Complément à un Théorème de M. Hadwiger.

Complément à un Théorème de M. Hadwiger

Par J. KARAMATA

§ 1. Soit

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu \ , \quad \text{convergente pour } |t| < 1 \ ,$$

et

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \ .$$

Lorsque

$$n a_n = O(1) \ , \quad n \to \infty \ , \tag{1}$$

les termes de la suite s_n restent à une distance finie des valeurs de la fonction $F(t)$ et, comme l'a montré Hadwiger [1]), on peut déterminer la valeur la plus précise de la constante A, afin que

$$\limsup_{n=\infty} | F(t_n) - s_n | \leqslant A \limsup_{n=\infty} | n a_n | \ ,$$

en choisissant convenablement t_n de manière que $t_n \longrightarrow 1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

Or, ce fait n'a plus lieu si la suite $n\, a_n$ n'est bornée que d'un côté, c'est-à-dire lorsqu'on remplace (1) par

$$n a_n > O(1) \ , \quad n \longrightarrow \infty \ . \tag{2}$$

---

[1]) *H. Hadwiger*, Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Commentarii Math. Helv. **16** (1943/44), p. 209—214 ;
Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art. Commentarii Math. Helv. **20** (1947), p. 319—332 ;
Über eine Konstante Tauberscher Art. Revista Hispano-Americana (4) VII (1947), p. 3—7.

Voir de même :

R. P. Agnew, Abel Transforms of Tauberian series, Duke Math. J. **12** (1945), p. 27—36.

Ph. Hartmann, Tauber's theorem and absolute constants, Amer. J. of Math. **69** (1947), p. 599—606.

A. Wintener, A Tauberian theorem, Commentarii Math. Helv. **20** (1947), p. 216.

Quoique de (2) et de

$$F(t) = O(1) \quad , \quad t \to 1 \quad ,$$

il résulte déjà que

$$s_n = O(1) \quad , \quad n \to \infty \quad , \text{ [2]}$$

l'exemple que nous allons donner montrera que dans ce cas, c'est-à-dire lorsque la condition (2) seule est remplie, les termes de la suite s_n peuvent s'écarter indéfiniment des valeurs de $F(t)$, quelle que soit la manière dont $t \to 1$.

En effet, soit

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} \quad \text{lorsque} \quad n \neq 2^{2^\nu} \, , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \, , \\ \lg 2 + \frac{1}{2} \lg n - \dfrac{1}{n} \quad \text{pour} \quad n = 2^{2^\nu} \, , \end{cases} \tag{3}$$

et

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu =$$

$$= \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2^{2^\nu}} + \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu t^{2^{2^\nu}} - \lg \frac{1}{1-t} \, . \tag{4}$$

Il est évident que la suite (3) satisfait à la condition (2), c'est-à-dire que l'on a

$$a_n \geqslant -\frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1 \, .$$

D'autre part

$$s_k = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu \to \infty \quad \text{pour} \quad k = 2^{2^\nu} \to \infty \, ,$$

car, en posant

$$a = \tfrac{1}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 \, ,$$

on a

$$s_n = \begin{cases} -1 \quad \text{pour} \quad n = 1 \, , \\ a + \lg \lg 2^{2^\nu} + \lg 2^{2^\nu} - \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\mu} \quad \text{pour} \quad 2^{2^\nu} \leqslant n < 2^{2^{\nu+1}} \, , \end{cases}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Donc, pour $k = 2^{2^\nu}$

$$s_k = a + \lg \lg k + \lg k - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{1}{\mu} = \lg \lg k + a - C + o(1) \, , \, k \to \infty \, ,$$

C étant la constante d'Euler.

[2]) Voir, par ex., *J. Karamata*, Über einen Satz von Vijayaraghavan, Math. Zeit. **34** (1932), p. 737—740.

Par contre, la fonction $F(t)$, définie par (4), reste bornée supérieurement, comme nous le montrerons au § 2, car on a

$$\limsup_{t=1} F(t) = \tfrac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 \ . \tag{5}$$

Il en résulte donc que, dans ce cas,

$$s_n - F(t) \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad n = 2^{2^\nu} \longrightarrow \infty \ ,$$

quelle que soit la manière dont $t \longrightarrow 1$.

Dans cet exemple, quoique $F(t)$ soit bornée supérieurement, la suite s_n ne l'est pas, mais son ordre de grandeur dans la direction positive est au plus celui de $\lg \lg n$, c'est-à-dire

$$s_n < \lg \lg n + O(1) \ , \quad n \longrightarrow \infty \ .$$

Or ce fait a lieu même dans le cas général et, lorsque (2) et (5) sont satisfaits, l'inégalité précédente fournit l'ordre de croissance maximale de la suite s_n dans la direction positive.

Nous allons, en effet, démontrer au § 3 le théorème suivant :

De

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu < O(1) \ , \quad t \longrightarrow 1 \ , \tag{6}$$

et

$$n a_n \geqslant - W \ , \quad n \geqslant 1 \ , \tag{7}$$

il résulte

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqslant W \lg \lg n + O(1) \ , \quad n \longrightarrow \infty \ . \tag{8}$$

Dans l'inégalité (8) *on ne peut remplacer* $W \lg \lg n$ *par aucun terme qui tend vers l'infini moins rapidement.*

§ **2.** Pour démontrer l'affirmation (5) posons

$$- \lg t = \frac{1}{x} \ , \quad k = k_\nu = 2^{2^\nu} \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

et

$$F(t) = F(e^{-\frac{1}{x}}) = G(x) \ . \tag{9}$$

On aura alors, d'après (4) ,

$$G(x) = G_1(x) + G_2(x) + \lg(1 - e^{-\frac{1}{x}}) \ , \tag{10}$$

avec

$$G_1(x) = \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu} e^{-\frac{k_\nu}{x}} \ ,$$

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k_\nu}{x}} \ ,$$

et la relation à démontrer (5) se réduit à

$$G(x) \leqslant \tfrac{3}{2} \lg 2 - \lg \lg 2 + o(1) \ , \quad x \longrightarrow \infty \ . \tag{11}$$

Considérons en premier lieu la fonction $G_1(x)$. En remarquant que

$$k_{\nu+1} = k_\nu^2 \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

on peut poser

$$x = k_n^{1+r} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r < 1 \ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}
G_1(k_n^{1+r}) &= \tfrac{1}{2} \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) = \\
&= \tfrac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu} \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_\nu k_n^{-1-r}) \right\} = \\
&= \tfrac{1}{2} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^{n-\nu} \exp(-k_{n-\nu} k_n^{-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{n+\nu} \exp(-k_{n+\nu} k_n^{-1-r}) \right\} = \\
&= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} 2^{-\nu} \exp(-k_n^{2^{-\nu}-1-r}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu} \exp(-k_n^{2^{\nu}-1-r}) \right\} = \\
&= 2^{n-1} \lg 2 \left\{ \exp(-k_n^{-r}) + \sum_{\nu=1}^{n} 2^{-\nu} + 2 \exp(-k_n^{1-r}) \right\} + o(1) \, , \ n \longrightarrow \infty \ .
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
G_1(x) &= G_1(k_n^{1+r}) = \\
&= 2^{n-1} \lg 2 \{1 + \exp(-k^{-r}) + 2 \exp(-k_n^{1-r})\} - \tfrac{1}{2} \lg 2 + o(1) \ ,
\end{aligned}$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$ quel que soit

$$0 \leqslant r < 1 \ ,$$

et cette relation, en tenant compte de

$$2^{2^n} = k_n = k \ ,$$

peut être mise sous la forme

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r}) + 2\exp(-k^{1-r})}{2(1+r)} \lg x - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1)\,, \ x \to \infty\,.$$

Or, lorsque $k \to \infty$ le facteur de $\lg x$ reste inférieur à 1 toutes les fois que $0 < \varepsilon < r < 1 - \varepsilon$ et ne peut $\to 1$ que lorsque $r \to 0$ de manière que $k^{-r} \to 0$, $k \to \infty$. Mais, dans ce cas, $\exp(-k^{1-r}) \to 0$ plus vite que $\lg x$. On obtient ainsi pour $G_1(x)$ l'expression

$$G_1(x) = \frac{1 + \exp(-k^{-r})}{2(1+r)} \lg x - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \quad x \to \infty \ ,$$

que l'on peut encore mettre sous la forme

$$G_1(x) = \lg x - \frac{\lg k}{2}\{1 + 2r - \exp(-k^{-r})\} - \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1)\,, \ x \to \infty \ . \tag{12}$$

En dérivant $\qquad 1 + 2r - \exp(-k^{-r})$

par rapport à r, on voit que cette expression prend sa plus petite valeur lorsque

$$\exp(-k^{-r}) = \tfrac{1}{2}\lg k \cdot k^{-r} \ ,$$

c'est-à-dire pour

$$k^{-r} = \frac{2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k) \ , \quad k \to \infty \ ,$$

ou bien pour

$$r = \frac{\lg\lg k - \lg 2}{\lg k} + O(\lg^{-2} k) \ , \quad k \to \infty \ ,$$

et l'on en déduit que

$$1 + 2r - \exp(-k^{-r}) > \frac{2}{\lg k}\{\lg\lg k - \lg 2\} + O(\lg^{-2} k) \ , \ k \to \infty \ .$$

Il en résulte donc, d'après (12), que

$$\begin{aligned} G_1(x) &< \lg x - \lg\lg k + \lg 2 - \tfrac{1}{2}\lg 2 + O(\lg x \lg^{-2} k) = \\ &< \lg x - \lg\lg x + \lg(1+r) + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \quad x \to \infty \ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$G_1(x) < \lg x - \lg\lg x + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) \ , \quad x \to \infty \ . \tag{13}$$

Pour évaluer la fonction

$$G_2(x) = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\frac{k_\nu}{x}} ,$$

remarquons que par les mêmes considérations on peut déduire que

$$G_2(x) = G_2(k^{1+r}) = \lg 2 \{n + \exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1) =$$
$$= \lg\lg x - \lg\lg 2 - \lg(1+r) + \lg 2\{\exp(-k^{-r}) + \exp(-k^{1-r})\} + o(1)$$

et que l'expression $G_2(x)$ — $\lg\lg x$, tend vers sa plus grande valeur lorsque $r \to 0$ et $k^{-r} \to 0$.

On en conclut ainsi que

$$G_2(x) < \lg\lg x + \lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) , \quad x \to \infty . \qquad (14)$$

Enfin, en introduisant dans (10) les valeurs obtenues par (13) et (14) et en remarquant que

$$\lg(1 - e^{-\frac{1}{x}}) = -\lg x + o(1) , \quad x \to \infty ,$$

on obtient finalement

$$G(x) < \lg x - \lg\lg x + \tfrac{1}{2}\lg 2 + o(1) +$$
$$+ \lg\lg x + \lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) - \lg x + o(1) =$$
$$< \tfrac{3}{2}\lg 2 - \lg\lg 2 + o(1) , \quad x \to \infty ,$$

ce qui démontre la relation (11) et, d'après (9), l'affirmation (5), car du calcul précédent il résulte que dans cette dernière relation $\frac{3}{2}\lg 2 - \lg\lg 2$ ne peut être remplacé par une valeur plus petite.

§ 3. Pour démontrer encore le théorème énoncé au début, posons, d'après (6) et (7),

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu \leqslant M \quad \text{et} \quad a_n \geqslant -\frac{W}{n} , \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Il en résulte

$$M \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu t^\nu > \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu + \frac{W}{\nu}\right) t^\nu - W \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} t^\nu >$$

$$> t^n \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu + \frac{W}{\nu}\right) - W \lg \frac{1}{1-t} =$$

$$> t^n s_n + W\left(t^n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \lg \frac{1}{1-t}\right) ,$$

c'est-à-dire

$$s_n < M t^{-n} + W\left(t^{-n} \lg \frac{1}{1-t} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}\right) .$$

En posant, dans cette inégalité,

$$t = 1 - \frac{1}{n \lg n} \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \lg n + C + o(1) ,$$

on obtient

$$s_n < M\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} + W\left\{\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} (\lg n + \lg \lg n) - h_n\right\} =$$

$$< M + O\left(\frac{1}{\lg n}\right) + W\left\{\lg \lg n + O\left(\frac{\lg \lg n}{\lg n}\right) + \right.$$

$$\left. + \lg n \left[\left(1 - \frac{1}{n \lg n}\right)^{-n} - 1\right] - C + o(1)\right\} =$$

$$< M + W\{\lg \lg n + 1 - C\} + o(1) =$$

$$< W \lg \lg n + M + W(1 - C) + o(1) , \quad n \to \infty ,$$

ce qui démontre le théorème.

Quant au fait que dans cette dernière relation on ne peut remplacer $W \lg \lg n$ par une fonction qui croît moins rapidement, cela résulte de l'exemple traité aux §§ 1 et 2.

(Reçu le 15 septembre 1949.)