

# Complément à un Théorème de M. Hadwiger.

Autor(en): **Karamata, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **25 (1951)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20695>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Complément à un Théorème de M. Hadwiger

Par J. KARAMATA

§ 1. Soit

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu}, \text{ convergente pour } |t| < 1,$$

et

$$s_n = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Lorsque

$$n a_n = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

les termes de la suite  $s_n$  restent à une distance finie des valeurs de la fonction  $F(t)$  et, comme l'a montré Hadwiger<sup>1)</sup>, on peut déterminer la valeur la plus précise de la constante  $A$ , afin que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F(t_n) - s_n| \leq A \limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|,$$

en choisissant convenablement  $t_n$  de manière que  $t_n \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Or, ce fait n'a plus lieu si la suite  $n a_n$  n'est bornée que d'un côté, c'est-à-dire lorsqu'on remplace (1) par

$$n a_n > O(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> *H. Hadwiger*, Über ein Distanztheorem bei der  $A$ -Limitierung. *Commentarii Math. Helv.* **16** (1943/44), p. 209—214;

Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art. *Commentarii Math. Helv.* **20** (1947), p. 319—332; Über eine Konstante Tauberscher Art. *Revista Hispano-Americana* (4) VII (1947), p. 3—7.

Voir de même :

*R. P. Agnew*, Abel Transforms of Tauberian series, *Duke Math. J.* **12** (1945), p. 27—36.

*Ph. Hartmann*, Tauber's theorem and absolute constants, *Amer. J. of Math.* **69** (1947), p. 599—606.

*A. Wintener*, A Tauberian theorem, *Commentarii Math. Helv.* **20** (1947), p. 216.

Quoique de (2) et de

$$F(t) = O(1) \quad , \quad t \rightarrow 1 \quad ,$$

il résulte déjà que

$$s_n = O(1) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad , \quad ^2)$$

l'exemple que nous allons donner montrera que dans ce cas, c'est-à-dire lorsque la condition (2) seule est remplie, les termes de la suite  $s_n$  peuvent s'écartier indéfiniment des valeurs de  $F(t)$ , quelle que soit la manière dont  $t \rightarrow 1$ .

En effet, soit

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{lorsque } n \neq 2^{2^\nu} \quad , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad , \\ \lg 2 + \frac{1}{2} \lg n - \frac{1}{n} & \text{pour } n = 2^{2^\nu} \quad , \end{cases} \quad (3)$$

et

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu = \\ &= \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2^{2^\nu}} + \frac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu t^{2^{2^\nu}} - \lg \frac{1}{1-t} \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

Il est évident que la suite (3) satisfait à la condition (2), c'est-à-dire que l'on a

$$a_n \geq -\frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad .$$

D'autre part

$$s_k = \sum_{\nu=1}^k a_\nu \rightarrow \infty \quad \text{pour } k = 2^{2^\nu} \rightarrow \infty \quad ,$$

car, en posant

$$a = \frac{1}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 \quad ,$$

on a

$$s_n = \begin{cases} -1 & \text{pour } n = 1 \quad , \\ a + \lg \lg 2^{2^\nu} + \lg 2^{2^\nu} - \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\mu} & \text{pour } 2^{2^\nu} \leq n < 2^{2^{\nu+1}} \quad , \\ & (\nu = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Donc, pour  $k = 2^{2^\nu}$

$$s_k = a + \lg \lg k + \lg k - \sum_{\mu=1}^k \frac{1}{\mu} = \lg \lg k + a - C + o(1) \quad , \quad k \rightarrow \infty \quad ,$$

$C$  étant la constante d'Euler.

<sup>2)</sup> Voir, par ex., *J. Karamata, Über einen Satz von Vijayaraghavan, Math. Zeit.* 34 (1932), p. 737—740.

Par contre, la fonction  $F(t)$ , définie par (4), reste bornée supérieurement, comme nous le montrerons au § 2, car on a

$$\limsup_{t=1} F(t) = \frac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 . \quad (5)$$

Il en résulte donc que, dans ce cas,

$$s_n - F(t) \rightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad n = 2^{2^v} \rightarrow \infty ,$$

quelle que soit la manière dont  $t \rightarrow 1$ .

Dans cet exemple, quoique  $F(t)$  soit bornée supérieurement, la suite  $s_n$  ne l'est pas, mais son ordre de grandeur dans la direction positive est au plus celui de  $\lg \lg n$ , c'est-à-dire

$$s_n < \lg \lg n + O(1) , \quad n \rightarrow \infty .$$

Or ce fait a lieu même dans le cas général et, lorsque (2) et (5) sont satisfaits, l'inégalité précédente fournit l'ordre de croissance maximale de la suite  $s_n$  dans la direction positive.

Nous allons, en effet, démontrer au § 3 le théorème suivant :

*De*

$$F(t) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v t^v < O(1) , \quad t \rightarrow 1 , \quad (6)$$

*et*

$$n a_n \geq -W , \quad n \geq 1 , \quad (7)$$

*il résulte*

$$s_n = \sum_{v=1}^n a_v \leq W \lg \lg n + O(1) , \quad n \rightarrow \infty . \quad (8)$$

*Dans l'inégalité (8) on ne peut remplacer  $W \lg \lg n$  par aucun terme qui tend vers l'infini moins rapidement.*

§ 2. Pour démontrer l'affirmation (5) posons

$$-\lg t = \frac{1}{x} , \quad k = k_v = 2^{2^v} , \quad v = 0, 1, 2, \dots ,$$

*et*

$$F(t) = F(e^{-\frac{1}{x}}) = G(x) . \quad (9)$$

On aura alors, d'après (4) ,

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x) + \lg(1 - e^{-\frac{1}{x}}) , \quad (10)$$

avec

$$G_1(x) = \frac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu} e^{-\frac{k_{\nu}}{x}} ,$$

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k_{\nu}}{x}} ,$$

et la relation à démontrer (5) se réduit à

$$G(x) \leq \frac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1) , \quad x \rightarrow \infty . \quad (11)$$

Considérons en premier lieu la fonction  $G_1(x)$  . En remarquant que

$$k_{\nu+1} = k_{\nu}^2 , \quad \nu = 0, 1, 2, \dots ,$$

on peut poser

$$x = k_n^{1+r} \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 1 , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} G_1(k_n^{1+r}) &= \frac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_{\nu} k_n^{-1-r}) = \\ &= \frac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^n 2^{\nu} \exp(-k_{\nu} k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_{\nu} k_n^{-1-r}) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^n 2^{n-\nu} \exp(-k_{n-\nu} k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{n+\nu} \exp(-k_{n+\nu} k_n^{-1-r}) \right\} = \\ &= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^n 2^{-\nu} \exp(-k_n^{2^{-\nu}-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_n^{2^{\nu}-1-r}) \right\} = \\ &= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \exp(-k_n^{-r}) + \sum_{\nu=1}^n 2^{-\nu} + 2 \exp(-k_n^{1-r}) \right\} + o(1) , \quad n \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} G_1(x) &= G_1(k_n^{1+r}) = \\ &= 2^{n-1} \lg 2 \{1 + \exp(-k^{-r}) + 2 \exp(-k_n^{1-r})\} - \frac{1}{2} \lg 2 + o(1) , \end{aligned}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$  quel que soit

$$0 \leq r < 1 ,$$

et cette relation, en tenant compte de

$$2^{2^n} = k_n = k ,$$

peut être mise sous la forme

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r}) + 2 \exp(-k^{1-r})}{2(1+r)} \lg x - \frac{1}{2} \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty .$$

Or, lorsque  $k \rightarrow \infty$  le facteur de  $\lg x$  reste inférieur à 1 toutes les fois que  $0 < \varepsilon < r < 1 - \varepsilon$  et ne peut  $\rightarrow 1$  que lorsque  $r \rightarrow 0$  de manière que  $k^{-r} \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ . Mais, dans ce cas,  $\exp(-k^{1-r}) \rightarrow 0$  plus vite que  $\lg x$ . On obtient ainsi pour  $G_1(x)$  l'expression

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r})}{2(1+r)} \lg x - \frac{1}{2} \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty ,$$

que l'on peut encore mettre sous la forme

$$G_1(x) = \lg x - \frac{\lg k}{2} \{1 + 2r - \exp(-k^{-r})\} - \frac{1}{2} \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty . \quad (12)$$

En dérivant  $1 + 2r - \exp(-k^{-r})$

par rapport à  $r$ , on voit que cette expression prend sa plus petite valeur lorsque

$$\exp(-k^{-r}) = \frac{1}{2} \lg k \cdot k^{-r} ,$$

c'est-à-dire pour

$$k^{-r} = \frac{2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k), \quad k \rightarrow \infty ,$$

ou bien pour

$$r = \frac{\lg \lg k - \lg 2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k), \quad k \rightarrow \infty ,$$

et l'on en déduit que

$$1 + 2r - \exp(-k^{-r}) > \frac{2}{\lg k} \{ \lg \lg k - \lg 2 \} + O(\lg^{-2} k), \quad k \rightarrow \infty .$$

Il en résulte donc, d'après (12), que

$$\begin{aligned} G_1(x) &< \lg x - \lg \lg k + \lg 2 - \frac{1}{2} \lg 2 + O(\lg x \lg^{-2} k) = \\ &< \lg x - \lg \lg x + \lg(1+r) + \frac{1}{2} \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_1(x) < \lg x - \lg \lg x + \frac{1}{2} \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty . \quad (13)$$

Pour évaluer la fonction

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k^\nu}{x}},$$

remarquons que par les mêmes considérations on peut déduire que

$$\begin{aligned} G_2(x) &= G_2(k^{1+r}) = \lg 2 \{n + \exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1) = \\ &= \lg \lg x - \lg \lg 2 - \lg(1+r) + \lg 2 \{\exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1) \end{aligned}$$

et que l'expression  $G_2(x) - \lg \lg x$ , tend vers sa plus grande valeur lorsque  $r \rightarrow 0$  et  $k^{-r} \rightarrow 0$ .

On en conclut ainsi que

$$G_2(x) < \lg \lg x + \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Enfin, en introduisant dans (10) les valeurs obtenues par (13) et (14) et en remarquant que

$$\lg(1 - e^{-\frac{1}{x}}) = -\lg x + o(1), \quad x \rightarrow \infty,$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} G(x) &< \lg x - \lg \lg x + \frac{1}{2} \lg 2 + o(1) + \\ &\quad + \lg \lg x + \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1) - \lg x + o(1) = \\ &< \frac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (11) et, d'après (9), l'affirmation (5), car du calcul précédent il résulte que dans cette dernière relation  $\frac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2$  ne peut être remplacé par une valeur plus petite.

§ 3. Pour démontrer encore le théorème énoncé au début, posons, d'après (6) et (7),

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu \leq M \quad \text{et} \quad a_n \geq -\frac{W}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
 M &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} t^{\nu} > \sum_{\nu=1}^n \left( a_{\nu} + \frac{W}{\nu} \right) t^{\nu} - W \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} t^{\nu} > \\
 &> t^n \sum_{\nu=1}^n \left( a_{\nu} + \frac{W}{\nu} \right) - W \lg \frac{1}{1-t} = \\
 &> t^n s_n + W \left( t^n \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \lg \frac{1}{1-t} \right),
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$s_n < M t^{-n} + W \left( t^{-n} \lg \frac{1}{1-t} - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} \right).$$

En posant, dans cette inégalité,

$$t = 1 - \frac{1}{n \lg n} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} = \lg n + C + o(1),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 s_n &< M \left( 1 - \frac{1}{n \lg n} \right)^{-n} + W \left\{ \left( 1 - \frac{1}{n \lg n} \right)^{-n} (\lg n + \lg \lg n) - h_n \right\} = \\
 &< M + O \left( \frac{1}{\lg n} \right) + W \left\{ \lg \lg n + O \left( \frac{\lg \lg n}{\lg n} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lg n \left[ \left( 1 - \frac{1}{n \lg n} \right)^{-n} - 1 \right] - C + o(1) \right\} = \\
 &< M + W \{ \lg \lg n + 1 - C \} + o(1) = \\
 &< W \lg \lg n + M + W(1 - C) + o(1), \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

Quant au fait que dans cette dernière relation on ne peut remplacer  $W \lg \lg n$  par une fonction qui croît moins rapidement, cela résulte de l'exemple traité aux §§ 1 et 2.

(Reçu le 15 septembre 1949.)