

Zur elementaren Flächentheorie.

Autor(en): **Scherrer, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **26 (1952)**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21267>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur elementaren Flächentheorie

Von W. SCHERRER, Bern

Die Krümmungslinien liefern bekanntlich ein Parameternetz, dessen man sich bei zahlreichen Fragen der elementaren Flächentheorie mit Vorteil bedient.

Darüber hinaus aber erweist es sich als vorteilhaft, zur expliziten Bearbeitung einer Raumfläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \quad (1)$$

mit der Normalen

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \quad (2)$$

nicht das traditionelle Dreibein

$$\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{N}, \quad (3)$$

sondern das Dreibein

$$\mathfrak{N}_u, \mathfrak{N}_v, \mathfrak{N} \quad (4)$$

zu benutzen.

Dies läuft dann darauf hinaus, daß man primär das Normalenbild (2) als Vektorfunktion

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(u, v) \quad (5)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\mathfrak{N}^2 = 1 ; \quad (6b) \quad \mathfrak{N}_u \mathfrak{N}_v = 0 \quad (6a)$$

vorgibt und sekundär den Flächenvektor (1) mittels der *Rodrigues*-schen Gleichungen bestimmt.

Da diese Methode in dem traditionellen Lehrgang nicht verwendet wird, seien hier ihre Hauptformeln kurz zusammengestellt.

Setzen wir

$$e^2 = \mathfrak{N}_u^2 ; \quad g^2 = \mathfrak{N}_v^2 \quad (7)$$

so erhalten wir folgendes System von Ableitungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N}_{uu} &= \frac{e_u}{e} \mathfrak{N}_u - \frac{e e_v}{g^2} \mathfrak{N}_v - e^2 \mathfrak{N} \\
\mathfrak{N}_{uv} &= \frac{e_v}{e} \mathfrak{N}_u + \frac{g_u}{g} \mathfrak{N}_v \\
\mathfrak{N}_{vv} &= -\frac{g g_u}{e^2} \mathfrak{N}_u + \frac{g_v}{g} \mathfrak{N}_v - g^2 \mathfrak{N}
\end{aligned} \quad . \quad (8)$$

Als Integrabilitätsbedingung des Systems (8) erhält man die Relation

$$\frac{1}{e g} \left[\left(\frac{g_u}{e} \right)_u + \left(\frac{e_v}{g} \right)_v \right] + 1 = 0 \quad , \quad (9)$$

welche natürlich nichts anderes als die *Gaußsche* Gleichung für das Normalenbild darstellt.

Nachdem so ein Normalenbild mit orthogonalem Parameternetz konstituiert ist, gewinnt man nun den Ortsvektor vermittle der *Rodrigues*-schen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u &= -\varrho \mathfrak{N}_u \\
\mathfrak{x}_v &= -\sigma \mathfrak{N}_v
\end{aligned} \quad , \quad (10)$$

wobei ϱ und σ die Hauptkrümmungsradien bedeuten.

Als Integrabilitätsbedingungen des Systems (10) ergeben sich

$$\begin{aligned}
\varrho_v &= -(\varrho - \sigma) \frac{e_v}{e} \\
\sigma_u &= -(\sigma - \varrho) \frac{g_u}{g}
\end{aligned} \quad . \quad (11)$$

Das System (11) zur Bestimmung von ϱ und σ kann separiert werden in die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varrho_{uv} + (\text{Lg } e)_v \varrho_u - \left[\text{Lg } \left(\frac{e_v}{e g} \right) \right]_u \varrho_v &= 0 \\
\sigma_{uv} + (\text{Lg } g)_u \sigma_v - \left[\text{Lg } \left(\frac{g_u}{e g} \right) \right]_v \sigma_u &= 0
\end{aligned} \quad . \quad (12)$$

Die konkrete Bestimmung einer Fläche gestaltet sich nun folgendermaßen:

Den Ausgangspunkt bildet eine Lösung von (9). Gestützt auf sie gewinnt man vermittle (8) das Normalenbild $\mathfrak{N}$ und vermittle (11) respektive (12) die Hauptkrümmungsradien ϱ und σ . Das System (10) schließlich liefert zuletzt den Ortsvektor $\mathfrak{x}$.

Durch diese Methode kann man zahlreiche Probleme der Theorie der Raumflächen, wie etwa Minimalflächen, Flächen mit ebenen Krümmungslinien, Flächen konstanter *Gaußscher* Krümmung usw. einheitlich in Angriff nehmen. Als weiteres Beispiel erwähne ich die Bestimmung aller derjenigen Flächen, für welche die Stützfunktion eine Funktion des Radius ist. Diese Bestimmung ist ausgeführt in der Dissertation des Herrn H. Schindler [Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius].

(Eingegangen den 21. November 1951.)