à un paramètre de transformations linéaires de Q (considéré comme un espace vectoriel à 4 dimensions) permutables avec les transformations $y = a \cdot x$ ($|a| = 1$), donc un groupe de transformations de la forme $y = x \cdot b$ où on ne peut avoir $|b| = 1$ (sauf si $b = 1$), sinon G_0 ne serait pas simplement transitif sur $E - \{0\}$. Il en résulte que l'image de G par φ est l'un des groupes G_Γ construits au n° 2, ce qui démontre le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Cartan, E.*, Oeuvres complètes, partie I, volume I, pp. 493–530, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[2] *Freudenthal, H.*, La structure des groupes à deux bouts et des groupes triplement transitifs, Indagationes Math. 13, pp. 288–294 (1951).

Iwasawa, K., Topological groups with invariant compact neighborhoods of the identity, Ann. of Math. 54, pp. 345–348 (1951).

[3] *Samelson, H.*, Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten, Comment. Math. Helv., 13, pp. 144–155 (1940–1941).

[4] *Tits, J.*, Sur les groupes doublement transitifs continus, Comment. Math. Helv., 26, pp. 203–224 (1952).

[5] *Tits, J.*, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, à paraître dans les Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Cf. aussi: Espaces homogènes et isotropes, et espaces doublement homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris, 239, pp. 526–527 (1954).

[6] *Zippin, L.*, Transformation groups, Lectures in topology, The University of Michigan, pp. 191–221 (1941).

(Reçu le 5 mai 1955.)