# Über eine Klasse Riemannscher Flächen.

# Über eine Klasse Riemannscher Flächen

*Herrn R. Nevanlinna zum sechzigsten Geburtstage gewidmet*

von H. Wittich, Karlsruhe

Für die neuere Theorie der meromorphen Funktionen ist charakteristisch, daß mit der gegebenen Funktion $w = w(z)$ gleichzeitig die von ihr erzeugte Riemannsche Fläche $F$ betrachtet wird, und daß die neuen analytischen Begriffe wie Charakteristik, Defekt u. a. in $F$ geometrisch gedeutet werden. Danach liegt es nahe, bei gegebener einfach zusammenhängender Riemannscher Fläche $F$ nach den Eigenschaften ihrer in $|z| < R \leq \infty$ meromorphen Erzeugenden $w(z)$ zu fragen, ein Problem, das von E. Ullrich in seinem Salzbrunner Vortrag „Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen"[1]) klar formuliert und von ihm und seinen Schülern unter verschiedenen Gesichtspunkten untersucht wurde. Die ersten umfassenden Resultate in dieser Richtung hatte zuvor R. Nevanlinna in seiner Arbeit „Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten"[2]) erzielt. Danach ist die Erzeugende einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche mit $p \geq 2$ logarithmischen und endlich vielen algebraischen Windungspunkten in $|z| < \infty$ meromorph und vom Mitteltypus der Ordnung $\lambda = p/2$. Jede Stelle $w = a_j$, über welcher mindestens ein logarithmischer Windungspunkt liegt, ist für die Erzeugende ein defekter Wert. Jeder logarithmische Windungspunkt in $F$ gibt den Beitrag $2/p$ zur Defektsumme, so daß $\sum_{j=1}^{q} \delta(a_j) = 2$ gilt, wenn $q$ die Zahl der Grundpunkte bedeutet. Auch für die von E. Ullrich eingeführten Flächen mit endlich vielen periodischen Enden – sie enthalten neben endlich vielen logarithmischen Windungspunkten, die positive Defekte bewirken, unendlich viele algebraische Windungspunkte mit beschränkter Blattzahl – lassen sich Ordnung, Defekte und Verzweigungsindizes der in $|z| < \infty$ meromorphen Erzeugenden angeben. Im folgenden möchte ich auf eine Flächenklasse hinweisen, die im Anschluß an P. J. Myrberg[3]) früher schon einmal be-

[1]) Jahresbericht DMV 46 (1936) [2]) Acta math. 58 (1932)

[3]) *Myrberg, P.J.:* Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Ann. Acad. Sci. fenn. A45, Nr. 3 (1935)

trachtet wurde[4]). Die Flächen sind über drei Grundpunkten verzweigt und enthalten neben einem logarithmischen Windungspunkt unendlich viele algebraische Windungspunkte, deren Ordnungen nicht beschränkt zu sein brauchen.

1. In $\mathfrak{I}\,\zeta > 0$ werden das Kreisbogendreieck mit den Ecken $\zeta = 0, 1, \infty$ und alle durch fortgesetzte Spiegelung entstehenden Moduldreiecke betrachtet, die $\mathfrak{I}\,\zeta > 0$ einfach und lückenlos überdecken. Aus den Seiten des Ausgangsdreiecks entstehen Halbkreise $K_n$, die wir kurz Modulkreise nennen. $K_n$ hat mit $\mathfrak{I}\,\zeta = 0$ die Modulpunkte $\xi_n$ und $\xi_{n+1}$ gemeinsam. In $\mathfrak{R}\,\zeta > 0$, $\mathfrak{I}\,\zeta > 0$ wird eine unendliche Folge $K_0, K_1, \ldots$ von Modulkreisen mit folgender Eigenschaft ausgewählt: $K_0$ trifft die reelle Achse in $\xi_0 = 0$ und $\xi_1$, $K_1$ in $\xi_1$ und $\xi_2, \ldots, K_n$ in $\xi_n$ und $\xi_{n+1}$, wobei $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \infty$ gelten soll. Durch Spiegelung an $\mathfrak{R}\,\zeta = 0$ erhält man in der linken Halbebene eine Folge von Modulkreisen $K'_n$ mit den zugehörigen Modulpunkten $\xi'_n = -\xi_n$ und $\xi'_{n+1} = -\xi_{n+1}$. $K_n$ und $K'_n$, $n = 0, 1, \ldots$, beranden ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $B$ von $\mathfrak{I}\,\zeta > 0$, das bei Identifizierung der Punkte $\zeta \in K_n$ und $-\bar{\zeta} \in K'_n$ durch die elliptische Modulfunktion $w = \lambda(\zeta)$ auf eine einfach zusammenhängende, unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche $F$ abgebildet wird, die nur über den Grundpunkten $w = 0, 1$ und $\infty$ verzweigt ist. Durch die imaginäre Achse wird $B$ in zwei symmetrische Gebiete $B_1$ und $B_2$ zerlegt, $B_1$ in $\mathfrak{R}\,\zeta > 0$. Die Funktion $z = z(\zeta)$, $z(0) = 0$, bildet $B_1$ schlicht und konform so in $\mathfrak{I}\,z > 0$ ab, daß die positiv imaginäre $\zeta$-Achse in die negativ reelle $z$-Achse übergeht. Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip läßt sich $z = z(\zeta)$ in $B_2$ fortsetzen und bildet $B$ schlicht und konform in $|z| < \infty$ ab. $F$ ist also vom parabolischen Typus, so daß ihre Erzeugende eine in $|z| < \infty$ meromorphe Funktion ist. $F$ läßt sich durch einen Streckenkomplex darstellen, dessen Aufbau aus der Zerlegung von $B$ in Moduldreiecke – sie entsprechen Halbblättern der Fläche $F$ – gewonnen werden kann. Abb. 1 zeigt den Fall $\xi_n = n/2$, $n = 0, 1, \ldots$. Die zugehörige Fläche ist wie folgt verzweigt:

$w = 0$: Ein zweiblättriger und unendlich viele vierblättrige Windungspunkte.

$w = 1$: Unendlich viele vierblättrige Windungspunkte.

$w = \infty$: Ein logarithmischer Windungspunkt und unendlich viele schlichte Blätter.

[4]) *Wittich, H.:* Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachtumsordnung. Math. Ann. 122 (1950)

Da alle Flächen $F$ der betrachteten Klasse genau einen logarithmischen Windungspunkt besitzen, der über $w = \infty$ liegt, ist nach dem Randstellensatz von Ahlfors-Denjoy die Ordnung ihrer Erzeugenden stets

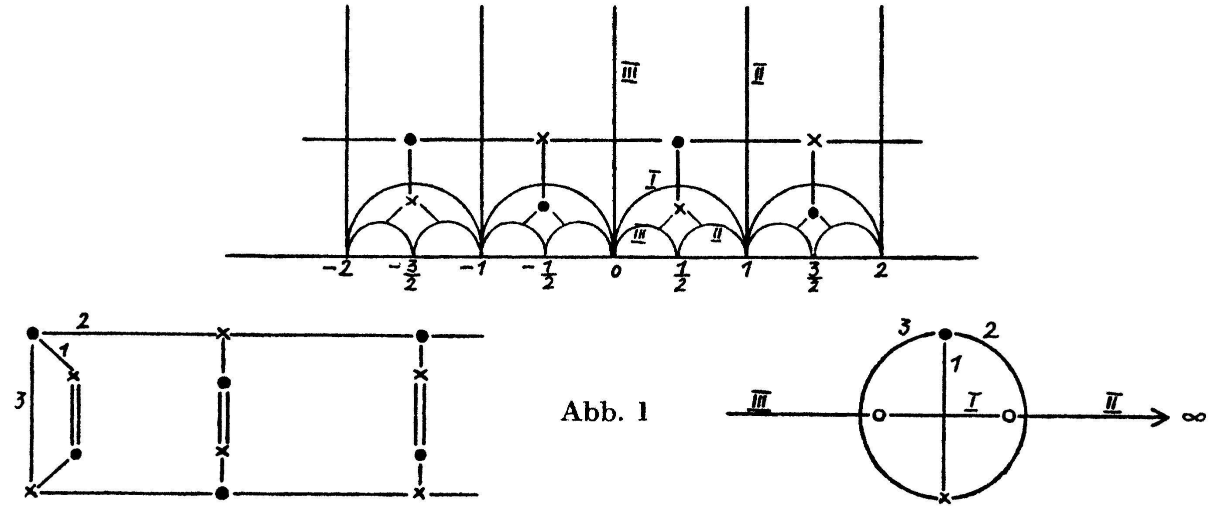



Abb. 1

$\geq 1/2$. Über $w = 0$ und $w = 1$ liegen nur algebraische Windungspunkte. Berühren sich in $\xi_n > 0$ $g_n$ Modulkreise, so hängen in $F$ im Punkte $w = \lambda(\xi_n) = \lambda(-\xi_n)$ $g_n$ Blätter zusammen. Im Falle $g_n \to \infty$ bei $n \to \infty$ erhält man Flächen $F$ mit algebraischen Windungspunkten beliebig hoher Ordnung. Durch passende Wahl der Zahlen $g_n$ lassen sich Flächen angeben, deren Erzeugende von beliebig hoher Wachstumsordnung sind. Wie bei Flächen mit endlich vielen doppelperiodischen Enden kann es auch bei der hier betrachteten Flächenklasse vorkommen, daß der logarithmische Windungspunkt über $w = \infty$ keinen positiven Defekt $\delta(\infty)$ zu erzeugen vermag. Schließlich kann man durch Wahl der $g_n$ noch meromorphe Funktionen mit dem Höchstwert 1 für den Index der algebraischen Verzweigtheit eines Wertes konstruieren. Diese Behauptungen sind anschaulich evident. Zum Beweis braucht man Verzerrungsaussagen über die Abbildung $\zeta \leftrightarrow z$.

2. Der Durchschnitt von $B$ mit dem Kreisring $t_1 < |\zeta| < t_2$, $\zeta = te^{i\theta}$, ist ein Ringgebiet $B_{12}$ mit dem Modul $M_{12} = M$. $\{\gamma\}$ sei die Menge aller in $B_{12}$ verlaufenden ideal geschlossenen und streckbaren Kurven, die die in $B$ gelegenen Bögen von $|\zeta| = t_1$ und $|\zeta| = t_2$ trennen. Ist $\varrho(\xi, \eta) \geq 0$ eine in $B_{12}$ definierte Funktion mit der Eigenschaft, daß $\int \varrho\, |d\zeta|$ existiert und $\geqq 1$ ist, dann heißt $\lambda(\gamma)$, definiert durch $\frac{1}{\lambda(\gamma)} = \inf_{\varrho} \iint_{B_{12}} \varrho^2 d\xi d\eta$, die extremale Länge der Kurvenschar $\{\gamma\}$. Sie ist eine konforme Invariante und mit dem Modul $M_{12}$ durch die Beziehung $\frac{1}{\lambda(\gamma)} = \frac{M_{12}}{2\pi}$ verknüpft. Aus $\{\gamma'\} \subset \{\gamma\}$ folgt $\frac{1}{\lambda(\gamma')} \leqq \frac{1}{\lambda(\gamma)}$. Eine

solche Kurvenschar $\{\gamma'\}$ bilden offenbar die in $B_{12}$ verlaufenden Bögen der Kreise $|\zeta| = t, t_1 < t < t_2$. Aus

$$1 \leq (\int_{\gamma'} \varrho \sqrt{t} \sqrt{t}\, d\theta)^2 \leqq \int_{\gamma'} t d\theta \int_{\gamma'} \varrho^2 t d\theta \leqq \pi t \int_{\gamma'} \varrho^2 t d\theta$$

oder $\frac{1}{\pi t} \leq \int_{\gamma'} \varrho^2 t d\theta$ folgt durch Integration nach $t$ von $t_1$ bis $t_2$

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} \leq \iint_{B_{12}} \varrho^2 d\xi d\eta \ ,$$

gültig für alle zulässigen $\varrho$. Man erhält daher

$$\frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} \leqq \inf_{\varrho} \iint_{B_{12}} \varrho^2 d\xi d\eta = \frac{1}{\lambda(\gamma')} \leqq \frac{1}{\lambda(\gamma)} \, . \tag{1}$$

Wählen wir eine spezielle zulässige Funktion $\varrho = \varrho_0(\xi, \eta)$, so gilt nach Definition der extremalen Länge $\frac{1}{\lambda(\gamma)} \leqq \iint_{B_{12}} \varrho_0^2 d\xi d\eta$. Ist $\overline{B}_{12}$ der Durchschnitt von $B_{12}$ und $\mathfrak{J}\zeta \geqq 1/2$ und $B'_{12} = B_{12} - \overline{B}_{12}$, dann genügt

$$\varrho_0(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{\left|\zeta - \frac{i}{2}\right|} & \text{für} \quad \zeta \in \overline{B}_{12} \\ 0 & \text{für} \quad \zeta \in B'_{12} \ , \end{cases} \quad , \quad t_1 > 1 \ , \tag{2}$$

den gestellten Bedingungen. Bei dieser Wahl von $\varrho(\xi, \eta)$ ist $\iint_{B_{12}} \varrho_0^2 \, d\xi d\eta$ gleich dem Inhalt desjenigen schlichten Gebietes der $\omega$-Ebene, das als Bild von $\overline{B}_{12}$ durch $\omega = \frac{1}{\pi} \log\left(\zeta - \frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2}$, $\omega\left(\frac{3i}{2}\right) = 0$, erzeugt wird. Das Integral wird also majorisiert durch den Inhalt des Rechtecks, das die Geraden $\mathfrak{J}\omega = \pm \frac{1}{2}$, $\mathfrak{R}\omega = \frac{1}{\pi} \log(t_1 - \frac{1}{2})$ und $\mathfrak{R}\omega = \frac{1}{\pi} \log(\sqrt{t_2^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2})$ bestimmen. Es gilt danach für $t_1 > 1$:

$$\frac{1}{\lambda(\gamma)} \leqq \iint_{B_{12}} \varrho_0^2 d\xi d\eta \leqq \frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{\pi} \log \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4t_2^2}} - \frac{1}{2t_2}}{1 - \frac{1}{2t_1}}$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{1 - \frac{1}{2t_1}} \leqq \frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{2t_1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2t_1}} \ , \text{ also}$$

$$\frac{1}{\lambda(\gamma)} \leqq \frac{1}{\pi} \log \frac{t_2}{t_1} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{t_1} . \tag{3}$$

Aus $\frac{M_{12}}{2\pi} = \frac{1}{\lambda(\gamma)}$, (1) und (3) folgt:

$$\left| M_{12} - 2 \log \frac{t_2}{t_1} \right| \leqq \frac{2}{t_1} . \tag{4}$$

Aus dem in $B_{12}$ gelegenen Bogen von $|\zeta| = t > 1$ entsteht in der $z$-Ebene eine einfache geschlossene Kurve $\Gamma_t$, die $z = 0$ umschlingt. Mit

$$r_1(t) = \operatorname*{Min}_{z \in \Gamma_t} |z| , \qquad r_2(t) = \operatorname*{Max}_{z \in \Gamma_t} |z|$$

folgt aus (4) nach dem Modulsatz

$$\lim_{t \to \infty} \log \frac{r_1(t)}{t^2} = \lim_{t \to \infty} \log \frac{r_2(t)}{t^2} = c \quad \text{oder}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{r_j(t)}{t^2} = C = e^c , \quad 0 < C < \infty \quad \text{und} \quad j = 1, 2 ,$$

d. h.

$$r_j(t) = Ct^2(1 + \varepsilon_j(t)) , \quad \lim_{t \to \infty} \varepsilon_j(t) = 0, j = 1, 2 \tag{5}$$

und

$$t = \sqrt{\frac{r_1}{C}} (1 + \eta_1(r_1)) , \quad t = \sqrt{\frac{r_2}{C}} (1 + \eta_2(r_2)) . \tag{6}$$

$$\lim_{r_1 \to \infty} \eta_1(r_1) = \lim_{r_2 \to \infty} \eta_2(r_2) = 0 .$$

3. Für jeden Wert $a \neq 0, 1, \infty$ gilt $m(r, a) = O(1)$, also

$$T(r, w) = N(r, a) + O(1) .$$

Danach wird die Ordnung $\lambda$ der meromorphen Funktion $w = w(z)$, die $F$ erzeugt, durch $\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log N(r, a)}{\log r} = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r}$ gegeben. Die Zahl der auf $B$ gelegenen Wurzeln $\zeta_a$ von $w(z(\zeta)) - a = 0$, deren Betrag höchstens gleich $|t| > 1$ ist, wird mit $\nu(t, a)$ bezeichnet. Dabei wird jede Wurzel so oft gezählt, wie ihre Vielfachheit angibt. Aus (5) und (6) folgt $\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r} = \frac{1}{2} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \nu(t, a)}{\log t}$, also

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\log \nu(t, a)}{\log t} . \tag{7}$$

Mit $\xi_n = n, n = 0, 1, \ldots,$ erhält man eine Fläche $F$, deren Erzeugende wegen $\nu(t, a) = t + O(1)$ vom Mitteltypus der Ordnung 1/2 ist. Die gleiche Aussage über $\lambda$ gilt auch dann noch, wenn in jedem Modulpunkt $\xi_n$ sich höchstens $g$ Modulkreise berühren und die endliche Zahl $g$ von $n$ unabhängig ist.

$B$ wird nun in folgender Weise aus Moduldreiecken aufgebaut: Das Dreieck $D_1$ mit den Ecken $P: \zeta = j, P_1: \zeta = j + 1$ und $\infty$ wird an dem Kreisbogen $\overset{\frown}{PP_1}$ gespiegelt und ergibt ein Dreieck $D_2$ mit den Eckpunkten $P, P_2, P_1$. Durch Spiegelung von $D_2$ an dem Bogen $\overset{\frown}{PP_2}$ ent-

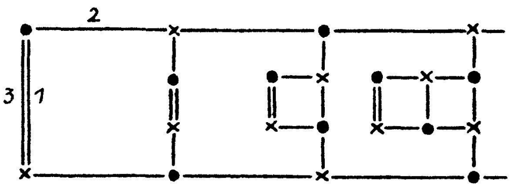



Abb. 2

steht $D_3$ mit den Ecken $P, P_3, P_2$ usw. Nach $m_j - 1$ Schritten erhält man in $j < \Re\,\zeta < j + 1$ $m_j$ Moduldreiecke mit dem gemeinsamen Eckpunkt $P$. Bei gegebenen $m_j, j = 0, 1, \ldots,$ ist $B_1$ und damit $B$ festgelegt. Abb. 2 zeigt den Streckenkomplex der Fläche $F$ für $m_j = j + 1$.

Zu $t_j = j + \frac{3}{4}$ und festem $\mu$, $1 < \mu < \infty$, kann man die Zahlen $m_j$ so wählen, daß $\nu(t_j, a) = t_j^\mu + O(1)$ gilt, $a$ fest und $\neq 0, 1, \infty$. Daraus folgt für beliebiges $t > 1, t_j \leqq t < t_{j+1}$

$$(t-1)^\mu - K \leq t_j^\mu - K \leqq \nu(t, a) \leqq t_{j+1}^\mu + K \leqq (t+1)^\mu + K\,, \quad \text{also}$$

$$\left| \frac{\log \nu(t, a)}{\log t} - \mu \right| \leqq \eta(t) \to 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty\,,$$

d. h.

$$\lambda = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log T(r, w)}{\log r} = \frac{\mu}{2}\,.$$

Mit $m_j = 2^j$ erhält man wegen $\nu(t_j, a) = 2^{j+1} + O(1) = C\,2^{t_j} + O(1)$

$$\frac{\log \nu(t_j, a)}{\log t_j} = t_j \frac{\log 2}{\log t_j} (1 + \varepsilon(t_j)) \to \infty \quad \text{für} \quad t_j \to \infty\,,$$

also $\lambda = \infty$. Durch Wahl der $m_j$ lassen sich also Flächen $F$ angeben, deren Erzeugende von vorgegebener Wachstumsordnung $\lambda$ sind, $\frac{1}{2} \leqq \lambda \leqq \infty$.

4. Mit den Bezeichnungen aus 3. setzen wir $m_0 = 1, m_1 = m = 2\varkappa \geqq 2$, $m_2 = 1, m_3 = m, \ldots, m_{2\alpha} = 1, m_{2\alpha+1} = m, \ldots$; $\varkappa$ ist eine natürliche Zahl. Für gegebenes $a$ wird $\nu_1(t, a)$ gleich der Anzahl der mehrfachen Wurzeln $\zeta_a$, $|\zeta_a| \leqq t$, auf $B$ gesetzt, wobei eine $k$-fache Wurzel nur $(k-1)$-mal gezählt wird. Dann folgt aus dem Aufbau von $B$ aus Moduldreiecken

$$\nu(t,a) = (m+1)\frac{t}{2} + O(1)\ , \qquad a \neq 0, 1, \infty\ ,$$

$$\nu(t,\infty) = (m-1)\frac{t}{2} + O(1)\ , \qquad \nu_1(t,\infty) = \left(\frac{m}{2} - 1\right)\frac{t}{2} + O(1)\ ,$$

$$\nu_1(t,1) = m\,\frac{t}{2} + O(1)\ , \qquad \nu_1(t,0) = \left(\frac{m}{2} + 1\right)\frac{t}{2} + O(1)\ ,$$

und zufolge (5) und (6)

$$n(r,a) = (m+1)\sqrt{r}\,h_1(r)\ , \qquad n_1(r,\infty) = \left(\frac{m}{2} - 1\right)\sqrt{r}\,h_3(r)\ ,$$

$$n(r,\infty) = (m-1)\sqrt{r}\,h_2(r)\ , \qquad n_1(r,0) = \left(\frac{m}{2} + 1\right)\sqrt{r}\,h_4(r)\ , \tag{7}$$

$$n_1(r,1) = m\sqrt{r}\,h_5(r)$$

mit $\lim\limits_{r\to\infty} h_j(r) = A\,,\ 0 < A < \infty$. Wegen $m(r,a) = O(1)$ erhalten wir nach Definition der Defekte und Indizes der algebraischen Verzweigtheit aus (7)

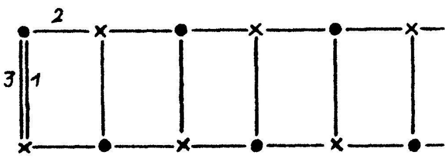
$$\delta(\infty) = \frac{2}{m+1}\,, \qquad \vartheta(\infty) = \tfrac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)}\ ,$$

$$\vartheta(0) = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(m+1)}\,, \quad \vartheta(1) = 1 - \frac{1}{m+1}\ , \tag{8}$$

$$\delta(\infty) + \vartheta(\infty) + \vartheta(0) + \vartheta(1) = 2\ .$$

Danach wird man vermuten, daß unter den betrachteten Flächen $F$ solche vorkommen, deren Erzeugenden $w = w(z)$ die folgende Defektverteilung aufweisen:

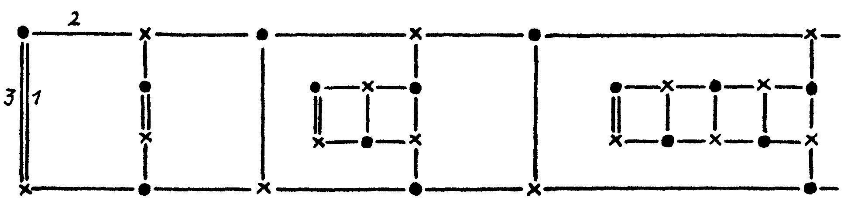
$$\delta(\infty) = 0\ , \quad \vartheta(1) = 1\ , \quad \vartheta(0) = \vartheta(\infty) = \tfrac{1}{2}\ . \tag{10}$$




$m_{2\alpha} = m_{2\alpha+1} = 1$

Das läßt sich in der Tat folgendermaßen einsehen. Mit $m_{2\alpha} = 1\,,\ m_{2\alpha+1} = 2(\alpha+1)$ erhält man (Abb. 3)

Abb. 3




$m_{2\alpha} = 1,\ m_{2\alpha+1} = 2\,(\alpha+1)$

$$
\begin{array}{llll}
\nu(t,a) = \dfrac{t^2}{4} + O(t) & & n(r,a) = rh_1(r),\ a \neq 0,1,\infty, & \\
\nu(t,\infty) = \dfrac{t^2}{4} + O(t) & & n(r,\infty) = rh_2(r) & \\
\nu_1(t,\infty) = \dfrac{t^2}{8} + O(t) & \text{und nach (5), (6)} & n_1(t,\infty) = \dfrac{r}{2} h_3(r) & (9) \\
\nu_1(t,0) = \dfrac{t^2}{8} + O(t) & & n_1(r,0) = \dfrac{r}{2} h_4(r) & \\
\nu_1(t,1) = \dfrac{t^2}{4} + O(t) & & n_1(r,1) = rh_5(r)\ . &
\end{array}
$$

Daraus folgt die Behauptung (10). $w = w(z)$ ist vom Mitteltypus der Ordnung 1. Es ist ohne weiteres möglich, meromorphe Erzeugende der minimalen Ordnung 1/2 mit der Defektverteilung (10) zu konstruieren. Mit $m_{2\alpha} = m_{2\alpha+1} = 1$ erhält man (Abb. 3)

$$\delta(\infty) = 1\ , \quad \vartheta(0) = \vartheta(1) = \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda = \tfrac{1}{2}\ .$$

Die Verzweigtheit $\theta(\infty) = 1 - \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\overline{N}(r,\infty)}{T(r,w)}$ der Stellensorte $w = \infty$ fällt bei den betrachteten Beispielen mit $\delta(\infty) + \vartheta(\infty)$ zusammen. Sie erreicht ihren Maximalwert 1 für $m_{2\alpha} = m_{2\alpha+1} = 1$ und hat für $m_{2\alpha} = 1, m_{2\alpha+1} = m = 2\varkappa \geqq 2$ den Wert $\frac{1}{2} < \theta(\infty) = \dfrac{\frac{m}{2}+1}{m+1} < 1$. Die Schranke 1/2 wird für $m_{2\alpha} = 1, m_{2\alpha+1} = 2(\alpha+1)$ erreicht. In diesem Falle gilt $\theta(\infty) = \delta(\infty)$. Die eingeschalteten zweiblättrigen Windungspunkte über $w = \infty$ bringen den Einfluß des logarithmischen Windungspunktes auf die Defektverteilung zum Verschwinden, während gleichzeitig die zusätzlichen algebraischen Windungspunkte wachsender Ordnung über $w = 1$ den Maximalwert $\vartheta(1) = \theta(1) = 1$ erzwingen.

(Eingegangen den 19. März 1955)