Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum.

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **28 (1954)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22614

Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum

Von H. Hadwiger, Bern

Meinem Lehrer und Freund Willy Scherrer zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Im Rahmen einer axiomatischen Inhaltstheorie wird eine Menge *absolut meßbar* genannt, wenn ihr Inhalt bereits durch die der Theorie zugrundeliegenden Inhaltsaxiome eindeutig vorbestimmt ist. Einer solchen Menge wird demnach in allen individuellen Inhaltssystemen, in welchen sie noch meßbar ausfällt, stets ein und derselbe Inhalt, nämlich der *absolute Inhalt*, zukommen müssen. Die Mannigfaltigkeit der absolut meßbaren Mengen und der auf ihr definierte absolute Inhalt bilden unter Umständen[1]) selbst ein spezielles Inhaltssystem, welchem offenbar innerhalb der betreffenden axiomatischen Theorie eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt.

Für beschränkte Punktmengen des linearen Raumes wurden Existenz und Haupteigenschaften des absoluten Systems von *A. Tarski*[2]) nachgewiesen. Seine Konstruktion der absoluten Meßbarkeit stützt sich auf den Begriff der Zerlegungsgleichheit (Endlichgleichheit) linearer Punktmengen; eine Erweiterung auf k-dimensionale Punktmengen ist aber im Hinblick auf die bekannten *Banach-Tarski*schen Zerlegungsparadoxien[3]) für $k > 2$ unmöglich.

Dies ändert sich indessen, wenn man das klassische Postulat der Bewegungsinvarianz eines Inhalts fallen läßt und nur noch Translations-

---

1) Im euklidischen Raum ist hierzu jedenfalls erforderlich, daß mit den Axiomen nicht verlangt werde, das Inhaltsfeld sei ein Mengenring oder sogar ein Mengenkörper. Das Feld der absolut meßbaren Punktmengen ist nur additiv; der Durchschnitt absolut meßbarer Punktmengen ist i. a. nicht auch meßbar.

2) *A. Tarski,* Über das absolute Maß linearer Punktmengen, Fund. Math. 30, 1938, 218–234.

3) *St. Banach* und *A. Tarski,* Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math. 6, 1924, 244–277.

invarianz verlangt. Da diese Transformationsgruppe abelsch ist[4]), fallen die oben angedeuteten Schwierigkeiten weg; manche für den Ausbau der Inhaltslehre bedeutsame Entwicklungswege, welche innerhalb der klassischen Behandlungsweise verschlossen waren, stehen damit offen[5]).

Die vorliegende Abhandlung gibt einige erste Ansätze zu einer *translationsinvarianten axiomatischen Inhaltstheorie* für den k-dimensionalen euklidischen Raum und befaßt sich in erster Linie mit der Frage der absolut meßbaren Punktmengen.

In *Abschnitt I* werden die *Inhaltspostulate* (Axiome) gewählt. Ein Inhalt ist ein über einem translationsfreien, additiven und normalen Mengenfeld definiertes definites, translationsvariantes, additives und normiertes Mengenfunktional[6]). In *Abschnitt II* wird die *Deckungsmonotonie* eines Inhalts besprochen, eine Eigenschaft, welche für die vorgesehene Entwicklung der Theorie von Bedeutung ist. *Abschnitt III* bringt Definition und Haupteigenschaften eines speziellen *Ober- und Unterinhaltes*. Unsere Definition, die in dieser Form neu sein dürfte, schließt an die Verhältnisse an, die bezüglich der gegenseitigen Bedeckbarkeit endlich vieler, translationsgleicher Punktmengen und ebensolcher Einheitswürfel bestehen, wobei die Vielfachheiten der Überdeckung mitberücksichtigt werden[7]). In *Abschnitt IV* wird das zugehörige *Inhaltssystem* erklärt und Vergleiche mit

---

[4]) Nach sehr allgemeinen Ergebnissen von *J. von Neumann* (Zur allgemeinen Theorie des Maßes, Fund. Math. 13, 1929, 73–116) bestehen im Wirkungsraum einer Gruppe keine „paradoxen" Zerlegungsverhältnisse, wenn die Gruppe meßbar ist. Eine abelsche Gruppe ist meßbar, die k-dimensionale euklidische Bewegungsgruppe für $k > 2$ dagegen nicht.

[5]) Bei translationsinvariantem Aufbau ist das universelle Inhaltsproblem lösbar, d. h. es existieren in jedem euklidischen Raum *Banach*'sche Inhaltssysteme, wie sie von *St. Banach* (Sur le problème de la mesure, Fund. Math. 4, 1923, 7–33) für Gerade und Ebene in bewegungsinvarianter Behandlung nachgewiesen wurden und für welche jede beschränkte Punktmenge meßbar ist.

[6]) Es handelt sich um vier Forderungen, die sowohl in sachlicher als auch in historischer Beziehung besonders ausgezeichnet sind; neu gegenüber den üblichen Festsetzungen ist nur die Beschränkung auf Translationsinvarianz. Im einfacheren Rahmen eines allgemein einführenden Lehrbuchs ist der axiomatische Standpunkt innerhalb der Inhaltslehre besonders klar hervorgehoben bei *K. Knopp-H. v. Mangoldt*'s „Einführung in die höhere Mathematik", 3. Band, Leipzig 1942, 7. Auflage, Nr. 52.

In Spezialwerken über neuere und abstrakte Maßtheorie wird in der Regel keine Invarianzforderung in Betracht gezogen, schon deshalb nicht, weil in abstrakten Räumen keine besondere Transformationsgruppe von vornherein in gleichem Maße ausgezeichnet ist, wie die Bewegungs- und Translationsgruppe im euklidischen Raum.

Eine abstrakte und invarianzlose Inhalts- und Maßtheorie kann vermöge der vielfältigen und feinen Begriffsbildungen der neuzeitlichen Mengenlehre sehr weit vorgetrieben werden; sie bleibt jedoch in manchen Teilen formal.

[7]) Vgl. auch *H. Hadwiger*, Une mesurabilité moyenne pour les ensembles de points, Fund. Math. 34, 1947, 293–305. Die in dieser Note gewählten Ansätze sind mit den hier verwendeten verwandt.

klassischen Systemen gezogen. Da sich später herausstellen wird, daß diesem Inhaltssystem die Rolle des absoluten Systems zugesprochen werden kann, trägt es schon von Anfang an diesen Namen (absoluter Ober- und Unterinhalt, absoluter Inhalt). In *Abschnitt V* werden zwei verschieden definierte Äquivalenzen in Betracht gezogen (*Deckungs-* und *Zerlegungsäquivalenz*) und gezeigt, daß sie gleichwertig sind. Dieser Sachverhalt ermöglicht es, verschiedene neue Erkenntnisse zu erschließen. So ergibt sich (wie in Abschnitt VI dargelegt wird), die *Zerlegungsinvarianz* eines beliebigen deckungsmonotonen Inhalts[8]). Ferner kann gezeigt werden, daß absoluter Ober- und Unterinhalt die exakte obere und untere Schranke der Menge der Inhalte darstellen, welche der betreffenden Punktmenge in deckungsmonotonen Systemen zukommen. Hierbei ergibt sich auch die Bedeutung des absoluten Inhalts einer absolut meßbaren Punktmenge.

In Abschnitt VII wird der *äußere* und *innere Tarskische Inhalt*[9]) unabhängig vom Vorstehenden mit Hilfe des Begriffs der translativen Zerlegungsgleichheit definiert und dann gezeigt, daß diese mit den in III. eingeführten Ober- und Unterinhalten übereinstimmen. Damit ist erwiesen, daß das von uns entwickelte absolute Inhaltssystem mit dem den Ideen *Tarski*'s nachgebildeten identisch ist. Eine Punktmenge ist genau dann absolut meßbar, wenn sie mit einem Würfel zerlegungsäquivalent ist. Endlich wird in Abschnitt VIII noch eine weitere Konstruktion eines äußeren und eines inneren Inhaltes verfolgt, welche sich auf die Translation der Punktmenge im Einheitsgitter und auf die Anzahl der bedeckten Gitterpunkte stützt. Da hierbei Ideen verwertet werden, welche der *J. von Neumann*schen Theorie der Mittelwerte fastperiodischer Funktionen über Gruppen zugrundeliegen[10]), sind diese beiden Inhalte nach diesem Autor benannt. Es stellt sich wieder heraus, daß der *äußere* und *innere Neumannsche Inhalt* mit den in III. eingeführten absoluten Ober- und Unter-

---

[8]) Die bis anhin wenig beachtete Zerlegungsinvarianz des *Lebesgue*'schen Maßes wurde für lineare Punktmengen von *A. Tarski* (loc. cit.) bewiesen, allerdings auf dem Umwege über die Konstruktion *Banach*'scher Inhalte, die sich auf das Auswahlaxiom der Mengenlehre stützt. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß innerhalb der *Tarski*'schen Theorie eine Maßfunktion bereits als zerlegungsinvariant vorausgesetzt wird. Wegen dieses Umstandes ist es naturgemäß leichter, die Zusammenhänge zwischen dem absoluten Maß und beliebigen Maßfunktionen herzuleiten. Im Rahmen unserer Entwicklung zeigt es sich, daß alle diesbezüglichen, wesentlichen Ergebnisse *Tarski*'s sich auf beliebige Räume übertragen lassen, auch dann, wenn die Zerlegungsinvarianz des Inhalts nicht axiomatisch vorweggenommen wird.

[9]) loc. cit. 2).

[10]) *J. von Neumann*, Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc. 36, 1934, 445–492.

inhalten übereinstimmen. Unser absolutes Inhaltssystem ist so auch mit dem sich aus den Ideen *von Neumann*'s ergebenden identisch. Eine Punktmenge ist genau dann absolut meßbar, wenn die Bedeckungszahl im Punkteinheitsgitter als Funktion der Translation *ergodisch*[11]) ist. Der absolute Inhalt selbst ist ein *Neumann*scher Mittelwert dieser Funktion.

In diesem Zusammenhang ergibt sich noch eine Erweiterung eines bekannten Theorems von *A. F. Blichfeldt*[12]) und *W. Scherrer*[13]) auf beliebige beschränkte Punktmengen.

I. Inhaltspostulate

$A, B, C, ..$ sollen *Punktmengen* (kurz Mengen) des k-dimensionalen euklidischen Raumes R bezeichnen; Λ sei die leere Menge. Eine *Translation* α in R führe die Menge A in die Menge A^α über. Zwei Mengen heißen *translationsgleich*, symbolisch $A \cong B$, wenn $A^\alpha = B$ gilt. Besonders ausgezeichnet ist der *Einheitswürfel* E, der bezogen auf ein festbleibendes kartesisches Koordinatensystem durch das sich auf die Koordinaten seiner Punkte beziehende Ungleichungssystem $0 \leqslant x_i < 1 \, (i = 1, .. k)$ charakterisiert sei.

Eine Menge A ist *beschränkt*, wenn sie Teilmenge einer Vereinigungsmenge endlich vieler mit E translationsgleicher Mengen ist, symbolisch durch $A \subset \Sigma\, E^{\alpha_\nu}$ ausgedrückt[14]).

Alle im folgenden auftretenden Mengen werden stillschweigend als beschränkt vorausgesetzt.

Ein *Inhaltssystem* $(\mathfrak{F}, J)$ besteht aus einem *Inhaltsoperator* (Mengenfunktional) J und einem *Inhaltsfeld* (Definitionsfeld des Mengenfunktionals) $\mathfrak{F}$. Der Operator J ordnet jeder Menge A des Feldes $\mathfrak{F}$ eine reelle Zahl $J(A)$ zu, welche *Inhalt* heißt; A wird dann im betreffenden System *meßbar* genannt.

Innerhalb einer axiomatischen Inhaltstheorie werden für ein Inhaltssystem willkürlich, aber sinnvoll gewählte Forderungen – die *Inhalts-*

---

[11]) Vgl. über diesen Begriff: *W. Maak*, Integralmittelwerte auf Gruppen und Halbgruppen, J. reine angew. Math. **190**, 1952, 34–48.

[12]) *A. F. Blichfeldt*, A new principle in the geometry of numbers, with some applications, Trans. Amer. Math. Soc. **15**, 1914, 227–235.

[13]) *W. Scherrer*, Ein Satz über Gitter und Volumen, Math. Ann. **86**, 1922, 106–107.

[14]) Die besondere Form dieser Definition soll den Hinweis dafür geben, wie die Beschränktheit in einem abstrakten Raum bezogen auf eine beliebig gewählte Einheitsmenge E erklärt werden muß, wenn der wesentlichste Teil der folgenden Theorie, wie dies möglich ist, auf allgemeinere Räume mit abelscher Transformationsgruppe erweitert werden soll.

postulate – in Kraft gesetzt. Jedes Inhaltssystem, das den gesetzten Forderungen genügt, ist dann innerhalb dieser Inhaltstheorie zulässig, und es ist Aufgabe der betreffenden axiomatischen Theorie, die mannigfaltigen Verhältnisse und Fragen, die sich ergeben, möglichst umfassend abzuklären.

Die der hier vorliegenden Skizze einer axiomatischen Theorie zugrundegelegten Inhaltspostulate lauten wie folgt:

a) Ein *Inhaltsfeld* $\mathfrak{F}$ ist ein System beschränkter Punktmengen des Raumes R, welches den folgenden drei *Feldpostulaten* genügt:

(I_0) $\mathfrak{F}$ ist *translationsfrei*, d. h. aus $A \in \mathfrak{F}$ und $A \cong B$ folgt $B \in \mathfrak{F}$;

(II_0) $\mathfrak{F}$ ist *additiv*, d. h. aus $A, B \in \mathfrak{F}, AB = \Lambda$ folgt $A + B \in \mathfrak{F}$;

(III_0) $\mathfrak{F}$ ist *normal*, d. h. es gilt $E \in \mathfrak{F}$.

b) Ein *Inhaltsoperator* J ist ein für alle Mengen des Feldes $\mathfrak{F}$ definiertes, reellwertiges Mengenfunktional, welches den folgenden vier *Operationspostulaten* genügt:

(I) J ist *definit*, d. h. es gilt $0 \leqslant J(A) < \infty$;

(II) J ist *translationsinvariant*, d. h. es gilt $J(A) = J(B)$, falls $A \cong B$ ist;

(III) J ist *additiv*, d. h. es gilt $J(A + B) = J(A) + J(B)$, falls $AB = \Lambda$ ist;

(IV) J ist *normiert*, d. h. es gilt $J(E) = 1$.

Neben den durch die Feldpostulate (I_0) bis (III_0) vorgeschriebenen Eigenschaften kann ein Feld $\mathfrak{F}$ noch weitere zusätzliche Eigenschaften aufweisen. Im Hinblick auf klassische Inhaltssysteme erwähnen wir hier:

(IV_0) $\mathfrak{F}$ ist ein *Mengenkörper*, d. h. aus $A, B \in \mathfrak{F}$ folgt auch $A + B, A - B \in \mathfrak{F}$;

(V_0) $\mathfrak{F}$ ist ein *Mengenring*, d. h. aus $A, B \in \mathfrak{F}$ folgt auch $AB, A + B \in \mathfrak{F}$.

Eine Eigenschaft, die vor allem für Inhaltssysteme in Betracht kommt, welche innerhalb der hier entwickelten axiomatischen Theorie von Bedeutung sind, beruht auf dem Begriff der Zerlegungsgleichheit. Zwei Mengen A und B nennen wir *translativ-zerlegungsgleich* (kurz: zerlegungsgleich), geschrieben $A \simeq B$, wenn sie sich in je endlich viele disjunkte und paarweise translationsgleiche Mengen A_ν und B_ν zerlegen lassen, so daß also

$$A = \sum_1^n A_\nu \quad \text{und} \quad B = \sum_1^n B_\nu, \; A_\nu A_\mu = B_\nu B_\mu = \Lambda \, (\nu \neq \mu) \quad \text{und} \quad A_\nu \cong B_\nu$$

gilt. Wie man leicht verifiziert, ist die Zerlegungsgleichheit transitiv, d. h. aus $A \simeq B$ und $B \simeq C$ folgt $A \simeq C$.

Die in Aussicht gestellte Feldeigenschaft ist nun die folgende:

(VI_0) $\mathfrak{F}$ ist *zerlegungsfrei*, d. h. aus $A \in \mathfrak{F}$ und $A \simeq B$ folgt $B \in \mathfrak{F}$.

Selbstverständlich kann auch der Inhaltsoperator J weitere zusätzliche Eigenschaften aufweisen. Eine besondere Monotonieeigenschaft, die sich nicht aus den Operationspostulaten (I) bis (IV) ableiten läßt, wird für unsere Entwicklung sehr wesentlich sein, und wir setzen uns mit ihr einläßlicher im folgenden Abschnitt auseinander.

II. Deckungsmonotonie

Wir erklären weiter:

(V) J heißt *monoton*, wenn aus $A \subset B$ die Beziehung $J(A) \leqslant J(B)$ folgt.

Wenn das Feld $\mathfrak{F}$ ein Mengenkörper ist – vergleiche (IV_0) –, so ist (V) offensichtlich eine einfache Folgerung aus (I) bis (IV). Im andern Fall braucht J nicht monoton zu sein.

Wir wollen nun dieser bekannten, gewöhnlichen Monotonie eine etwas stärkere Eigenschaft – die *Deckungsmonotonie* – gegenüberstellen, einen Begriff, dessen Einführung (wie erst einläßliche Studien zeigen) durchaus lohnend ist.

Vorbereitend noch einige Erklärungen: Es bezeichne $[A]$ die charakteristische Funktion von A, d. h. eine im Raum R definierte Funktion, welche für Punkte von A den Wert 1 annimmt und sonst verschwindet. Es sei weiter $A_1, \ldots, A_n$ ein endliches System von Mengen – im folgenden *Auslegung* genannt – und es sei die dieser Auslegung zugeordnete Funktion $[A_1, \ldots, A_n]$ durch Ansatz $[A_1, \ldots, A_n] = \sum\limits_1^n [A_\nu]$ definiert. Es handelt sich um eine Funktion, welche ganzzahlige, nicht-negative Werte annimmt; der Funktionswert in einem Punkte P gibt die Vielfachheit der Bedeckung von P durch Mengen der Auslegung an.

Ist die Auslegung disjunkt, so daß $A_\nu A_\mu = \Lambda \, (\lambda \neq \mu)$ gilt, so ist $[A_1, \ldots, A_n]$ offensichtlich mit der charakteristischen Funktion der Vereinigungsmenge $\sum\limits_1^n A_\nu$ identisch.

Wir definieren jetzt:

(VI) J heißt *deckungsmonoton*, wenn aus $[A_1, \ldots, A_n] \leqslant [B_1, \ldots, B_m]$ die Beziehung $\sum\limits_1^n J(A_\nu) \leqslant \sum\limits_1^m J(B_\mu)$ folgt.

Ohne weiteres erkennt man, daß die gewöhnliche Monotonie (V) in der Deckungsmonotonie (VI) enthalten ist; denn $[A] \leqslant [B]$ ist mit $A \subset B$ gleichbedeutend.

Andererseits aber kann (VI) nicht allein aus (V) in Verbindung mit den Postulaten (I) bis (IV) gefolgert werden.

Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit werden sich ausschließlich auf deckungsmonotone Inhaltssysteme beziehen. Dies bedeutet indessen keine störende Einschränkung, da einerseits die klassischen Systeme diese Eigenschaft haben, sich also als spezielle Fälle unserer Theorie eingliedern lassen, und andererseits die von uns besonders untersuchten Systeme sich ebenfalls als deckungsmonoton herausstellen werden.

Es scheint, daß die in Betracht gezogene Deckungsmonotonie besonders ausgezeichnet ist, da sie als zusätzlich zu den üblichen Axiomen (I) bis (IV) hinzutretende Forderung einerseits noch schwach genug ist, um alle im Rahmen der axiomatischen Theorie wichtigen Systeme zuzulassen, andererseits aber stark genug, um die Theorie durch kräftige und abrundende Sätze zu einem befriedigenden Abschluß zu führen.

Als erstes beweisen wir nun ein für die Deckungsmonotonie hinreichendes

Kriterium 1. *Ein Inhaltssystem* $(\mathfrak{F}, J)$ *ist dann deckungsmonoton, wenn einer der drei folgenden Tatbestände erfüllt ist:*

a) $\mathfrak{F}$ *ist ein Mengenkörper;*

b) $\mathfrak{F}$ *ist ein Mengenring und* J *ist monoton;*

c) $\mathfrak{F}$ *ist zerlegungsfrei und* J *ist monoton.*

Den Beweis vorbereitend definieren wir: Eine Menge A heißt *zerlegungskleiner* als B, symbolisch $A \simeq\subset B$, wenn eine Menge A' so existiert, daß $A \simeq A'$ und $A' \subset B$ gilt. Diese Beziehung ist, wie man sich leicht überzeugt, wieder transitiv, d. h. aus $A \simeq\subset B$ und $B \simeq\subset C$ folgt $A \simeq\subset C$. Wir beweisen nun vorerst den folgenden

Hilfssatz 1. *Wenn die Relation* $[A_1, \ldots, A_n] \leqslant [B_1, \ldots, B_m]$ *besteht, so gilt für zwei disjunkte Auslegungen von mit den beteiligten Mengen* A_ν *bzw.* B_ν *translationsgleichen Mengen* A'_ν *bzw.* B'_ν *eine Zerlegungsbeziehung*

$$\sum_1^n A'_\nu \simeq\subset \sum_1^m B'_\nu$$

$$[A'_\nu \cong A_\nu\,;\ B'_\nu \cong B_\nu\,;\ A'_\nu A'_\mu = B'_\nu B'_\mu = \Lambda (\nu \neq \mu)]\,.$$

Die für die Realisierung der Zerlegungsbeziehung erforderlichen Teilmengen gehören alle zu dem durch die Mengen A_ν *und* B_ν *erzeugten Mengenring.*

Beweis: Es bezeichne U_i bzw. V_i die Menge der Punkte in R, wo $[A_1, \ldots, A_n] = i$ bzw. $[B_1, \ldots, B_m] = i$ ausfällt. Setzen wir

$$A_{\nu i} = A_\nu U_i \quad \text{bzw.} \quad B_{\nu i} = B_\nu V_i ,$$

so gilt sicher $A_\nu = \sum_{i=1}^{n} A_{\nu i}$ und $B_\nu = \sum_{i=1}^{m} B_{\nu i}$. Für eine disjunkte Auslegung der Mengen A'_ν läßt sich die Darstellung $\sum_1^n A'_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} A'_{\nu i})$ aufschreiben, wobei $A'_{\nu i} \cong A_{\nu i}$ gilt. Vertauschen wir die Reihenfolge in der Mengenaddition und bedenken wir, daß im Hinblick auf die Konstruktion der Menge U_i die Zerlegungsgleichheit $\sum_{\nu=1}^{n} A'_{\nu i} \simeq \sum_{\varrho=1}^{i} U_{i\varrho}$ besteht, wobei rechts eine disjunkte Auslegung von i verschiedenen Mengen $U_{i\varrho}$, $U_{i\varrho} \cong U_i$, $U_{i\varrho}\, U_{i\sigma} = \Lambda, (\varrho \neq \sigma)$ dargestellt ist, so erhalten wir $\sum_1^n A'_\nu \simeq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{i} U_{i\varrho}$. Analog ergibt sich $\sum_1^m B'_\nu \simeq \sum_{i=1}^{m} \sum_{\varrho=1}^{i} V_{i\varrho}$ und da nach der Voraussetzung des Hilfssatzes $U_i \subset V_i$ gelten muß, folgt die Behauptung $\sum_1^n A'_\nu \simeq \subset \sum_1^m B'_\nu$. Ferner sieht man leicht ein, daß sich die Mengen U_i bzw. V_i, also auch die Mengen $A_{\nu i}$ und $B_{\nu i}$ durch endlichfache Durchschnittsbildung aus den ursprünglich beteiligten Mengen A_ν und B_ν gewinnen lassen; sie gehören somit, wie behauptet, zu dem von diesen erzeugten Mengenring.

Die Behauptungen von Kriterium 1 ergeben sich nun mühelos aus dem Hilfssatz 1.

Wir wollen diesen Abschnitt abschließen, indem wir zeigen, daß 1. *nicht monotone* und 2. *monotone*, aber *nicht deckungsmonotone* Inhaltssysteme existieren.

Beispiel 1. Es sei $k = 1$. S bezeichne ein Intervall $a \leqslant x < a + s$ $(-\infty < a < \infty; s \geqslant 1$, ganz) und P einen Punkt $x = p (-\infty < p < \infty)$. $\mathfrak{F}$ sei nun das System aller Mengen A, die sich in endlich viele Punkte und Intervalle disjunkt zerlegen lassen, so daß $A = \sum_1^m P_\nu + \sum_1^n S_\mu$ gilt. Setzen wir $J(A) = m + \sum_1^n s_\mu$, so sind die Postulate ($\mathrm{I_0}$) bis ($\mathrm{III_0}$) und (I) bis (IV) erfüllt, so daß $(\mathfrak{F}, J)$ ein Inhaltssystem darstellt. Sind nun P und Q zwei in E enthaltene Punkte und setzt man $A = P + Q$, so gilt $A \subset E$; dagegen ist $2 = J(A) > J(E) = 1$. Die Monotonie (V) ist also verletzt.

Beispiel 2. Es sei wieder $k = 1$. S habe die gleiche Bedeutung wie in Beispiel 1 und T bezeichne weiter ein Intervall

$$a \leqslant x \leqslant a + t, (-\infty < a < \infty; t \geqslant 0) .$$

$\mathfrak{F}$ sei das System aller Mengen A, die sich in endlich viele Intervalle S und T disjunkt zerlegen lassen, so daß $A = \sum_1^n S_\nu + \sum_1^m T_\mu$ gilt. Wir setzen $J(A) = \sum_1^n s_\nu + \sum_1^m [t_\mu]$, wobei [ ] die Gauß'sche Klammer bedeutet, also $[t]$ die größte ganze Zahl darstellt, die nicht größer als t ist. Obwohl die Zerlegung einer Menge A dieser Art in S- und T-Intervalle nicht notwendig eindeutig ist, fällt doch der oben angesetzte Wert $J(A)$ für alle zulässigen Zerlegungen immer gleich aus, wie sich auf Grund der Bemerkung ergibt, daß für ganze s stets $[s + t] = s + [t]$ gilt. Man bestätigt sofort, daß $(\mathfrak{F}, J)$ ein Inhaltssystem ist, indem man die Gültigkeit der zuständigen Postulate überprüft. Ist nun $A \subset B$, so folgt auf Grund einfacher Überlegungen, daß $J(A) \leqslant J(B)$ wird; hierbei ist die Funktionalungleichung $[u] + [v] \leqslant [u + v]$ zu beachten. Die Monotonie (V) ist also gewährleistet. Andererseits betrachten wir die beiden Intervalle $P: 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ und $Q: \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, so daß $E \subset P + Q$ oder also auch $[E] \leqslant [P, Q]$ gilt. Nun ist aber $1 = J(E) > J(P) + J(Q) = 0$; die Deckungsmonotonie (VI) ist demnach verletzt.

III. Absoluter Ober- und Unterinhalt

Unter $n \cdot A$ ($n \geqslant 1$, ganz) wollen wir im folgenden eine Auslegung von n mit A translationsgleichen Mengen $A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_n}$ verstehen; formal ergänzend treffen wir noch die Konvention $0 \cdot A = A$. Bezeichnet wie im vorstehenden Abschnitt $[A]$ die charakteristische Funktion von A, so sei $[n \cdot A] = [A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_n}]$, wobei wie oben $[A^{\alpha_1}, \ldots A^{\alpha_n}] = \sum_1^n [A^{\alpha_\nu}]$ gesetzt ist. Diese symbolischen Abkürzungen sind für die einfache und übersichtliche Darstellung der hier skizzierten Theorie von Bedeutung. Wir geben jetzt die folgende

Definition 1. *Unter dem absoluten Oberinhalt $\overline{H}(A)$ bzw. dem absoluten Unterinhalt $\underline{H}(A)$ einer beschränkten Punktmenge A verstehen wir die durch die Ansätze*

$$\overline{H}(A) = \inf\ p/n\,;\ [n \cdot A] \leqslant [p \cdot E] \tag{1}$$

$$\underline{H}(A) = \sup\ p/n\,;\ [p \cdot E] \leqslant [n \cdot A] \tag{2}$$

erklärten unteren bzw. oberen Grenzen; bei ihrer Bildung sind alle Auslegungen der Menge A und des Einheitswürfels E mit $p \geqslant 0$ und $n \geqslant 1$ in Betracht zu ziehen, für welche die rechts geschriebenen Bedingungen realisiert werden.

Die Existenz der beiden in (1) und (2) angesetzten Schranken weisen wir weiter unten nach. Ebenso begründen wir weiter unten einige einfache Eigenschaften des absoluten Ober- und Unterinhaltes, die nun im Zusammenhang genannt werden sollen. Es gelten nämlich die Relationen:

$$0 \leqslant \underline{H}(A) \leqslant \overline{H}(A) < \infty \tag{3}$$

$$\underline{H}(A) \leqslant \underline{H}(B)\,;\ \overline{H}(A) \leqslant \overline{H}(B) \qquad (A \subset B) \tag{4}$$

$$\overline{H}(E) = \underline{H}(E) = 1 \tag{5}$$

$$\overline{H}(A) = \overline{H}(B)\,;\ \underline{H}(A) = \underline{H}(B) \qquad (A \cong B) \tag{6}$$

$$\overline{H}(A + B) \leqslant \overline{H}(A) + \overline{H}(B) \tag{7}$$

$$\underline{H}(A + B) \geqslant \underline{H}(A) + \underline{H}(B) \qquad (AB = \Lambda) \tag{8}$$

$$\overline{H}(n \cdot A) = n\overline{H}(A)\,;\ \underline{H}(n \cdot A) = n\underline{H}(A) \quad (n \cdot A \text{ disjunkt}) \tag{9}$$

$$\underline{H}(A) + \overline{H}(B) \leqslant \overline{H}(A + B) \qquad (AB = \Lambda) \tag{10}$$

$$\underline{H}(A + B) \leqslant \underline{H}(A) + \overline{H}(B) \qquad (AB = \Lambda) \tag{11}$$

Zunächst leiten wir einige weitere Hilfssätze ab, auf die wir uns auch bei späteren Beweisen stützen müssen.

Hilfssatz 2. *Aus* $[n \cdot E] \leqslant [m \cdot E]$ *folgt* $n \leqslant m$.

Beweis: Es bezeichne $\gamma_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ die Folge der Einheitsgittertranslationen in R, so daß durch die Gesamtheit der Würfel E^{γ_i} der ganze Raum R schlicht und lückenlos überdeckt wird. Für eine beliebige Translation α gilt dann die Identität $\sum\limits_1^\infty [E^{\alpha\gamma_i}] = 1$. Ist $n \cdot E$ die Auslegung $E^{\alpha_1}, \ldots E^{\alpha_n}$, so hat man

$$\sum_1^\infty [(n \cdot E)^{\gamma_i}] = \sum_{i=1}^\infty \sum_{\nu=1}^n [E^{\alpha_\nu \gamma_i}] = \sum_{\nu=1}^n \Big(\sum_1^\infty [E^{\alpha_\nu \gamma_i}]\Big)$$

oder im Hinblick auf die eben erwähnte Identität $\sum\limits_1^\infty [(n \cdot E)^{\gamma_i}] = n$. Analog gilt $\sum\limits_1^\infty [(m \cdot E)^{\gamma_i}] = m$ und mit Rücksicht auf die Voraussetzung folgt tatsächlich $n \leqslant m$.

Ein für die Beweistechnik leistungsfähiger Hilfsbegriff ist derjenige der *Produktauslegung*. Sind $n \cdot A = A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_n}$ und $m \cdot A = A^{\beta_1}, \ldots A^{\beta_m}$ zwei Auslegungen, so erklären wir die Produktauslegung $n \cdot (m \cdot A)$ durch $n \cdot (m \cdot A) = (m \cdot A)^{\alpha_1}, \ldots, (m \cdot A)^{\alpha_n} = A^{\beta_1 \alpha_1}, \ldots, A^{\beta_m \alpha_n}$. Infolge der Kommutativität der Translationsgruppe gilt offensichtlich $n \cdot (m \cdot A) = m \cdot (n \cdot A)$. Wir können die Produktauslegung auch mit $nm \cdot A$ bezeichnen.

Hilfssatz 3. *Sind* $n \cdot A$ und $m \cdot B$ *zwei Auslegungen, für welche*

$$[n \cdot A] \leqslant [m \cdot B] ,$$

und ist $p \cdot X$ *eine weitere Auslegung, so gilt* $[np \cdot A] \leqslant [mp \cdot B]$.

Beweis. Sei $p \cdot X = X^{\xi_1}, \ldots, X^{\xi_p}$; dann folgt

$$[np \cdot A] = [(n \cdot A)^{\xi_1}, \ldots, (n \cdot A)^{\xi_p}] \leqslant [(m \cdot B)^{\xi_1}, \ldots, (m \cdot B)^{\xi_p}] = [mp \cdot B] .$$

Hilfssatz 4. *Aus* $[n \cdot A] \leqslant [m \cdot B]$ *und* $[p \cdot B] \leqslant [q \cdot C]$ *folgt die Existenz zweier Produktauslegungen* $np \cdot A$ *und* $mq \cdot C$ *so, daß*

$$[np \cdot A] \leqslant [mq \cdot C]$$

gilt.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist $[np \cdot A] \leqslant [mp \cdot B]$, $[mp \cdot B] \leqslant [mq \cdot C]$, woraus die Behauptung sofort folgt.

Hilfssatz 5. *Gilt* $[q \cdot E] \leqslant [p \cdot E]$, *so gibt es zu einem beliebigen* $\varepsilon > 0$ *Auslegungen* $n \cdot (p \cdot E), n \cdot (q \cdot E)$ *und* $m \cdot E$ *so, daß*

$$[n \cdot (p \cdot E)] \leqslant [n \cdot (q \cdot E)] + [m \cdot E]$$

und weiter

$$m/n < p - q + \varepsilon$$

ausfällt.

Beweis. Es sei $q \cdot E = E^{\alpha_1}, \ldots, E^{\alpha_q}$ und $p \cdot E = E^{\beta_1}, \ldots, E^{\beta_p}$. Weiter sollen γ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ n Translationen des Einheitsgitters im Raum R so bezeichnen, daß die Gesamtheit $\sum\limits_1^n E^{\gamma_\nu}$ den Würfel

$$W\{0 \leqslant x_i < N, (i = 1, \ldots k), N \text{ ganz}\}$$

der Kantenlänge N schlicht und lückenlos überdeckt. Offenbar ist dann $n = N^k$. Es ist nun

$$[n \cdot (p \cdot E)] = \sum_1^n [(p \cdot E)^{\gamma_\nu}] = [W^{\beta_1}, \ldots, W^{\beta_p}] .$$

Bedeutet U die Vereinigungsmenge $W^{\beta_1} + \cdots + W^{\beta_p}$, so gilt demnach

$$[n \cdot (p \cdot E)] \leqslant p\,[U] . \tag{a}$$

Analog ist

$$[n \cdot (q \cdot E)] = \sum_1^n [(q \cdot E)^{\gamma_\nu}] = [W^{\alpha_1}, \ldots, W^{\alpha_q}]$$

und falls V den Durchschnitt $W^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot W^{\alpha_q}$ bedeutet, gilt entsprechend

$$q\,[V] \leqslant [n \cdot (q \cdot E)] . \tag{b}$$

Nach Konstruktion ist V durch N^k gitterförmig angeordnete Einheitswürfel überdeckt; einfache Erwägungen ergeben, daß sich die Menge $U - V$ durch cN^{k-1} gitterförmig angeordnete Einheitswürfel überdecken läßt, wo die Konstante c nicht von N, sondern nur von den unserer Betrachtung fest zugrunde liegenden Translationen α und β abhängig ist. Nach diesen beiden letzten Bemerkungen wird $[V] \leqslant [N^k \cdot E]$ und $[U - V] \leqslant [cN^{k-1} \cdot E]$. Rückgreifend auf (a) haben wir zunächst

$$[n \cdot (p \cdot E)] \leqslant p\,[U - V] + (p - q)\,[V] + q\,[V]$$

und in Verbindung mit (b) weiter

$$[n \cdot (p \cdot E)] \leqslant [pcN^{k-1} \cdot E] + [(p - q)\,N^k \cdot E] + [n \cdot (q \cdot E)]\,.$$

Wird noch $m = (p - q)\,N^k + pcN^{k-1}$ gesetzt, so bleibt endlich

$$[n \cdot (p \cdot E)] \leqslant [n \cdot (q \cdot E)] + [m \cdot E]\,,$$

wobei $m/n = p - q + pc/N$ ist. Da N beliebig groß gewählt werden kann, bestätigt sich die Behauptung mit $pc/N < \varepsilon$.

Wir weisen jetzt die Existenz der mit (1) und (2) angesetzten Schranken $\overline{H}(A)$ und $\underline{H}(A)$ nach und verifizieren dann ihre durch (3) bis (11) ausgedrückten Haupteigenschaften.

Da A beschränkt ist, gilt für eine ausreichende Auslegung $p \cdot E$ sicher $[1 \cdot A] = [A] \leqslant [p \cdot E]$; also gibt es natürliche Zahlenpaare n, p, für welche die Bedingung bei (1) erfüllt wird. Damit ist offenbar die Existenz von $\overline{H}(A)$ sichergestellt. Andererseits gilt $0 = [0 \cdot E] \leqslant [1 \cdot A]$, so daß auch Zahlenpaare n, p vorhanden sind, welche die Bedingung bei (2) erfüllen. Wir haben zu zeigen, daß die Menge der Quotienten p/n beschränkt ist.

Es gelte $[n' \cdot A] \leqslant [p' \cdot E]$ und $[p \cdot E] \leqslant [n \cdot A]$. Nach Hilfssatz 4 gilt dann auch $[n'p \cdot E] \leqslant [np' \cdot E]$ und nach Hilfssatz 2 folgt $n'p \leqslant np'$ oder $p/n \leqslant p'/n'$. Hieraus schließen wir mit (1) $p/n \leqslant \overline{H}(A)$. Damit ist offensichtlich die Existenz von $\underline{H}(A)$ nachgewiesen. Gleichzeitig folgt (3). Die Eigenschaften (4), (5) und (6) ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen (1) und (2). Wir beweisen (7): Es sei $[n \cdot A] \leqslant [p \cdot E]$ und $[m \cdot B] \leqslant [q \cdot E]$. Nach Hilfssatz 3 gilt dann $[nm \cdot A] \leqslant [pm \cdot E]$ und $[mn \cdot B] \leqslant [qn \cdot E]$, so daß $[nm \cdot A, nm \cdot B] \leqslant [(mp + nq) \cdot E]$. Wegen $[nm \cdot (A + B)] \leqslant [nm \cdot A, nm \cdot B]$ folgt so mit (1)

$$\overline{H}(A + B) \leqslant (p/n) + (q/m)$$

und nochmals mit (1) schließlich $\overline{H}(A + B) \leqslant \overline{H}(A) + \overline{H}(B)$, wzbw. Der Beweis von (8) verläuft analog, nur ist neu zu bedenken, daß dann

$[nm \cdot (A + B)] = [nm \cdot A, nm \cdot B]$ ausfällt, da $AB = \Lambda$ vorausgesetzt ist.

Wir beweisen jetzt (9): Nach wiederholter Anwendung von (7) ergibt sich

$$\overline{H}(n \cdot A) \leqslant n\overline{H}(A)\,. \tag{c}$$

Es gelte weiter $[m \cdot (n \cdot A)] = [mn \cdot A] \leqslant [q \cdot E]$; nach (1) ist demnach $\overline{H}(A) \leqslant q/nm$ und erneut nach (1)

$$n\overline{H}(A) \leqslant \overline{H}(n \cdot A)\,. \tag{d}$$

Mit (c) und (d) folgt $\overline{H}(n \cdot A) = n\overline{H}(A)$. Analog gewinnt man auch $\underline{H}(n \cdot A) = n\underline{H}(A)$, wzbw.

Schließlich weisen wir noch (10) nach: Es sei $[p \cdot E] \leqslant [n \cdot A]$ und $[m \cdot (A + B)] \leqslant [q \cdot E]$. Wegen $AB = \Lambda$ gilt

$$[m \cdot (A + B)] = [m \cdot A, m \cdot B] = [m \cdot A] + [m \cdot B]\,.$$

Für die sinngemäß gebildeten Produktauslegungen gilt

$$[nm \cdot A] + [nm \cdot B] \leqslant [nq \cdot E] \quad \text{und} \quad [pm \cdot E] \leqslant [nm \cdot A]\,.$$

Die Verbindung der beiden Relationen liefert

$$[pm \cdot E] + [nm \cdot B] \leqslant [nq \cdot E]\,. \tag{e}$$

Insbesondere ist $[pm \cdot E] \leqslant [nq \cdot E]$ und nach Hilfssatz 5 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen r und s, so daß einerseits

$$[r \cdot nq \cdot E] \leqslant [r \cdot pm \cdot E] + [s \cdot E] \tag{f}$$

und andererseits

$$(s/r) < nq - pm + \varepsilon \tag{g}$$

gilt. Greifen wir auf (e) zurück, so resultiert mit Bildung der entsprechenden Produktauslegungen

$$[r \cdot pm \cdot E] + [r \cdot nm \cdot B] \leqslant [r \cdot nq \cdot E]$$

und in Verbindung mit (f) folgt jetzt $[rnm \cdot B] \leqslant [s \cdot E]$. Damit schließen wir nach (1) zunächst auf $\overline{H}(B) \leqslant s/rnm$ und mit (g) hieraus weiter auf $\overline{H}(B) + (p/n) < (q/m) + (\varepsilon/nm)$; erneut nach (1) und (2) folgt $\underline{H}(A) + \overline{H}(B) \leqslant \overline{H}(A + B) + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt so die Behauptung (10); der Beweis von (11) verläuft analog.

IV. Absoluter Inhalt

Auf Grund der im vorstehenden Abschnitt untersuchten absoluten Ober- und Unterinhalte $\overline{H}(A)$ und $\underline{H}(A)$ konstruieren wir nun das *absolute Inhaltssystem.* Die gewählte Bezeichnungsweise wird, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, weiter unten durch die Gültigkeit gewisser Sätze gerechtfertigt werden, welche die ausgezeichnete Rolle dieses Systems innerhalb der axiomatischen Inhaltstheorie aufdecken.

Wir gehen aus von der folgenden

Definition 2. *Eine beschränkte Punktmenge A heißt absolut meßbar, wenn*

$$\overline{H}(A) = \underline{H}(A) = H(A) \tag{12}$$

ausfällt, d. h. wenn der absolute Oberinhalt mit dem absoluten Unterinhalt von A übereinstimmt. Den gemeinsamen Wert $H(A)$ nennen wir den absoluten Inhalt von A.

Es bezeichne $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller absolut meßbaren Mengen. Wir zeigen jetzt, daß $\mathfrak{H}$ ein Inhaltsfeld und H ein Inhaltsoperator ist. $(\mathfrak{H}, H)$ ist das absolute Inhaltssystem.

Für $\mathfrak{H}$ sind die Feldpostulate (I_0) bis (III_0) und für H die Operationspostulate (I) bis (IV) als gültig nachzuweisen. Die erforderlichen Schlüsse sind aber so einfach, daß wir uns darauf beschränken können, zu jedem Postulat nur stichwortartig die früheren Relationen zu zitieren, auf die man sich in ständiger Verbindung mit (12) berufen kann.

(I_0): (6); (II_0): (7), (8) und dann (3); (III_0): (5);
(I): (3); (II): (6); (III): (7), (8) und dann (3); (IV): (5).

Formelmäßig nochmals zusammengestellt handelt es sich also um die folgenden Eigenschaften des absoluten Inhalts:

$$0 \leqslant H(A) < \infty; \tag{13}$$

$$H(A) = H(B) \qquad (A \cong B) \tag{14}$$

$$H(A + B) = H(A) + H(B) \qquad (AB = \Lambda) \tag{15}$$

$$H(E) = 1 \tag{16}$$

Wir bemerken noch, daß $H(A)$ wohl additiv, aber sicher nicht volladditiv ist[15]).

---

[15]) Dies folgert man beispielsweise leicht auf Grund eines Ergebnisses von *J. von Neumann* (Fund. Math. 11, 1928, 230–238), wonach sich ein abgeschlossener Würfel in abzählbar viele paarweise disjunkte, translationsgleiche Teilmengen zerlegen läßt.

Die Feldeigenschaften (IV_0) oder (V_0) sind nicht realisiert, d. h. das absolute Feld $\mathfrak{H}$ ist kein Mengenkörper, nicht einmal ein Mengenring, dagegen hat es die wesentliche Eigenschaft (VI_0), d. h. $\mathfrak{H}$ ist *zerlegungsfrei.* Dies können wir allerdings erst im folgenden Abschnitt beweisen. Auf Grund dieser Tatsache ergibt sich indirekt, daß $\mathfrak{H}$ kein Mengenring sein kann; andernfalls würde sich nämlich leicht schließen lassen, daß jede beschränkte Menge absolut meßbar wäre, was nicht zutrifft. Die Existenz nicht absolut meßbarer Mengen ergibt sich für $k > 2$ leicht aus den paradoxen Zerlegungen nach *Banach-Tarski* in Verbindung mit der am Ende von Abschnitt VII gewonnenen Einsicht, daß $\mathfrak{H}$ bewegungsfrei und H bewegungsinvariant ist.

Dagegen ist die Eigenschaft (V) realisiert: es ist

$$H(A) \leqslant H(B)\,, \quad \text{falls} \quad A \subset B\,, \tag{17}$$

d. h. H ist *monoton.* Dies folgt aus (4). Daß auch (VI) gilt, d. h. daß H auch *deckungsmonoton* ist, können wir erst im folgenden Abschnitt beweisen.

Zusätzlich fügen wir noch die folgenden Relationen bei: Es gilt für eine absolut meßbare Menge A und jede Menge B nach (7), (8), (10) und (11)

$$\overline{H}(A + B) = H(A) + \overline{H}(B) \qquad (AB = A) \tag{18}$$

$$\underline{H}(A + B) = H(A) + \underline{H}(B) \qquad (AB = A)\,. \tag{19}$$

Diese Aussagen stehen in engem Zusammenhang mit dem folgenden

Kriterium 2[16]**).** *A ist dann und nur dann absolut meßbar, wenn eine der beiden Relationen*

$$\overline{H}(A + B) = \overline{H}(A) + \overline{H}(B) \tag{20}$$

$$\underline{H}(A + B) = \underline{H}(A) + \underline{H}(B) \tag{21}$$

für alle Mengen B zutreffend ist.

Beweis. Daß das Kriterium notwendig ist, folgt aus (18) und (19); daß es auch hinreicht, zeigen wir wie folgt: Es sei A eine vorgegebene Menge, und es gelte etwa (20) für jede Menge B. Da A beschränkt ist, gibt es eine absolut meßbare Menge C, die A enthält. C läßt sich etwa aus einer ausreichenden Anzahl gitterförmig angeordneter Einheitswürfel zusammensetzen. Ist nun $B = C - A$, so ergibt sich nach (20) und (11):

$$\overline{H}(A) + \overline{H}(B) = \overline{H}(A + B) = H(C) = \underline{H}(A + B) \leqslant \underline{H}(A) + \overline{H}(B)$$

[16]) Dieses Kriterium folgt den Ideen *Carathéodorys,* wie sie in seiner Maßtheorie zum Ausdruck kommen. Vgl. etwa „Reelle Funktionen", 1. Auflage 1918, 246 ff.

oder $\overline{H}(A) \leqslant \underline{H}(A)$. Hieraus folgt mit (3): $\overline{H}(A) = \underline{H}(A)$, also ist A absolut meßbar.

Weiter erwähnen wir noch eine *Teilbarkeitseigenschaft* des Feldes $\mathfrak{H}$: Ist $n \cdot A$ eine disjunkte Auslegung und gehört von den beiden Mengen A und $n \cdot A$ eine zu $\mathfrak{H}$, so trifft dies auch für die andere zu und es gilt

$$H(n \cdot A) = nH(A) . \tag{22}$$

Dies ist eine einfache Folge von (9) in Verbindung mit der Definition (12).

Endlich geben wir noch einen kurzen Hinweis über das Verhältnis zwischen dem absoluten Inhaltssystem und den klassischen Systemen.

Bezeichnet $(\mathfrak{J}, I)$ das *Jordan*sche Inhaltssystem, so gilt $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}$, d. h. *jede im Jordanschen Sinne meßbare Menge A ist absolut meßbar*, und es gilt

$$H(A) = I(A) . \tag{23}$$

Umgekehrt gibt es absolut meßbare Mengen, welche nicht einmal im *Lebesgue*schen Sinne meßbar sind. Dies ergibt sich aus den Tatsachen, daß das Feld $\mathfrak{L}$ des *Lebesgue*schen Systems $(\mathfrak{L}, L)$ ein Mengenkörper, das Feld $\mathfrak{H}$ aber zerlegungsfrei ist, in Verbindung mit dem Umstand, daß es Mengen gibt, die nicht L-meßbar sind.

Der Nachweis der Aussage $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}$ und der Relation (23) ist einfach: Die Behauptung ist richtig für die Einheitsmenge E, also nach der oben erwähnten Teilbarkeitseigenschaft von $\mathfrak{H}$ und (22) in Verbindung mit den translativen und additiven Eigenschaften auch für Würfel pE, die aus E durch Dilatation mit einem rationalen p hervorgehen, ferner auch für rationale Würfelmengen, die sich in disjunkte Würfel der Art pE zerlegen lassen. Es sei nun zunächst A eine beliebige beschränkte Menge und U und V zwei rationale Würfelmengen, so daß $V \subset A \subset U$ gilt. Unter Verwertung der Monotonie-Eigenschaften schließt man sodann

$$I(V) = \underline{H}(V) \leqslant \underline{H}(A) \leqslant \overline{H}(A) \leqslant \overline{H}\ (U) = I(U)$$

und mit Berufung auf die klassischen Definitionen für den äußeren und inneren *Jordan*schen Inhalt $I(A)$ und $\underline{I}(A)$ ergibt sich schließlich die Relation

$$\underline{I}(A) \leqslant \underline{H}(A) \leqslant \overline{H}(A) \leqslant \overline{I}(A) , \tag{24}$$

aus der die Behauptung in vollem Umfang folgt.

Ein Vergleich mit dem *Lebesgue*schen System liefert keine zu (24) analoge Relation zwischen den Maßzahlen $\overline{L}(A), \underline{L}(A)$ einerseits und $\overline{H}(A), \underline{H}(A)$ andererseits. Dagegen läßt sich zeigen: Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned} L(A) &= \overline{H}(A) \quad \text{für jede abgeschlossene Punktmenge } A\ ; \\ L(A) &= \underline{H}(A) \quad \text{für jede offene Punktmenge } A\ . \end{aligned} \tag{25}$$

Der Nachweis stützt sich indessen auf die erst im Abschnitt VI hergeleitete Beziehung (28), deren Anwendung auf L-meßbare Mengen[17]) zunächst

$$\underline{\underline{H}}(A) \leqslant L(A) \leqslant \overline{\overline{H}}(A) \tag{a}$$

ergibt. Ist nun A abgeschlossen, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ noch eine I-meßbare Menge X, so daß $A \subset X$ und $I(X) < L(A) + \varepsilon$ ausfällt. Mit (4) folgt $\overline{\overline{H}}(A) \leqslant \overline{\overline{H}}(X)$ und mit (23) $\overline{\overline{H}}(X) = H(X) = I(X)$, so daß $\overline{\overline{H}}(A) < L(A) + \varepsilon$ oder also

$$\overline{\overline{H}}(A) \leqslant L(A) \tag{b}$$

gilt. Aus (a) und (b) ergibt sich (25) für abgeschlossene Mengen; analog schließt man für offene Mengen.

V. Deckungs- und Zerlegungsäquivalenz

Wir führen nun zwei auf verschiedene Art definierte Äquivalenzen ein. Weitere Fortschritte und neue Einsichten innerhalb unserer axiomatischen Inhaltstheorie werden sich dann dadurch ergeben, daß nachfolgend die Gleichwertigkeit der beiden Äquivalenzen aufgewiesen wird. Der damit gewonnene Äquivalenzbegriff ist der axiomatischen Inhaltstheorie insofern vollkommen angemessen, als sich herausstellen wird, daß zwei Mengen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie in allen deckungsmonotonen Inhaltssystemen, in welchen sie beide meßbar sind, übereinstimmenden Inhalt aufweisen.

Wir geben nun die folgende

Definition 3. *Zwei beschränkte Punktmengen A und B nennen wir dekkungsäquivalent, symbolisch $A \sim B$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen n, p und m, q und zugehörige Auslegungen so existieren, daß*

$$[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B] + [p \cdot E]$$

und gleichzeitig

$$[m \cdot B] \leqslant [m \cdot A] + [q \cdot E]$$

gilt, wobei $p/n < \varepsilon$ und $q/m < \varepsilon$ ausfällt.

Daß die *Deckungsäquivalenz reflexiv* und *symmetrisch* ist, folgt unmittelbar; daß sie auch *transitiv* ist, weist man mühelos nach, indem man sich in passender Weise eines bereits wiederholt angewendeten Verfahrens bedient, das mit den Produktauslegungen operiert.

---

[17]) (28) gilt für deckungsmonotone Inhalte. Dies trifft nach Kriterium 1 für $L(A)$ zu, da das Feld $\mathfrak{L}$ ein Mengenkörper ist.

Wir schließen hier gleich an die

Definition 4. *Zwei beschränkte Punktmengen A und B nennen wir zerlegungsäquivalent, symbolisch $A \approx B$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Relationen*

$$A \simeq\subset B + \varepsilon E \quad \text{und} \quad B \simeq\subset A + \varepsilon E$$

gelten, wobei ϵE ein durch Dilatation mit ϵ aus E hervorgehender Würfel ist. Er sei in eine solche Lage verschoben, daß er mit A und B keine Punkte gemeinsam hat.

Daß die *Zerlegungsäquivalenz reflexiv* und *symmetrisch* ist, folgt wieder unmittelbar; daß sie auch *transitiv* ist, ergibt sich sehr leicht mit Rücksicht darauf, daß dies für die Relation $\simeq\subset$ (*zerlegungskleiner*) gilt.

Wir formulieren nun das erste Hauptergebnis unserer Theorie, welches die Gleichwertigkeit der beiden oben definierten Äquivalenzen aussagt. Es gilt der folgende

Satz 1. *Zwei beschränkte Punktmengen A und B sind dann und nur dann zerlegungsäquivalent, wenn sie auch deckungsäquivalent sind; aus $A \approx B$ folgt $A \sim B$ und umgekehrt.*

Beweis.

$$\text{Aus} \quad A \approx B \quad \text{folgt} \quad A \sim B\,. \tag{a}$$

1. Fall: Es sei A mit B 2-stufig zerlegungsgleich, symbolisch $A \overset{2}{\simeq} B$, so daß man durch eine passende Verschiebung die Beziehungen

$$A = U + V \quad \text{und} \quad B = U + V^{\alpha}$$

herstellen kann. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}[A, A^{\alpha}, \ldots, A^{\alpha^{n-1}}] &= \sum_{0}^{n-1} [A^{\alpha^{\nu}}] = \sum_{0}^{n-1} [U^{\alpha^{\nu}}] + \sum_{0}^{n-1} [V^{\alpha^{\nu}}] \\ &= [U^{\alpha^{n-1}}] + [V] + \sum_{0}^{n-2} [B^{\alpha^{\nu}}]\,.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $[1 \cdot U] \leqslant [1 \cdot B]$ und $[1 \cdot V] \leqslant [1 \cdot B] \leqslant [p \cdot E]$ ist, wobei p nicht von dem willkürlich wählbaren n abhängt, so folgt

$$[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B] + [p \cdot E]\,,$$

während $p/n < \varepsilon$ erzielt werden kann. Da man hier A und B vertauschen darf, folgt $A \sim B$.

2. Fall: Es sei A mit B s-stufig zerlegungsgleich, symbolisch $A \overset{s}{\simeq} B$, so daß $A = \sum_1^s U_\nu$ und $B = \sum_1^s U_\nu^{\alpha_\nu}$ geschrieben werden kann. Wir setzen jetzt

$$A_0 = \sum_1^s U_\nu = A\,, A_i = \sum_1^i U_\nu^{\alpha_\nu} + \sum_{i+1}^s U_\nu \quad \text{und somit} \quad A_s = \sum_1^s U_\nu^{\alpha_\nu} = B\,.$$

Nun erkennt man, daß die konsekutiven Mengen A_i und A_{i+1} 2-stufig zerlegungsgleich sind, also $A_0 \overset{2}{\simeq} A_1 \overset{2}{\simeq} \ldots\ldots \overset{2}{\simeq} A_s$; nach dem ersten Fall folgt somit $A_0 \sim A_1 \sim \ldots\ldots \sim A_s$ und in Verbindung mit der Transitivität der Relation $\sim$ schließlich $A_0 \sim A_s$ oder $A \sim B$.

3. Fall: Es sei $A \approx B$ oder also erstens

$$A \simeq A' \subset B + \varepsilon E \quad (0 < \varepsilon < 1)\,.$$

Nach dem 2. Fall ist $A \sim A'$, so daß zwei natürliche Zahlen n und p vorhanden sind, welche die Relation

$$[n \cdot A] \leqslant [n \cdot A'] + [p \cdot E] \quad \text{mit} \quad p/n < \varepsilon \tag{a}$$

erfüllen. Weiter ist offenbar

$$[n \cdot A'] \leqslant [n \cdot B] + [n \cdot \varepsilon E]\,. \tag{b}$$

Da εE absolut meßbar ist, gibt es nach den Definitionen 1 und 2 und nach (23) zwei natürliche Zahlen m und q so, daß die Relation

$$[m \cdot \varepsilon E] \leqslant [q \cdot E] \quad \text{mit} \quad q/m < \varepsilon^k + \varepsilon < 2\varepsilon \tag{c}$$

gilt. Durch Verbindung von (a), (b) und (c) mit Bildung geeigneter Produktauslegungen gewinnt man

$$[mn \cdot A] \leqslant [mn \cdot B] + [(mp + nq) \cdot E]\,,$$

wobei $(mp + nq)/mn = (p/n) + (q/m) < 3\varepsilon$ ausfällt. Da man A und B vertauschen kann, indem zweitens auch $B \simeq B' \subset A + \varepsilon E$ gilt, folgt $A \sim B$, wzbw.

$$\text{Aus } A \sim B \text{ folgt } A \approx B\,. \tag{b}$$

Es gibt zwei natürliche Zahlen n und m, für welche die Relation

$$[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B] + [m \cdot E]$$

besteht, wobei $m/n < \varepsilon$ ist. Wenn s eine natürliche Zahl bezeichnet, für welche $\sqrt[k]{n} \geqslant s > \sqrt[k]{n} - 1$ gilt, so kann E durch eine disjunkte

Auslegung $n \cdot (1/s)\, E$ überdeckt werden, so daß $[m \cdot E] \leqslant [n \cdot m \cdot (1/s) E]$ und also $[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B,\, n \cdot m \cdot (1/s)\, E]$ richtig ist.

Nach Hilfssatz 1 gibt es disjunkte Auslegungen $n \cdot A, n \cdot B$ und $n \cdot (m \cdot (1/s)\, E)$, für welche die Zerlegungsbeziehung

$$n \cdot A \simeq \subset n \cdot B + n \cdot (m \cdot (1/s)\, E)$$

besteht. Nach einem Theorem von *D. König* und *S. Valkó*[18]) folgert man hieraus

$$A \simeq \subset B + m \cdot (1/s)\, E\,.$$

Nun gilt weiter

$$m \cdot (1/s)\, E \simeq \subset (2 \sqrt[k]{m/s})\, E\,,$$

da der Inhalt des Würfelpolyeders links kleiner ist als der Würfelinhalt rechts (Verhältnis $1:2^k$). So ergibt sich

$$A \simeq \subset B + \varepsilon' E\,,$$

wo $\varepsilon' = 2\sqrt[k]{m/s} < 4\sqrt[k]{m/n} < 4\sqrt[k]{\varepsilon}$ wird, falls $n \geqslant 2^k$ ist, was ohne Einschränkung vorausgesetzt werden kann. Da man offensichtlich auch hier A und B vertauschen darf, folgt $A \approx B$ wzbw.

VI. Äquivalenz und Inhalt

Wir bringen nun die im vorstehenden Abschnitt eingeführten Äquivalenzbegriffe mit der Inhaltstheorie in Beziehung. Zunächst gewinnen wir aus der festgestellten Gleichwertigkeit von Deckungs- und Zerlegungsäquivalenz als einfache Folgerung gewisse Sätze, welche die *Zerlegungsinvarianz* eines deckungsmonotonen Inhalts ausmachen.

Wir wenden uns vorerst dem absoluten Inhaltssystem $(\mathfrak{H}, H)$ zu. Hier gelten die Relationen

$$\overline{H}(A) = \overline{H}(B), \quad \underline{H}(A) = \underline{H}(B) \qquad (A \simeq B)\,, \tag{26}$$

d. h. die absoluten Ober- und Unterinhalte sind einzeln bereits *zerlegungsinvariant*.

Hieraus folgt jetzt, daß das absolute Feld $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft (VI_0) hat, also *zerlegungsfrei* ist. Ist A eine absolut meßbare Menge, so ist auch jede

---

[18]) *D. König* und *S. Valkó*, Über mehrdeutige Abbildungen, Math. Ann. **95** 1925, 135–138. Vgl. auch *A. Tarski*, Über Äquivalenz der Mengen in bezug auf eine beliebige Klasse von Abbildungen, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928, Bd. 2, 243–252.

mit ihr zerlegungsgleiche Menge B absolut meßbar, und es gilt die Beziehung $H(A) = H(B)$.

Da weiter nach (17) H auch monoton ist, folgt mit Kriterium 1, daß H die Eigenschaft (VI) aufweist, also *deckungsmonoton* ist.

Wir beweisen jetzt (26): Mit $A \simeq B$ gilt nach Definition 4 erst recht $A \approx B$ und also nach Satz 1 auch $A \sim B$. Nach Definition 3 gilt somit $[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B] + [p \cdot E]$ mit $p/n < \varepsilon$. Es sei ferner $[m \cdot B] \leqslant [q \cdot E]$. Für die passenden Produktauslegungen gilt nun

$$[nm \cdot A] \leqslant [(nq + mp) \cdot E]$$

und hieraus folgt mit (1) $\overline{H}(A) \leqslant (q/m) + (p/n)$ und erneut nach (1) $\overline{H}(A) \leqslant \overline{H}(B) + \varepsilon$, also schließlich $\overline{H}(A) \leqslant \overline{H}(B)$. Man kann A und B vertauschen, so daß sich der erste Teil von (26) ergibt; der Beweis des zweiten Teils verläuft analog.

Es sei jetzt $(\mathfrak{F}, J)$ ein deckungsmonotones, im übrigen aber beliebiges Inhaltssystem. Wir zeigen, daß der Inhalt stets *zerlegungsinvariant* ist, d. h. daß die Relation

$$J(A) = J(B) \qquad (A \simeq B) \tag{27}$$

gilt. Wenn das Feld $\mathfrak{F}$ zerlegungsfrei ist, ergibt sich natürlich die Zerlegungsinvarianz als Folgerung aus den Inhaltspostulaten. Die Bedeutung der Aussage liegt nun darin, daß der Inhalt auch dann zerlegungsinvariant ausfällt, wenn das Feld nicht zerlegungsfrei ist, wie das bei den klassischen Systemen (*Jordan*, *Lebesgue*) zutrifft.

Für den Beweis von (27) schließt man zunächst gleich wie beim vorausgehenden Beweis von (26) auf eine Relation $[n \cdot A] \leqslant [n \cdot B] + [p \cdot E]$ mit $p/n < \varepsilon$. Nach der vorausgesetzten Deckungsmonotonie (VI) ziehen wir die Folgerung $nJ(A) \leqslant nJ(B) + p$, und somit weiter

$$J(A) < J(B) + \varepsilon \quad \text{oder also} \quad J(A) \leqslant J(B)\,.$$

Auch hier kann man A und B vertauschen, so daß sich (27) ergibt.

Wir lassen jetzt das absolute Inhaltssystem mit einem beliebigen dekkungsmonotonen Inhaltssystem in Beziehung treten und beweisen die folgende wichtige Relation:

Ist $J(A)$ ein deckungsmonotoner Inhalt, so gilt für jede J-meßbare Menge

$$\underline{H}(A) \leqslant J(A) \leqslant \overline{H}(A)\,. \tag{28}$$

Eine einfache Folgerung ist die folgende Aussage:

Ist $J(A)$ ein deckungsmonotoner Inhalt, so gilt für jede J-meßbare Menge A, welche gleichzeitig absolut meßbar ist:

$$J(A) = H(A). \tag{29}$$

Damit wird bereits die entscheidende charakteristische Eigenschaft der Maßzahlen $\underline{H}(A)$, $\overline{H}(A)$ und $H(A)$ angedeutet, welche die gewählte Bezeichnungsweise zu rechtfertigen vermag. Ein vollständigeres Urteil gestatten indessen erst die weiter unten bewiesenen Sätze.

Zum Beweis von (28) sei $[n \cdot A] \leqslant [p \cdot E]$, so daß mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Deckungsmonotonie (VI) auf $nJ(A) \leqslant p$ oder $J(A) \leqslant p/n$ geschlossen wird. Mit (1) folgt jetzt $J(A) \leqslant \overline{H}(A)$. Der Nachweis von $\underline{H}(A) \leqslant J(A)$ verläuft analog.

Wir gehen jetzt auf eine Aussage ein, die in gewissem Sinne eine Umkehrung von (28) darstellt.

Ist ω ein beliebiger im Intervall $\underline{H}(A) \leqslant \omega \leqslant \overline{H}(A)$ gelegener Zahlwert, so existiert ein deckungsmonotoner Inhalt, für welchen

$$J(A) = \omega \tag{30}$$

gilt.

Dies zeigt, daß die absoluten Ober- und Unterinhalte die exakten oberen und unteren Schranken der Menge der Inhaltswerte darstellen, die der Punktmenge in deckungsmonotonen Systemen zukommen können.

Beweis: Ist A absolut meßbar, so liefert der Ansatz $J(A) = H(A)$ eine Lösung. Es sei A nicht absolut meßbar. Wir betrachten das System $\mathfrak{F}$ aller Mengen X, für welche eine Äquivalenz $X \sim U + p \cdot A$ besteht, wobei p innerhalb der Reihe der nicht negativen ganzen Zahlen und U innerhalb des Feldes $\mathfrak{H}$ der absolut meßbaren Mengen unabhängig variieren sollen. Die Auslegungen $p \cdot A$ der gegebenen Menge A seien disjunkt und auch zu U fremd.

Nun setzen wir $J(X) = H(U) + p\omega$ und zeigen, daß dieser der Menge X zugewiesene Zahlwert $J(X)$ eindeutig durch X bestimmt ist. In der Tat: Gilt etwa $X \sim U + p \cdot A$ und gleichzeitig $X \sim V + q \cdot A$, so ist offenbar auch $U + p \cdot A \sim V + q \cdot A$. Wie beim Beweis von (26) gezeigt wurde, haben äquivalente Mengen den gleichen absoluten Oberinhalt, so daß zunächst $\overline{H}(U + p \cdot A) = \overline{H}(V + q \cdot A)$ folgt. Nach (18) und in Verbindung mit (9) ergibt sich

$$H(U) + p\overline{H}(A) = H(V) + q\overline{H}(A). \tag{a}$$

Eine analoge Betrachtung mit dem absoluten Unterinhalt führt zu

$$H(U) + p\underline{H}(A) = H(V) + q\underline{H}(A)\,. \tag{b}$$

Subtrahiert man die beiden letzten Relationen (a) und (b), so erhält man

$$(p - q)\,(\overline{H}(A) - \underline{H}(A)) = 0\,.$$

Da A nicht absolut meßbar ist, muß der zweite Faktor positiv sein, so daß sich $p = q$ ergibt. Aus (a) folgt weiter, daß $H(U) = H(V)$ sein muß, und damit sind die der Menge X auf Grund der beiden verschiedenen Darstellungen zugeordneten Zahlwerte $J(X)$ gleich.

Wir wollen nun zeigen, daß das System $\mathfrak{F}$ ein Inhaltsfeld und J ein in $\mathfrak{F}$ definierter Inhaltsoperator ist. Die Feldpostulate (I_0) bis (III_0) und die Operationspostulate (I) bis (IV) sind aber mit Rücksicht auf die Konstruktion von $\mathfrak{F}$ und J evident. Zusätzlich zeigen wir noch, daß J die Eigenschaft (V) hat, also *monoton* ist.

Es sei $X = U + p \cdot A$, $Y = V + q \cdot A$ und weiter $X \subset Y$. Mit (4) schließen wir zunächst auf $\underline{H}(X) \leqslant \underline{H}(Y)$ und $\overline{H}(X) \leqslant \overline{H}(Y)$ und mit (18) und (19) in Verbindung mit (9) hieraus auf

$$H(U) + p\underline{H}(A) \leqslant H(V) + q\underline{H}(A) \tag{c}$$

und

$$H(U) + p\overline{H}(A) \leqslant H(V) + q\overline{H}(A)\,. \tag{d}$$

1. Fall:

$p \leqslant q$; wegen $\underline{H}(A) \leqslant \omega$ folgt aus (c) $H(U) + p\,\omega \leqslant H(V) + q\,\omega$.

2. Fall:

$q \leqslant p$; wegen $\omega \leqslant \overline{H}(A)$ folgt aus (d) $H(U) + p\,\omega \leqslant H(V) + q\,\omega$.

In beiden Fällen hat sich $J(X) \leqslant J(Y)$ ergeben, wzbw.

Nun folgt weiter, daß J auch die Eigenschaft (VI) aufweist, also *deckungsmonoton* ist. Da nämlich $\mathfrak{F}$ nach Konstruktion sicher zerlegungsfrei ist, folgt auf Grund der soeben nachgewiesenen Monotonie die Deckungsmonotonie nach Kriterium 1. Mit der Bemerkung, daß $J(A) = \omega$ ist, schließt der Beweis von (30).

Wir wollen nun die Ergebnisse (28), (29) und (30) zusammengefaßt formulieren in

Satz 2: *Ist* $(\mathfrak{F}, J)$ *ein deckungsmonotones Inhaltssystem, so gilt für jede Menge* $A \in \mathfrak{F}$ *die Ungleichung* $\underline{H}(A) \leqslant J(A) \leqslant \overline{H}(A)$; *gilt außerdem* $A \in \mathfrak{H}$, *so ist insbesondere* $J(A) = H(A)$, *so daß der Inhalt einer absolut-meßbaren Menge in jedem deckungsmonotonen System gleich aus-*

fällt und mit dem absoluten Inhalt identisch ist. Umgekehrt gibt es zu jedem Zahlwert ω *des Intervalls* $\underline{H}(A) \leqslant \omega \leqslant \overline{H}(A)$ *ein deckungsmonotones Inhaltssystem* $(\mathfrak{F}, J)$, *für welches* $J(A) = \omega$ *wird.*

Eine in gewissem Sinne abschließende Aussage über das Verhältnis der Äquivalenz zur axiomatischen Inhaltstheorie wird ausgesagt durch das folgende

Kriterium 3. *Zwei Mengen A und B sind dann und nur dann äquivalent (deckungsäquivalent* $A \sim B$, *zerlegungsäquivalent* $A \approx B$), *wenn in jedem deckungsmonotonen Inhaltssystem, in welchem sie beide gleichzeitig meßbar sind,* $J(A) = J(B)$ *ausfällt.*

Die Aussage „nur dann" ist im Hinblick auf die vorstehenden Ergebnisse klar; die Aussage „dann" ist jedoch nur unvollkommen belegt und die vollständige Beweisführung würde eine noch weitergehende Entwicklung unserer Theorie in der Richtung zur Konstruktion universeller oder *Banach*scher Inhaltssysteme erforderlich machen, was im Rahmen dieser Abhandlung nicht geschehen kann.

VII. Der Tarskische Inhalt

Im folgenden verallgemeinern wir einen von *A. Tarski*[19]) für lineare Punktmengen eingeführten Maßbegriff für k-dimensionale Punktmengen. Diese Erweiterung ist möglich, weil wir unsere Theorie translationsinvariant aufgebaut haben und demnach auch nur translative Zerlegungsgleichheit in Betracht ziehen. Da die Translationsgruppe abelsch ist, gibt es nach bekannten, allgemein gewonnenen Einsichten keine Zerlegungsparadoxien im Sinne der Sätze von *St. Banach* und *A. Tarski*[20]). Die Nichtexistenz paradoxer Zerlegungen ist indessen bereits implizite in der innerhalb unserer Theorie bewiesenen Zerlegungsinvarianz des Inhalts enthalten. Wird die Bewegungsgruppe der Theorie zugrundegelegt, so kann der Satz von der Gleichwertigkeit von Deckungs- und Zerlegungsäquivalenz für mehrdimensionale Räume nicht mehr bewiesen werden; unsere Begründung stützte sich wesentlich auf die Kommutativität der Translationen.

Wir geben nun die folgende, den Ansätzen von *A. Tarski* nachgebildete

Definition 5. *Für eine beschränkte Punktmenge A setzen wir*

$$\overline{T}(A) = \inf \lambda^k; \qquad A \simeq \subset \lambda E \tag{31}$$

[19]) loc. cit. 2).
[20]) loc. cit. 3).

und analog

$$\underline{T}(A) = \sup \lambda^k; \qquad \lambda E \simeq \subset A \tag{32}$$

und nennen $\overline{T}(A)$ den äußeren, $\underline{T}(A)$ den inneren Tarskischen Inhalt. Die Ermittlung der unteren und oberen Grenzen erstreckt sich über alle λ, für welche die rechts hingeschriebenen Zerlegungsrelationen erfüllbar sind. Ist $\overline{T}(A) = \underline{T}(A) = T(A)$, so nennen wir $T(A)$ den Tarskischen Inhalt.

Der Existenznachweis von $\overline{T}(A)$ und $\underline{T}(A)$ ist in der weiter unten folgenden Begründung des Hauptergebnisses dieses Abschnitts mit enthalten. Dieses wird durch die beiden folgenden Aussagen wiedergegeben:

Es gelten die Identitäten

$$\overline{T}(A) = \overline{H}(A); \quad \underline{T}(A) = \underline{H}(A). \tag{33}$$

Beweis: Es sei $A \simeq \subset \lambda E$, also $A \simeq A' \subset \lambda E$, so daß mit (26) und (4) folgt: $\overline{H}(A) = \overline{H}(A') \leqslant \overline{H}(\lambda E)$. Wegen (23) ist

$$\overline{H}(\lambda E) = H(\lambda E) = \lambda^k,$$

so daß auf $\overline{H}(A) \leqslant \lambda^k$ und mit (31) weiter auf

$$\overline{H}(A) \leqslant \overline{T}(A) \tag{a}$$

geschlossen werden kann.

Andererseits gehen wir von einer Relation $[n \cdot A] \leqslant [p \cdot E]$ aus, bei der nach Hilfssatz 1 auf eine Zerlegungsrelation $n \cdot A \simeq \subset p \cdot E$ geschlossen werden kann, für die die beteiligten Auslegungen disjunkt sind. Wird λ so gewählt, daß $\lambda^k > p/n$ ist, so gilt wieder mit disjunkten Auslegungen eine Zerlegungsrelation $p \cdot E \simeq \subset n \cdot \lambda E$, da das Würfelpolyeder rechts einen größeren Inhalt aufweist als das linksstehende. Mit der Transitivität der Relation $\simeq \subset$ folgt nun $n \cdot A \simeq \subset n \cdot \lambda E$, nach dem bereits früher angewendeten Theorem von *D. König* und *S. Valkó* schließlich $A \simeq \subset \lambda E$ und mit (31) $\overline{T}(A) \leqslant \lambda^k$. Im Hinblick auf unsere Konstruktion ergibt sich $\overline{T}(A) \leqslant p/n$ und mit (1) also auch

$$\overline{T}(A) \leqslant \overline{H}(A). \tag{b}$$

Die Ergebnisse (a) und (b) verifizieren die Behauptung $\overline{T}(A) = \overline{H}(A)$. Der Nachweis für $\underline{T}(A) = \underline{H}(A)$ verläuft analog.

Mit dieser Feststellung, durch welche die völlige Übereinstimmung des *Tarski*schen Systems mit dem von uns entwickelten absoluten System aufgewiesen ist, können wir hier abbrechen, da sich alle Ergebnisse einzeln vom absoluten System auf das *Tarski*sche System $(\mathfrak{T}, T)$ überschreiben lassen.

Wir formulieren lediglich noch eine Charakterisierung der absolut-meßbaren Mengen, die sich aus dieser Gegenüberstellung ergibt:

Kriterium 4. *Eine Menge A ist dann und nur dann absolut meßbar, (im Tarskischen Sinne meßbar), wenn sie mit einem Würfel λE äquivalent ist (deckungsäquivalent $A \sim \lambda E$, zerlegungsäquivalent $A \approx \lambda E$). Insbesondere ist dann $H(A) = T(A) = \lambda^k$.*

Da kongruente Würfel translativ zerlegungsgleich sind, ergibt sich leicht, daß kongruente Würfel in unserem Sinne äquivalent sind. Mit Kriterium 4 schließt man hieraus auf eine weitere Eigenschaft des absoluten Systems: Das Feld $\mathfrak{H} = \mathfrak{T}$ ist *bewegungsfrei* und der absolute Inhalt $H = T$ ist *bewegungsinvariant.*

VIII. Der Neumannsche Inhalt

Im folgenden entwickeln wir eine Konstruktion eines Inhalts, die auf der Anzahl der von der Menge im Einheitsgitter bedeckten Gitterpunkte beruht. Wird die Menge relativ zum Gitter verschoben, so erscheint diese Anzahl als Funktion über der Translationsgruppe. Für meßbare Mengen wird es sich um eine ergodische Funktion handeln, und der Inhalt selbst läßt sich als Mittelwert im Sinne von *J. von Neumann* interpretieren. Aus diesem Grunde sprechen wir vom *Neumannschen Inhalt.*

Die Definition vorbereitend, erklären wir die folgenden Hilfsbegriffe: Es sei wie früher $[A]$ die charakteristische Funktion der Menge A. Bezeichnet noch P den veränderlichen Punkt im Raum R, so schreiben wir für die gleiche Funktion auch $[A\,;\,P]$, falls es erforderlich sein sollte, die Veränderliche P besonders hervortreten zu lassen. Es bedeute nunmehr G das Punkteinheitsgitter im Raum R, dessen Punkte ganzzahlige Koordinaten haben. Die Anzahl der von der Menge A bedeckten Gitterpunkte ist dann durch $g(A) = \sum\limits_{j} [A\,;\,P_j]$ gegeben, wobei sich die Summation über die irgendwie abgezählte Folge $(P_j\,;\,j = 1, 2, \ldots)$ der Gitterpunkte von G zu erstrecken hat. Wegen der Beschränktheit der Menge A reduziert sich diese Summation auf eine endliche.

Ist $A_1, \ldots, A_n$ eine Auslegung von n Mengen A_ν und τ eine Translation, so setzen wir weiter $g(A_1^\tau, \ldots, A_n^\tau) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} g(A_\nu^\tau)$, wobei wie ersichtlich alle Mengen der Auslegung simultan verschoben sind. Ist wie früher $n \cdot A$ eine Auslegung von n zu A translationsgleichen Mengen, so ist $g\,[(n \cdot A)^\tau]$ analog erklärt.

Wir geben nun die folgende

Definition 6. *Für eine beschränkte Punktmenge A setzen wir*

$$\overline{N}(A) = \inf_n \operatorname*{Max}_\tau \frac{1}{n} g\,[(n \cdot A)^\tau] \tag{34}$$

$$\underline{N}(A) = \sup_n \operatorname*{Min}_\tau \frac{1}{n} g\,[(n \cdot A)^\tau] \tag{35}$$

und nennen $\overline{N}(A)$ den äußeren, $\underline{N}(A)$ den inneren Neumannschen Inhalt. Die Ermittlung des Maximums bzw. des Minimums erstreckt sich bei fester Auslegung $n \cdot A$ über alle Translationen τ und diejenige des Infimums bzw. des Supremums über alle Auslegungen. Ist $\overline{N}(A) = \underline{N}(A) = N(A)$, so nennen wir $N(A)$ den Neumannschen Inhalt.

Die Existenz von $\overline{N}(A)$ und $\underline{N}(A)$ ist hier eine einfache Folgerung aus der Beschränktheit von A.

Weiter unten beweisen wir als Hauptergebnis dieses Abschnitts die folgenden beiden Aussagen:

Es gelten die Identitäten

$$\overline{N}(A) = \overline{H}(A)\,; \quad \underline{N}(A) = \underline{H}(A)\,. \tag{36}$$

Den Beweis vorbereitend, formulieren wir den folgenden

Hilfssatz 4. *Bezeichnen $\overline{G}(A) = \operatorname*{Max}_\tau g(A^\tau)$ und $\underline{G}(A) = \operatorname*{Min}_\tau g(A^\tau)$ die größte und die kleinste Anzahl Gitterpunkte, welche durch die relativ zum Gitter G passend verschobene Menge A bedeckt werden, so gilt die Ungleichung*

$$\underline{G}(A) \leqslant \underline{H}(A) \leqslant \overline{H}(A) \leqslant \overline{G}(A)\,. \tag{37}$$

Unser Hilfssatz stellt eine Erweiterung des bekannten Theorems von *A. F. Blichfeldt* und *W. Scherrer*[21]) dar, das sich auf I-meßbare Mengen bezieht und dessen Inhalt durch die Ungleichung $\underline{G}(A) \leqslant I(A) \leqslant \overline{G}(A)$ wiedergegeben werden kann, die im Hinblick auf (23) als Korollar zu (37) erscheint. In Anlehnung an den Wortlaut des soeben erwähnten Theorems läßt sich unser Ergebnis etwa auch so aussprechen:

Eine beliebige beschränkte Punktmenge A läßt sich im Punkteinheitsgitter G immer so verschieben, daß die Anzahl der durch A bedeckten Gitterpunkte nicht kleiner als der absolute Oberinhalt $\overline{H}(A)$ bzw. nicht größer als der absolute Unterinhalt $\underline{H}(A)$ ausfällt.

---

[21]) loc. cit. 12), 13).

Beweis von Hilfssatz 4. Wir fixieren eine Translation τ durch die k achsenparallelen Komponenten $t_i, i = 1, \ldots, k$. Es sei jetzt Ω die Menge der Translationen τ, für welche $0 < t_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, k$ gilt. Es handelt sich um die Restklasse der Translationsgruppe bezüglich der Gittergruppe. Es besteht nun die disjunkte Zerlegung $\Omega = \Sigma\, \Omega_\lambda$, wobei Ω_λ die Teilmenge derjenigen $\tau \in \Omega$ bezeichnet, für die $g(A^\tau) = \lambda$ ausfällt. Setzen wir nun $A_\lambda = \Sigma\, A G^{-\tau}$, $\tau \in \Omega_\lambda$, also gleich der Vereinigungsmenge aller Durchschnitte von A mit den verschobenen Gittern $G^{-\tau}$, wo τ wie rechts angedeutet Ω_λ durchläuft, so besteht die disjunkte Zerlegung

$$A = \sum_\lambda A_\lambda . \tag{a}$$

Ist P_0 der Koordinatenursprung (Gitterpunkt P_0), so setzen wir weiter $E_\lambda = \Sigma\, P_0^{-\tau}$; $\tau \in \Omega_\lambda$. Offensichtlich gilt die disjunkte Zerlegung

$$E' = \sum_\lambda E_\lambda , \tag{b}$$

wobei E' einen mit E translationsgleichen Einheitswürfel bedeutet. Aus der Konstruktion oben folgert man mit einigen einfachen Überlegungen, daß die Zerlegungsrelation

$$A_\lambda \simeq \lambda \cdot E_\lambda \tag{c}$$

besteht. Mit $\underline{G} \leqslant \lambda \leqslant \overline{G}$ folgert man aus (a), (c), (b) die Zerlegungsbeziehung $A \simeq \subset \overline{G} \cdot E$ und $\underline{G} \cdot E \simeq \subset A$ mit disjunkten Auslegungen von E, so daß sich nun mit (26), (4), (9), (5) die Ungleichungen $\overline{H}(A) \leqslant \overline{G}$ und $\underline{G} \leqslant \underline{H}(A)$ ergeben, wzbw.

Beweis von (36). Mit Rücksicht auf die Gitterperiodizität von $g(A^\tau)$ ist es keine Einschränkung, in (34) und (35) die Auslegungen $n \cdot A$ disjunkt vorauszusetzen. Dies sei hier nun stets der Fall.

Nach Hilfssatz 4 gilt zunächst $\overline{H}(n \cdot A) \leqslant \overline{G}(n \cdot A) = \operatorname{Max}_\tau g\,[(n \cdot A)^\tau]$; unter Verwendung von (9) folgt $\overline{H}(A) \leqslant (1/n) \operatorname{Max}_\tau g\,[(n \cdot A)^\tau]$ und mit (34) hieraus

$$\overline{H}(A) \leqslant \overline{N}(A) . \tag{d}$$

Andererseits sei $[n \cdot A] \leqslant [p \cdot E]$ und damit $g\,[(n \cdot A)^\tau] \leqslant g\,[(p \cdot E)^\tau]$. Mit $g(E^\tau) = 1$ folgt $g\,[(p \cdot E)^\tau] = p$; so folgert man aus der oben stehenden Beziehung leicht $\operatorname{Max}_\tau (1/n)\, g\,[(n \cdot A)^\tau] \leqslant p/n$ oder nach (34) $\overline{N}(A) \leqslant p/n$. Mit (1) schließt man auf

$$\overline{N}(A) \leqslant \overline{H}(A) . \tag{e}$$

Aus (d) und (e) folgt $\overline{N}(A) = \overline{H}(A)$. Der Beweis für $\underline{N}(A) = \underline{H}(A)$ verläuft analog.

Damit ist die vollständige Übereinstimmung des *Neumann*schen Systems $(\mathfrak{N}, N)$ mit dem absoluten nachgewiesen. Sämtliche sich auf das absolute System sich beziehenden Ergebnisse können einzeln auf das *Neumann*sche System übertragen werden.

Aus dieser erneuten Gegenüberstellung ergibt sich eine weitere Charakterisierung der absolut meßbaren Mengen. Wir formulieren das

Kriterium 5. *Eine Menge A ist dann und nur dann absolut meßbar (im Neumannschen Sinn meßbar), wenn die Gitterpunktsanzahl $g(A^\tau)$ der verschobenen Menge A als Funktion über der Translationsgruppe ergodisch ist. Der absolute Inhalt (Neumannsche Inhalt) $H(A) = N(A)$ selbst ist der Mittelwert von $g(A^\tau)$ im Sinne von J. von Neumann.*

Beweis. a) $g(A^\tau)$ sei ergodisch. Zu einem $\varepsilon > 0$ gibt es n Translationen $\alpha_\nu, \nu = 1, \ldots, n,$ und eine Zahl g, so daß für alle Translationen τ

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n g\,(A^{\alpha_\nu \tau}) - g \right| < \varepsilon$$

ausfällt. Bedeutet $n \cdot A$ die Auslegung $A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_n}$, so läßt sich auch schreiben

$$g - \varepsilon < \operatorname{Min} \frac{1}{n}\, g\,[(n \cdot A)^\tau] \leqslant \operatorname{Max} \frac{1}{n}\, g\,[(n \cdot A)^\tau] < g + \varepsilon$$

und mit (34) und (35) $g - \varepsilon < \underline{N}(A) \leqslant \overline{N}(A) < g + \varepsilon$. Das bedeutet aber $\underline{N}(A) = \overline{N}(A)$, also wegen (36) auch $\underline{H}(A) = \overline{H}(A)$.

b) A sei absolut meßbar. Aus $\underline{H}(A) = \overline{H}(A)$ folgt mit (36)

$$\underline{N}(A) = \overline{N}(A) = g$$

und nach (34) und (35) gibt es zu einem $\varepsilon > 0$ zwei Auslegungen $p \cdot A = A^{\alpha_1}, \ldots, A^{\alpha_p}$ und $q \cdot A = A^{\beta_1}, \ldots, A^{\beta_q}$, für welche

$$\operatorname{Max} \frac{1}{p}\, g\,[(p \cdot A)^\tau] < g + \varepsilon \qquad \text{und ebenso} \qquad g - \varepsilon < \operatorname{Min} \frac{1}{q}\, g\,[(q \cdot A)^\tau]$$

ausfällt. Ist $pq \cdot A$ die aus $p \cdot A$ und $q \cdot A$ gebildete Produktauslegung, so folgert man leicht, daß auch

$$g - \varepsilon < \operatorname{Min} \frac{1}{pq}\, g\,[(pq \cdot A)^\tau] \leqslant \operatorname{Max} \frac{1}{pq}\, g\,[(pq \cdot A)^\tau] < g + \varepsilon$$

gilt. Führen wir noch die $n = pq$ Translationen

$$\gamma_1 = \alpha_1 \beta_1, \ldots, \gamma_n = \alpha_p \beta_q$$

ein, so läßt sich auch

$$\left| \frac{1}{n} \sum_1^n g(A^{\gamma_\nu \tau}) - g \right| < 2\varepsilon$$

für alle Translationen τ schließen; dies bedeutet, daß $g(A^\tau)$ ergodisch ist.

(Eingegangen den 13. April 1953.)