Über den Brunn-Minkowskischen Satz.

Autor(en): **Ohmann, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **29 (1955)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23287

Über den Brunn-Minkowskischen Satz

von D. OHMANN, Frankfurt a. M.

Für die Quermaßintegrale W_p $(p = 0, 1 \ldots n - 1)$ der Minkowskischen Summe zweier konvexer Körper K_1 und K_2 des euklidischen R_n verallgemeinert sich die Aussage des Brunn-Minkowskischen Satzes bekanntlich zu $W_p(K_1 + K_2)^{\frac{1}{n-p}} \geq W_p(K_1)^{\frac{1}{n-p}} + W_p(K_2)^{\frac{1}{n-p}}$. Es soll in dieser Note zunächst gezeigt werden, daß sich diese Ungleichung nicht nur — wie schon oft bewiesen[1]) — für $p = 0$ (W_0 fällt mit dem Maß zusammen!), sondern auch für $p = 1$ auf abgeschlossene Mengen übertragen läßt. Des weiteren ist bei Einbeziehung der Minkowskischen Differenz die Vollständigkeit des sich ergebenden Ungleichungssystems Gegenstand der Untersuchung. Die zu erzielenden Ergebnisse lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Im euklidischen R_n gelten für beschränkte, abgeschlossene Mengen A, B die Ungleichungen[2])

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & W_p(A+B)^{\frac{1}{n-p}} \geq W_p(A)^{\frac{1}{n-p}} + W_p(B)^{\frac{1}{n-p}} \\ \text{(b)} & W_p(A-B)^{\frac{1}{n-p}} \leq W_p(A)^{\frac{1}{n-p}} - W_p(B)^{\frac{1}{n-p}} \quad (A-B \supset L) \end{array}\right\} p = 0,1 \qquad (1)$$

die für festes p und bei $A - B \supset L$ zusammen mit

$$\text{(c)} \quad W_p(B) \geq 0 \,, \quad W_p(A - B) \geq 0 \qquad (1)$$

ein vollständiges Ungleichungssystem bilden.

L bezeichnet dabei die leere Menge, so daß $A - B \supset L$ bedeutet, daß $A - B$ nicht leer ist. Der Beweis von (1a) für $p = 0$, den wir auf einer geeigneten Integraldarstellung für das Maß basieren, liefert uns für den Fall, daß die Mengen A und B in wenigstens einer Richtung gleiches Quermaß besitzen, zwanglos die Verschärfung zu (1a)

$$W_0\big((1 - \lambda)A + \lambda B\big) \geq (1 - \lambda) W_0(A) + \lambda W_0(B) \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \qquad (2)$$

die hinterher zum Beweis von (1a) für $p = 1$ gebraucht wird.

---

[1]) Zuerst von *Lusternik:* Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen (C. R. Acad. Sc. URSS 1935 III, S. 55–58).

[2]) Für $p = 0$ siehe *H. Hadwiger:* Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen... (Math. Z. 53 (1950–51) S. 210–218).

Es sei noch bemerkt, daß das Vollständigkeitsproblem durch die Verallgemeinerung von konvexen Körpern auf abgeschlossene Mengen wesentlich vereinfacht wird, da das System (1) — wie vom Verfasser für $n = 2$ gezeigt [3]) — bei Beschränkung auf konvexe Körper keineswegs vollständig ist und daher durch ein verschärfendes Ungleichungssystem ersetzt werden muß.

§ 1 Vorbereitungen

Wir stellen die notwendigsten Definitionen und einfachsten Eigenschaften zusammen.

Im euklidischen R_n bezeichnen wir den *Normalriß* der beschränkten, abgeschlossenen Menge A in der Richtung ξ (= Orthogonalprojektion von A auf eine $(n-1)$-dimensionale Ebene der Normalenrichtung ξ) symbolisch mit A_ξ und legen das *Quermaß* von A in der Richtung ξ als dessen $(n-1)$-dimensionales Lebesgue-Maß $M_{n-1}(A_\xi)$ fest. Die *Quermaßintegrale* $W_p(A)$ $(p = 0, 1 \ldots n)$ sind dann durch die Definitionsformeln

$$\begin{aligned} &W_p(A) = \frac{1}{n\, v_{n-1}} \int_{\Omega_n} W_{p-1}(A_\xi)\, d\omega \qquad (p = 1, \ldots n-1) \\ &W_0(A) = M_n(A)\,, \quad W_n(A) = v_n \end{aligned} \tag{3}$$

zu erklären, in denen v_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel Ω_n darstellt, und ξ unter dem Integral die äußere Normalenrichtung des Oberflächenelements $d\omega$ von Ω_n angibt. Es ist dabei noch darauf hinzuweisen, daß die benutzten Lebesgue-Integrale bei ausschließlicher Betrachtung beschränkter, abgeschlossener Mengen tatsächlich existieren [4]).

Indem wir den Punkten des Raumes die gleiche Bezeichnung geben wie den von einem festen Ursprung aus zu ihnen hinweisenden Ortsvektoren und unter $A^{\mathfrak{x}}$ die aus der Menge A durch Verschiebung um den Vektor $\mathfrak{x}$ hervorgegangene Menge verstehen, können wir die üblichen Definitionen für die Minkowskische Summe $A + B$ und Differenz $A - B$ der Mengen A und B folgendermaßen fassen:

$A + B$ stellt die Vereinigungsmenge aller Mengen $B^{\mathfrak{x}}$ für $\mathfrak{x} \in A$ bzw.

---

[3]) *D. Ohmann*, Ein vollständiges Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz (Comment. Math. Helv. 27, S. 151–156).

[4]) Vgl. dazu *D. Ohmann*, Ungleichungen zwischen den Quermaßintegralen beschränkter Punktmengen II (Math. Ann. 127, S. 1—7).

aller Mengen $A^{\mathfrak{x}}$ für $\mathfrak{x} \in B$ dar:

$$A + B = \bigcup_{\mathfrak{x} \in A} B^{\mathfrak{x}} = \bigcup_{\mathfrak{x} \in B} A^{\mathfrak{x}} . \tag{4}$$

$A - B$ umfaßt alle Punkte $\mathfrak{x}$, für die $B^{\mathfrak{x}} \subseteq A$ besteht.

Auch die dilatierte Menge λA $(\lambda \geq 0)$ definieren wir wie üblich durch die Festsetzung, daß λA die Gesamtheit der Punkte $\lambda \mathfrak{x}$ für $\mathfrak{x} \in A$ angibt.

Aus diesen Definitionen ergeben sich unmittelbar die Formeln

$$\text{(a)} \quad (A + B)_{\xi} = A_{\xi} + B_{\xi} , \qquad \text{(b)} \quad (\lambda A)_{\xi} = \lambda A_{\xi} \tag{5}$$

$$(A - B) + B \subseteq A . \tag{6}$$

Des weiteren erschließen wir aus dem Umstand, daß entsprechende Verhältnisse für das Maß vorliegen, mit Hilfe der Definitionsformeln (3) folgende Beziehung für monotone Folgen beschränkter, abgeschlossener Mengen $A_{\kappa+1} \subseteq A_{\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{\kappa \to \infty} W_p(A_{\kappa}) = W_p\Big(\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}\Big) . \tag{7}$$

Dies läßt sich bei Betrachtung zweier monotoner Folgen $A_{\kappa+1} \subseteq A_{\kappa}$ und $B_{\kappa+1} \subseteq B_{\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ mit

$$\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} (A_{\kappa} + B_{\kappa}) = \Big(\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}\Big) + \Big(\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}\Big) \tag{8}$$

noch unmittelbar zu

$$\lim_{\kappa \to \infty} W_p(A_{\kappa} + B_{\kappa}) = W_p\Big[\Big(\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}\Big) + \Big(\bigcap_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}\Big)\Big] \tag{9}$$

zusammensetzen.

Zum Beweis für (8) setzen wir $A = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}$, $B = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} B_{\kappa}$ und $C = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} (A_{\kappa} + B_{\kappa})$. Ist dann $\mathfrak{x} \in A$ und $\mathfrak{y} \in B$, so ist auch $\mathfrak{x} \in A_{\kappa}$, $\mathfrak{y} \in B_{\kappa}$ für jedes $\varkappa$, und es folgt — wie der Definition (4) zu entnehmen ist — $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in A_{\kappa} + B_{\kappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ und mithin $\mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in C$. Wir haben also $A + B \subseteq C$. Ist umgekehrt $\mathfrak{z} \in C$, so ist $\mathfrak{z} \in A_{\kappa} + B_{\kappa}$ für jedes $\varkappa$, und es existiert stets ein Punktepaar $\mathfrak{x}_{\kappa} \in A_{\kappa}$, $\mathfrak{y}_{\kappa} \in B_{\kappa}$, so daß $\mathfrak{x}_{\kappa} + \mathfrak{y}_{\kappa} = \mathfrak{z}$ ist. Auf Grund der Abgeschlossenheit von A und B gehört nun aber jeder Häufungspunkt $\mathfrak{x}^*$ bzw. $\mathfrak{y}^*$ der Folge $\mathfrak{x}_{\kappa}$ bzw. $\mathfrak{y}_{\kappa}$ zu A bzw. B. Andererseits ist wegen $\mathfrak{x}_{\kappa} + \mathfrak{y}_{\kappa} = \mathfrak{z}$ auch $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^* = \mathfrak{z}$, womit gezeigt ist, daß sich zu jedem Punkt $\mathfrak{z} \in C$ ein Punktepaar $\mathfrak{x}^* \in A$, $\mathfrak{y}^* \in B$ zuordnen läßt, für das $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^* = \mathfrak{z}$ besteht. Daraus folgt $A + B \supseteq C$, was sich mit $A + B \subseteq C$ zu (8) zusammensetzt.

§2 Die Ungleichung (2)

1. Der lineare Fall. Es seien A und B zwei beschränkte, abgeschlossene und auf der gleichen Geraden gelegene Mengen, und es bezeichne $\langle \mathfrak{x}_A, \mathfrak{y}_A \rangle$ bzw. $\langle \mathfrak{x}_B, \mathfrak{y}_B \rangle$ die konvexe Hülle von A bzw. B. Wegen der Abgeschlossenheit von A und B gehören die Punkte $\mathfrak{x}_A$, $\mathfrak{y}_A$ sodann zu A und $\mathfrak{x}_B$, $\mathfrak{y}_B$ zu B. Setzen wir zur Abkürzung $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$, $\mathfrak{x}^* = \lambda \mathfrak{x}_B$ und $\mathfrak{y}^* = (1 - \lambda)\mathfrak{y}_A$, so ist gemäß (4) $[(1 - \lambda)A]^{\mathfrak{x}^*} \subseteq C$, $(\lambda B)^{\mathfrak{y}^*} \subseteq C$ und mithin auch

$$[(1 - \lambda)A]^{\mathfrak{x}^*} \cup (\lambda B)^{\mathfrak{y}^*} \subseteq C \; . \qquad (10)$$

Wir haben nun nur noch zu beachten, daß die Mengen $[(1 - \lambda)A]^{\mathfrak{x}^*}$ und $(\lambda B)^{\mathfrak{y}^*}$ nur den einen Punkt $\mathfrak{x}^* + \mathfrak{y}^*$ gemeinsam haben können, um die sich daraus ergebende Beziehung

$$M_1[((1 - \lambda)A)^{\mathfrak{x}^*} \cup (\lambda B)^{\mathfrak{y}^*}] = (1 - \lambda)M_1(A) + \lambda M_1(B)$$

mit (10) zu (2) zusammensetzen zu können.

2. Der Fall $n > 1$. Wir benötigen zu seiner Erledigung eine geeignete Integraldarstellung für das Maß. Ist zu deren Herleitung $A(\mathfrak{x})$ der Durchschnitt der beschränkten, abgeschlossenen Menge A mit der Geraden der festen Richtung ξ, die durch den Punkt $\mathfrak{x} \in A_\xi$ hindurchgeht, so hat man zunächst

$$M_n(A) = \int_{A_\xi} M_1[A(\mathfrak{x})]d\mathfrak{x} \; .$$

Aus der Abgeschlossenheit von A folgern wir nun, daß sich zu jedem nicht negativen $\mu \leq M_{n-1}(A_\xi)$ derart eine abgeschlossene Menge $A_{(\mu)} \subseteq A_\xi$ mit zugehöriger Größe $f(A; \mu)$ angeben läßt, daß für die Punkte $\mathfrak{x}$ von A_ξ nach der Größe von $M_1[A(\mathfrak{x})]$ die Einteilung

$$M_1[A(\mathfrak{x})] \geq f(A; \mu) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in A_{(\mu)}, \qquad M_1[A(\mathfrak{x})] \leq f(A; \mu) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \notin A_{(\mu)}$$

besteht. Mit dieser Einführung gewinnt die Integraldarstellung die von uns gewünschte Gestalt

$$M_n(A) = \int_0^{M_{n-1}(A_\xi)} f(A; \mu)d\mu \; . \qquad (11)$$

Zum Beweis der Ungleichung (2) greifen wir auf das Ergebnis des Paragraphen 3 vor, daß (1a) für $p=0$ aus (2) folgt, und führen die Induktionsvoraussetzung ein, daß (2) und damit auch (1a) für $p = 0$ in den Räumen geringerer als n-ter Dimension gültig sei. Sind A und B sodann zwei beschränkte, abgeschlossene Mengen, für die $M_{n-1}(A_\xi) = M_{n-1}(B_\xi)$ in der festen Richtung ξ besteht, so haben wir nur noch nötig, der Induktionsvoraussetzung unter Benutzung der Abkürzung $C = (1-\lambda) A + \lambda B$ und Beachtung von (5)

$$M_{n-1}(C_\xi) \geq M \left(M = M_{n-1}(A_\xi) = M_{n-1}(B_\xi)\right)$$

zu entnehmen und die Richtigkeit von

$$f(C\,;\mu) \geq (1-\lambda) f(A\,;\mu) + \lambda f(B\,;\mu) \tag{12}$$

darzutun, um aus der Maßdarstellung (11)

$$M_n(C) \geq \int_0^M [(1-\lambda) f(A\,;\mu) + \lambda f(B\,;\mu)] d\mu = (1-\lambda) M_n(A) + \lambda M_n(B)$$

folgern zu können.

Um (12) zu beweisen, erschließen wir aus der leicht einzusehenden Beziehung

$$C(\mathfrak{x}_\lambda) \supseteq (1-\lambda) A(\mathfrak{x}_1) + \lambda B(\mathfrak{x}_2) \qquad \left(\mathfrak{x}_\lambda = (1-\lambda)\mathfrak{x}_1 + \lambda \mathfrak{x}_2\right)$$

mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung, daß für $\mathfrak{x}_1 \in A_{(\mu)}, \mathfrak{x}_2 \in B_{(\mu)}$

$$M_1[C(\mathfrak{x}_\lambda)] \geq (1-\lambda) f(A;\mu) + \lambda f(B;\mu)$$

statthat. Aus der Ungleichung $M_{n-1}[(1-\lambda) A_{(\mu)} + \lambda B_{(\mu)}] \geq \mu$, die wegen $M_{n-1}(A_{(\mu)}) = \mu$ und $M_{n-1}(B_{(\mu)}) = \mu$ ebenfalls aus der Induktionsvoraussetzung folgt, ergibt sich daher, daß $M_1[C(\mathfrak{x})] \geq (1-\lambda) f(A\,;\mu) + \lambda f(B\,;\mu)$ auf einer Untermenge von C_ξ bestehen muß, deren Maß nicht geringer als μ ausfällt. Das kann aber gemäß der Definition von $C_{(\mu)}$ und $f(C;\mu)$ nur dann möglich sein, wenn (12) richtig ist.

§ 3 Die Ungleichungen (1a) und (1b)

1. Ungleichung (1a) für $p = 0$. Besitzt wenigstens eine der wieder als beschränkt und abgeschlossen vorauszusetzenden Mengen A und B verschwindendes Maß, so ist (1a) für $p = 0$ trivialerweise erfüllt. Wir setzen also $W_0(A) > 0, W_0(B) > 0$ voraus, woraus offenbar

$$M_{n-1}(A_\xi) > 0,\; M_{n-1}(B_\xi) > 0$$

gefolgert werden kann. Alsdann besitzen die Mengen $A' = \varrho_A A$ und $B' = \varrho_B B\left(\varrho_A = M_{n-1}(A_\xi)^{-\frac{1}{n-1}},\;\; \varrho_B = M_{n-1}(B_\xi)^{-\frac{1}{n-1}}\right)$ in der beliebig herausgegriffenen Richtung ξ gleiches Quermaß, so daß die Verschärfung (2) gültig wird, und wir

$$W_0[(1-\lambda)\varrho_A A + \lambda \varrho_B B] \geq (1-\lambda)\varrho_A^n W_0(A) + \lambda \varrho_B^n W_0(B)$$

notieren können. Vermöge der Konkavität der n-ten Wurzel folgt daraus

$$W_0[(1-\lambda)\varrho_A A + \lambda\varrho B]^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)\varrho_A W_0(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda\varrho_B W_0(B)^{\frac{1}{n}} .$$

Nach Multiplikation mit $\frac{\varrho_A + \varrho_B}{\varrho_A\,\varrho_B}$ ergibt sich (1a) schon durch die Spezialisierung $\lambda = \frac{\varrho_A}{\varrho_A + \varrho_B}$.

2. Ungleichung (1a) für $p = 1$. Um die Gewähr zu haben, daß die gleich zu betrachtenden richtungsabhängigen Funktionale positiv bleiben und stetig mit der Richtung variieren, mögen die Mengen A und B zunächst die Vereinigungsmengen von endlich vielen Kugeln positiver Radien darstellen. Nun betrachten wir die mit $A_{\xi,\eta}$ und $B_{\xi,\eta}$ zu bezeichnenden Orthogonalprojektionen von A bzw. B auf eine zu den nicht parallelen Richtungen ξ und η orthogonale $(n-2)$-dimensionale Ebene und merken an, daß diese nichts anderes darstellen als die Normalrisse von A_ξ bzw. B_ξ in der zu ξ senkrechten Richtung ζ, die zu der durch ξ und η bestimmten zweidimensionalen Ebene $E(\xi,\eta)$ parallel ist:

$$A_{\xi,\eta} = (A_\xi)_\zeta\ , \qquad B_{\xi,\eta} = (B_\xi)_\zeta \qquad (\zeta \perp \xi,\ \zeta \parallel E(\xi,\eta))\ . \tag{13}$$

Sodann untersuchen wir den Quotienten $q(\xi;\eta) = \left[\frac{M_{n-2}(B_{\xi,\eta})}{M_{n-2}(A_{\xi,\eta})}\right]^{\frac{1}{n-2}}$ und dessen Grenzen bei festem ξ und variablem η: $\underline{q}(\xi) = \min q(\xi;\eta)$, $\bar{q}(\xi) = \max q(\xi;\eta)$. Für zwei nicht parallele Richtungen ξ_1 und ξ_2 folgt aus $q(\xi_1;\xi_2) = q(\xi_2;\xi_1)$ unmittelbar $\underline{q}(\xi_1) \leq q(\xi_1;\xi_2) \leq \bar{q}(\xi_2)$, woraus sich

$$\max \underline{q}(\xi) \leq \min \bar{q}(\xi) \tag{14}$$

herleitet.

Man erkennt, daß sich jeder Richtung ξ auf Grund der Stetigkeit von $q(\xi;\eta)$ wegen (13) und (14) wenigstens eine Richtung $\eta_\xi \perp \xi$ zuordnen läßt, in der bei Benutzung der Abkürzung $\varrho = \frac{1}{2}[\max \underline{q}(\xi) + \min \bar{q}(\xi)]$ die Beziehung $q(\xi;\eta_\xi) = \varrho$ gültig ist. Es folgt, daß die Normalrisse $(\varrho A)_\xi$ und B_ξ in der Richtung η_ξ gleiches Quermaß besitzen:

$$M_{n-2}[((\varrho A)_\xi)_{\eta_\xi}] = M_{n-2}[(B_\xi)_{\eta_\xi}],$$

womit die Ungleichung (2) zur Anwendung gebracht werden kann:

$$W_0[(1-\lambda)\varrho A_\xi + \lambda B_\xi] \geq (1-\lambda)\varrho^{n-1} W_0(A_\xi) + \lambda W_0(B_\xi)\ .$$

Die Festlegung $\lambda = \frac{\varrho}{1+\varrho}$ führt nach einfacher Umformung zu

$$W_0(A_\xi + B_\xi) \geq (1+\varrho)^{n-2} W_0(A_2) + \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)^{n-2} W_0(B_\xi)\ .$$

Durch Integration über Ω_n gewinnt man daraus unter Beachtung der Definitionsformel (3)

$$W_1(A+B) \geq (1+\varrho)^{n-2} W_1(A) + \left(1+\frac{1}{\varrho}\right)^{n-2} W_1(B) .$$

Die Benutzung der Konkavitätseigenschaft der $(n-1)$-ten Wurzel liefert schließlich die gesuchte Ungleichung (1a) für $p = 1$.

Sind A und B beliebige beschränkte und abgeschlossene Mengen, so approximieren wir sie derart durch Mengen $A_\kappa \supseteq A$, $B_\kappa \supseteq B$ ($A_{\kappa+1} \subseteq A_\kappa$, $B_{\kappa+1} \subseteq B_\kappa$; $\varkappa = 1, 2, \ldots$), die sich jeweils als Vereinigungsmenge endlich vieler Kugeln positiven Inhalts darstellen, daß $A = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa$, $B = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa$ besteht. Die Gültigkeit von (1a) ($p = 1$) für die Mengenpaare A_κ, B_κ überträgt sich dann vermittels der Formeln (7) und (9) auch auf die Mengen A und B selbst.

3. Ungleichung (1b) Hat man (1a) für die Mengen $A - B \supset L$ und B notiert, so folgt (1b) in bekannter Weise [5]) daraus durch Anwendung der Beziehung (6).

§4 Die Vollständigkeit des Ungleichungssystems (1)

Das System (1) ist dann vollständig, wenn sich jedem Quadrupel z_1, z_2, z_3, z_4, das den Ungleichungen

$$\begin{aligned} z_3 &> z_1 + z_2 , & z_4 &< z_1 - z_2 , \\ z_2 &> 0 , & z_4 &> 0 \end{aligned} \tag{15}$$

genügt, derart beschränkte, abgeschlossene Mengen A, B zuordnen lassen, daß

$$\left.\begin{aligned} W_p(A) &= z_1^{n-p}, & W_p(B) &= z_2^{n-p} \\ W_p(A+B) &= z_3^{n-p}, & W_p(A-B) &= z_4^{n-p} \end{aligned}\right\} \; p = (0,1) \tag{16}$$

bei festem p besteht.

Um die Möglichkeit einer solchen Zuordnung zu zeigen, beziehen wir den Raum auf das kartesische Koordinatensystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und denken uns die Menge B durch den Würfel $|x_\nu| \leq \frac{b}{2}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ repräsentiert und die Menge A durch die Vereinigungsmenge aus dem Würfel $A_0\left(|x_\nu| \leq \frac{a_0}{2}\right)$, den k Hohlwürfeln $A_\kappa\left(\frac{a_\kappa'}{2} \leq |x_\nu| \leq \frac{a_\kappa}{2};\ \kappa = 1, \ldots k\right)$ und den Gitterpunkten mit den Koordinaten $x_\nu = \frac{\mu_\nu}{m} \cdot \frac{\alpha}{2}$ $(\mu_\nu = 0, \pm 1, \ldots \pm m)$

---

[5]) *H. Hadwiger* a. a. O.

dargestellt. Dabei mögen die vorkommenden Größen so gewählt sein, daß die Bedingungen $a_0 > b > 0$, $2mb > \alpha > a_k$, $2b > a_\kappa - a'_\kappa > 0$, $2b > a'_\kappa - a_{\kappa-1} > 0$ $(\kappa = 1, \ldots, k)$ eingehalten werden. (Fig. 1 zeigt ein solches Mengenpaar in der Ebene für $k = 2$ und $m = 3$.)

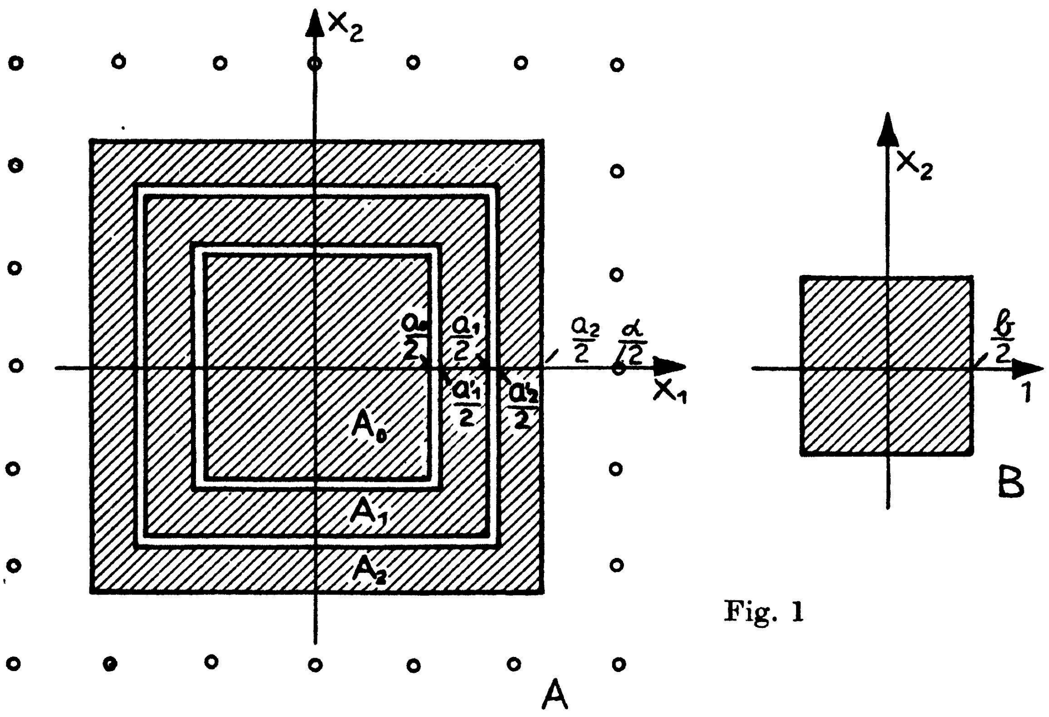

Fig. 1

Man erkennt nun sofort, daß $A + B$ und $A - B$ unter diesen Voraussetzungen Würfel der Kantenlängen $\alpha + b$ bzw. $a_0 - b$ abgeben.

Mit
$$c_p = \begin{cases} 1 & (p = 0) \\ 2^{\frac{1}{n-1}} & (p = 1) \end{cases} \quad \text{und} \quad a = \begin{cases} M_n(A)^{\frac{1}{n}} & (p = 0) \\ a_k & (p = 1) \end{cases}$$

ergibt sich daher, wie man leicht bestätigt:

$$\begin{aligned} W_p(A) &= (c_p a)^{n-p} & W_p(B) &= (c_p b)^{n-p} \\ W_p(A + B) &= \big(c_p(\alpha + b)\big)^{n-p} & W_p(A - B) &= \big(c_p(a_0 - b)\big)^{n-p} \end{aligned} \quad (p = 0, 1).$$

Die damit aus den Zuordnungen (12) folgenden Beziehungen $z_1 = c_p a$, $z_2 = c_p b$, $z_3 = c_p(\alpha + b)$, $z_4 = c_p(a_0 - b)$ liefern mit den Bedingungen (11) die Ungleichungen

$$\alpha > a > a_0 > b > 0 .$$

Da diese gemäß Konstruktion aber auch die einzigen Ungleichungen sind, durch die die vier Größen α, a, a_0, b eingeschränkt sind, lassen sich jedem (15) genügenden Quadrupel z_1, z_2, z_3, z_4 Paare der eben beschriebenen Mengen A, B angeben, für die (16) erfüllt ist.

(Eingegangen den 6. November 1953.)