Ein vollständiges Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz.

Ein vollständiges Ungleichungssystem für Minkowskische Summe und Differenz

Von D. Ohmann, Frankfurt a. M.

Es ist leicht einzusehen, daß die bekannten Ungleichungen für die Minkowskische Summe und Differenz zweier konvexer Körper A und $B \subseteq A$ des euklidischen R_n:

$$\begin{aligned} V(A+B)^{\frac{1}{n}} &\geq V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B)^{\frac{1}{n}} \\ V(A-B)^{\frac{1}{n}} &\leq V(A)^{\frac{1}{n}} - V(B)^{\frac{1}{n}} \end{aligned} \tag{1}$$

auch unter Hinzunahme der Bedingungen

$$V(A-B) \geq 0 \qquad V(B) \geq 0 \tag{2}$$

kein vollständiges Ungleichungssystem bilden, das heißt daß sie keineswegs alle Ungleichungen erschöpfen, die für die vier Volumina $V(A)$, $V(B)$, $V(A+B)$ und $V(A-B)$ bestehen. Im Falle $n = 2$ lassen sich die Ungleichungen (1) jedoch durch das verschärfende Ungleichungspaar

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad F(A+B) + F(A-B) \geq 2\big(F(A) + F(B)\big) \\ &\text{(b)} \quad 2F(A-B)^{\frac{1}{2}} F(A)^{\frac{1}{2}} \leq 3F(A) + F(B) - F(A+B) \end{aligned} \tag{3}$$

für den Flächeninhalt F ersetzen, das mit (2) und $F(A) \geq F(A-B)$ ein vollständiges System bildet. Dies Ergebnis läßt sich in folgender Weise scharf formulieren:

Zu jedem Quadrupel x_1, x_2, x_3, x_4 lassen sich dann und nur dann konvexe Bereiche A und $B \subseteq A$ der euklidischen Ebene angeben, für die

$$F(A) = x_1\,; \quad F(B) = x_2\,; \quad F(A+B) = x_3\,; \quad F(A-B) = x_4 \tag{4}$$

statthat, wenn das Quadrupel dem unabhängigen Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad x_1 \geq x_4 \geq 0\,; \qquad x_2 \geq 0 \\ &\text{(b)} \quad x_3 + x_4 \geq 2(x_1 + x_2) \\ &\text{(c)} \quad 2\,|\,x_1 x_4\,|^{\frac{1}{2}} \leq 3x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned} \tag{5}$$

genügt.

1. Vorbemerkungen. Bei Benutzung der auf die Richtung φ der äußeren Stütznormalen bezogenen Stützfunktion $h(\varphi)$ wird die Minkowskische Summe $A + B$ der beiden konvexen Bereiche A und B bekanntlich durch den konvexen Bereich dargestellt, für dessen Stützfunktion

$$h(A + B\,; \varphi) = h(A\,; \varphi) + h(B\,; \varphi) \tag{6}$$

gilt. Da $h(A\,;\varphi) - h(B\,;\varphi) \geq 0$ für $A \supseteq B$ ausfällt, läßt sich die Minkowskische Differenz $A - B$ als Durchschnitt aller den Ursprung enthaltenden Halbebenen erklären, die von den Geraden der äußeren Normalenrichtung φ begrenzt werden, die vom Ursprung den Abstand $h(A\,;\varphi) - h(B\,;\varphi)$ haben. Daraus folgt

$$h(A - B\,; \varphi) \leq h(A\,; \varphi) - h(B\,; \varphi)\ . \tag{7}$$

Die Minkowskischen Differenzen sind damit mit den von G. Bol[1]) eingeführten Relativ-Parallelbereichen nach innen identisch. Andrerseits steht obige auf konvexe Bereiche beschränkte Definition offensichtlich zu der von H. Hadwiger[2]) für beliebige Mengen gegebenen nicht im Widerspruch.

Unsern Definitionen kann man nun unmittelbar

$$A + B = B + A\ , \qquad (A + B) + C = A + (B + C) \tag{8}$$

$$(A + B) - B = A\ , \qquad (A - B) + B \subseteq A \tag{9}$$

und ebenfalls leicht[3])

$$(A - B) - C = A - (B + C)\ , \quad (A \supseteq B + C) \tag{10}$$

entnehmen. Zum Beweis von (10) zeigt man die Richtigkeit von $A - (B + C) \subseteq (A - B) - C$ und $(A - B) - C \subseteq A - (B + C)$ indem man von der ersten (zweiten) der beiden aus (8) und (9) zu folgernden Ungleichungen

$$[A - (B + C)] + C + B \subseteq A \quad \text{und} \quad [(A-B)-C]+(B+C) \subseteq A$$

beiderseits nacheinander B und C (gleichzeitig $B + C$) subtrahiert.

---

[1]) *G. Bol*, Beweis einer Vermutung von *H. Minkowski* (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15 (1943), S. 37—56.

[2]) *H. Hadwiger*, Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen ... (Math. Z. 53 (1950/51) S. 210—218).

[3]) *H. Hadwiger*, a. a. O.

Für den gemischten Inhalt

$$F(A\,;B) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} h(A\,;\varphi)\,ds(B\,;\varphi) \qquad (s(B\,;\varphi) = \text{Bogenlänge von } B)$$

folgt aus (7) und (8) noch

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad F(A+B\,;C) = F(A\,;C) + F(B\,;C) \\ &\text{(b)} \quad F(A-B\,;C) \leq F(A\,;C) - F(B\,;C) \end{aligned} \tag{11}$$

und schließlich auch die Minkowskische Formel

$$F(A+B) = F(A) + 2F(A\,;B) + F(B)\ . \tag{12}$$

Zur Anwendung der von G. Bol[4]) benutzten Methode der Relativ-Parallelbereiche nach innen haben wir bei variablem τ noch die Bereiche $A_\tau = A + \tau B$ ins Auge zu fassen, für die sich aus (11) und (12) die Beziehungen

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \frac{dF(A_\tau\,;C)}{d\tau} = F(B;C) \qquad (\tau > 0) \\ &\text{(b)} \quad \left.\frac{dF(A_\tau\,;C)}{d\tau}\right|_{\inf} = \liminf_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\left(F(A_{(\tau+\delta)}\,;C) - F(A_\tau\,;C)\right) \geq F(B;C) \\ &\qquad\qquad (\tau < 0;\ \delta > 0) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{dF(A_\tau)}{d\tau} = 2F(A_\tau\,;B) \tag{14}$$

gewinnen lassen. Die dabei zunächst nur auf $\tau > 0$ beschränkte Gültigkeit der Gleichung (14) erweitert sich nach G. Bol auch auf $\tau < 0$.

2. Die Ungleichungen 3.

a) Wegen (12) ist (3a) erwiesen, wenn wir die Richtigkeit der Ungleichung

$$\Phi(A, B) \equiv F(A-B) + 2F(A\,;B) - F(A) - F(B) \geq 0$$

dargetan haben. Dazu betrachten wir die Bereiche $A_\tau = A + \tau B$; $B_\tau = B + \tau B$, für die wir unter Beachtung von (9) und (10) $A_\tau - B_\tau = A - B$ notieren können. Damit ergibt sich nach (13) und (14) unmittelbar

$$\left.\frac{d\Phi(A_\tau\,;B_\tau)}{d\tau}\right|_{\inf} \geq 0\ .$$

[4]) *G. Bol*, a. a. O.

Da B_τ für $\tau = -1$ einen Punkt darstellt, haben wir zudem

$$\Phi(A_\tau\,;\,B_\tau)_{\tau=-1} \geq 0$$

und können mithin $\Phi(A\,;\,B) \geq 0$ erschließen.

b) Mit Hilfe von (12) läßt sich (3b) auf die Gestalt

$$F(A)^{\frac{1}{2}}\,F(A-B)^{\frac{1}{2}} \leq F(A) - F(A\,;\,B)$$

bringen. Da $F(A) \geq F(A\,;\,B)$ wegen $A \supseteq B$, genügt es, diese Ungleichung in der Form:

$$\Psi(A, B) \equiv (F(A) - F(A\,;\,B))^2 - F(A)F(A-B) \geq 0$$

zu erweisen.

Da sich für die Bereiche $B_\sigma = B + \sigma A$ wegen (10)

$$A - B_{(\sigma+\delta)} = (A - B_\sigma) - \delta A\ , \quad (\sigma\ ,\ \delta > 0)$$

ergibt, und mithin aus (14)

$$\frac{dF(A-B_\sigma)}{d\sigma} = -\,2F(A-B_\sigma; A)$$

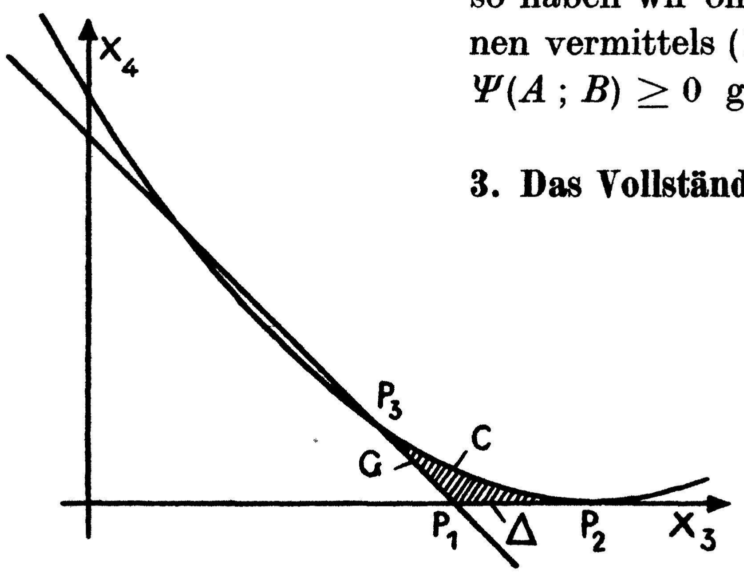
folgt, erhalten wir unter Berücksichtigung von (13a) für $\sigma > 0$

$$\frac{d\Psi(A\,;B_\sigma)}{d\sigma} = -\,2F(A)(F(A) - F(A\,;B_\sigma)) + 2F(A)F(A-B_\sigma;A)\ .$$

Aus (11b) läßt sich nun schon sofort auf

$$\frac{d\Psi(A\,;B_\sigma)}{d\sigma} \leq 0 \tag{15}$$

schließen. Ist σ_0 noch durch $A \supseteq B_{\sigma_0}$ und $F(A - B_{\sigma_0}) = 0$ festgelegt, so haben wir offenbar $\Psi(A\,;\,B_{\sigma_0}) \geq 0$ und können vermittels (15) die zu erweisende Ungleichung $\Psi(A\,;\,B) \geq 0$ gewinnen.



3. Das Vollständigkeitsproblem. Zunächst folgern wir aus den Ungleichungen (5) durch Elimination von x_3

$$(x_1^{\frac{1}{2}} - x_4^{\frac{1}{2}}) \geq x_2^{\frac{1}{2}}$$

und mithin $x_1 \geq x_2$. Bei vorgegebenem x_1 und x_2 $(0 \leq x_2 \leq x_1)$ wird durch die Ungleichungen (5) sodann ein dreiecksförmiger Bereich $\Delta\ (P_1, P_2, P_3)$ der x_3, x_4-Ebene definiert (Fig. 1), bei dem Seite $\widehat{P_1 P_2}$

auf die x_3-Achse, Seite $\widehat{P_2 P_3}$ auf die Parabel $C:\ 4x_1x_4 \leq (3x_1+x_2-x_3)^2$ und Seite $\widehat{P_3 P_1}$ auf die Gerade $G:\ x_3 + x_4 = 2(x_1 + x_2)$ fällt. Im Falle $x_2 = 0$ haben wir dabei die Grenzlage vor uns, daß G die Tangente zu C darstellt, und im Falle $x_2 = x_1$ die Grenzlage, daß die drei Punkte P_j $(j = 1, 2, 3)$ zusammenfallen.

Die Bereiche $A(\lambda)$ und $B(\lambda;\mu) \subseteq A(\lambda)$ mögen nun durch zwei Trapeze dargestellt werden, die ein Paar gleichliegender rechter Winkel besitzen und deren Abmessungen h und a, b für Höhen und parallele Seiten durch

$$h(A(\lambda)) = x_1^{\frac{1}{2}} \qquad h(B(\lambda;\mu)) = \mu$$

$$a(A(\lambda)) = (1+\lambda)\, x_1^{\frac{1}{2}} \qquad a(B(\lambda;\mu)) = \frac{1+\lambda}{\mu}\, x_2$$

$$b(A(\lambda)) = (1-\lambda)\, x_1^{\frac{1}{2}} \qquad b(B(\lambda;\mu)) = \frac{1-\lambda}{\mu}\, x_2$$

gegeben sind, wobei die Parameter λ und μ durch

$$0 \leq \lambda \leq 1\ ; \qquad \frac{x_2}{x_1^{\frac{1}{2}}} \leq \mu \leq x_2^{\frac{1}{2}}$$

eingeschränkt seien. Wir bemerken, daß bei diesen Einschränkungen $A(\lambda) \supseteq B(\lambda;\mu)$ gewährleistet bleibt, und notieren zudem:

$$F(A(\lambda)) = x_1\ , \qquad F(B(\lambda;\mu)) = x_2\ .$$

Man erkennt nun weiterhin, daß die Inhalte $F(A(\lambda) + B(\lambda;\mu))$ und $F(A(\lambda) - B(\lambda;\mu))$ stetig von λ und μ abhängig sind. Bei festem μ wird daher vermöge

$$x_3 = F(A(\lambda) + B(\lambda;\mu))\ , \qquad x_4 = F(A(\lambda) - B(\lambda;\mu)) \tag{16}$$

ein stetiges Kurvenstück Γ_μ der x_3, x_4-Ebene beschrieben, dessen Endpunkte — wie wir gleich sehen werden — auf den Randbogen $\widehat{P_3 P_1}$ bzw. $\widehat{P_2 P_3}$ von Δ zu liegen kommen. Da die Bereiche $A(0)$ und $B(0;\mu)$ einander seitenparallele Rechtecke darstellen, verifiziert man nämlich mühelos, daß für sie in Ungleichung (3a) Gleichheit eintritt. A(1) und $B(1;\mu)$ werden hingegen durch rechtwinklige Dreiecke mit gleichliegenden Katheten repräsentiert, für die ersichtlich in Ungleichung (3b) Gleichheit Platz greift.

Wir haben nun nur noch zu bemerken, daß Γ_μ für $\mu = \dfrac{x_2}{x_1^{\frac{1}{2}}}$ mit einem Stück der x_3-Achse zusammenfällt, und daß Γ_μ sich für $\mu \to x_2^{\frac{1}{2}}$, da $A(\lambda)$ dann zu $B(\lambda;\mu)$ homothetisch wird, auf den Eckpunkt P_3 von Δ

zusammenzieht, um aus der stetigen Abhängigkeit der Γ_μ von μ zu erschließen, daß durch jeden Punkt von Δ ein Bogen Γ_μ hindurchgeht. Mithin existiert zu jedem Punkt $P \in \Delta$ ein Parameterpaar λ, μ, dessen zugehörige Bereiche $A(\lambda)$ und $B(\lambda; \mu)$ dem Punkt P vermöge (16) zugeordnet sind. Da wir die Größen von x_1 und x_2 dabei nur unter Beachtung der aus (5) fließenden Bedingung $0 \leq x_2 \leq x_1$ beliebig vorgegeben hatten, ist die Richtigkeit der eingangs formulierten Aussage damit dargetan.

(Eingegangen den 29. September 1952.)