Euler'sche Zahlen und Klassenanzahl des Körpers der 4l-ten Einheitswurzeln.

Autor(en): **Gut, Max**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **25 (1951)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20694

Euler'sche Zahlen und Klassenanzahl des Körpers der $4l$-ten Einheitswurzeln

Von Max Gut, Zürich

1. Inhaltsangabe und Bezeichnungen

Wir wählen in dieser Arbeit Vorzeichen und Indexbezeichnung der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen so, daß

$$e^{Bv} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{v^m}{m!} = \frac{v\,e^v}{e^v - 1} \; ,$$

bzw.

$$e^{Ev} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \frac{v^m}{m!} = \frac{2}{e^v + e^{-v}} \; .$$

Bedeutet l durchwegs eine beliebige ungerade Primzahl, so hat *Kummer* bekanntlich den Satz bewiesen, daß die Klassenanzahl des Körpers der l-ten Einheitswurzeln dann und nur dann zu l teilerfremd ist, wenn die Zähler der ersten $\frac{l-1}{2}$ Bernoullischen Zahlen von geradem Index, $B_0, B_2, B_4, \ldots, B_{l-3}$, alle zu l teilerfremd sind. Wir werden hier und in Abschnitt 4 diesen Satz der Kürze halber immer als den *Satz von Kummer* bezeichnen.

In folgendem beweisen wir den *Satz:*

Die Klassenanzahl des Körpers der $4l$-ten Einheitswurzeln, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet, ist dann und nur dann zu l teilerfremd, wenn die Zähler der ersten $\frac{l-1}{2}$ Bernoullischen Zahlen von geradem Index, $B_0, B_2, B_4, \ldots, B_{l-3}$, und die ersten $\frac{l-1}{2}$ Eulerschen Zahlen von geradem Index, $E_0, E_2, E_4, \ldots, E_{l-3}$ alle zu l teilerfremd sind.

Mit ζ bezeichnen wir durchwegs die primitive l-te Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, mit k den Körper der l-ten Einheitswurzeln. Weiter bedeute

r eine Primitivwurzel mod. l, die wir durchwegs so wählen, daß $r^{l-1} \not\equiv 1$ (mod. l^2) und $r \equiv 1$ (mod 4) ist[1]), und S den erzeugenden Automorphismus von k, also $\zeta^S = \zeta^r$, endlich k_0 den maximalen reellen Unterkörper von k.

Den erzeugenden Automorphismus des Gaußschen Zahlkörpers bezeichnen wir immer mit Σ, so daß $i^\Sigma = -i$. Adjungieren wir i zu k, so entsteht der Körper K der $4l$-ten Einheitswurzeln, dessen maximaler reeller Unterkörper durchwegs mit K_0 bezeichnet ist. Da wir K immer als Kompositum von k mit dem Gaußschen Zahlkörper auffassen, wird die konjugiert komplexe einer Zahl A von K durch $A^{\Sigma S^{\frac{l-1}{2}}}$ gegeben.

Eine quadratische Matrix, bzw. Determinante, deren Elemente alle Funktionen von Zahlen von K sind, und die die Eigenschaft besitzt, daß die Elemente der zweiten Zeile aus den entsprechenden der ersten Zeile vermöge des Automorphismus S, die Elemente der dritten Zeile aus den entsprechenden der ersten Zeile vermöge des Automorphismus S^2, usw. hervorgehen, wird in abgekürzter Weise durch Angabe der Elemente der ersten Zeile bezeichnet.

2. Die Klassenzahlen von k_0 und von K_0

Ist χ der erzeugende mod l eigentliche Charakter, für welchen

$$\chi(r) = e^{\frac{2\pi i}{l-1}}, \tag{2.1}$$

so hat, vgl. *Gut* [2][2]), § 1 und § 7, die Klassenzahl h_0 von k_0 den Wert:

$$h_0 = \frac{\prod\limits_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\frac{l}{2}} - \chi^{2u}(n) \log \sin \frac{\pi n}{l} \right\}}{R_{k_0}},$$

wo R_{k_0} den Regulator von k_0 bedeutet. Ist $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{l-3}{2}}$ hier und im folgenden ein System von Grundeinheiten von k_0, so ist

$$R_{k_0} = \left| \log|\gamma_1| \quad \log|\gamma_2| \ldots \log\left|\gamma_{\frac{l-3}{2}}\right| \right|,$$

---

[1]) Die erste dieser Voraussetzungen wird gebraucht beim Beweise des Satzes von *Kummer*.

[2]) Die Nummern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Arbeit.

falls für die Logarithmen hier und überall in der ganzen vorliegenden Arbeit die reellen Werte genommen werden, und ferner die Reihenfolge, bzw. Normierung dieser Grundeinheiten so gewählt wird, daß die Determinante positiv ist.

Unter Benutzung der Theorie derjenigen Determinanten, die man als *Zirkulanten* bezeichnet, vgl. z. B. *Cesàro* [1], pg. 25, erhält man für den Zähler von h_0 die Determinante:

$$\prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\frac{l}{2}} - \chi^{2u}(n) \log \sin \frac{\pi n}{l} \right\} = (-1)^{\frac{(l-3)(l-5)}{8}} \left| \log \theta \log \theta^{S} \log \theta^{S^2} \ldots \log \theta^{S^{\frac{l-5}{2}}} \right| , \tag{2.2}$$

wo θ die positive Einheit

$$\theta = + \sqrt{\frac{(1-\zeta^r)(1-\zeta^{-r})}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})}}$$

von k_0 bedeutet[3]). Mithin ist

$$h_0 = \frac{(-1)^{\frac{(l-3)(l-5)}{8}} \cdot \left| \log \theta \;\; \log \theta^{S} \;\; \log \theta^{S^2} \ldots \log \theta^{S^{\frac{l-5}{2}}} \right|}{\left| \log |\gamma_1| \;\; \log |\gamma_2| \;\; \log |\gamma_3| \ldots \log |\gamma_{\frac{l-3}{2}}| \right|} .$$

Ist χ_0 der Charakter, der eigentlich ist mod 4, so hat die Klassenanzahl H_0 von K_0, vgl. *Gut* [2], § 1 und § 10, den Wert:

$$H_0 = \frac{\prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{2l} - \chi^{2u}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} \right\} \cdot \prod_{u=1}^{\frac{l-1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{2l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} \right\}}{R_{K_0}} ,$$

wo R_{K_0} der Regulator von K_0 ist.

Um zunächst den Nenner von H_0 umzuformen, benutzen wir folgendes Lemma aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper von endlichem Grade, vgl. z. B. *Hasse* [5], pg. 96:

Lemma: Ist K^* eine relativ-quadratische Erweiterung von k^*, R^* die Anzahl der Grundeinheiten von K^*, r^* die Anzahl der Grundeinheiten von k^*, also $r^* \leqq R^*$, so gibt es *bei geeigneter Wahl der Grundeinheiten* γ *von* k^* *und* Γ *von* K^* nur folgende drei möglichen Fälle beim Übergang von k^* zu K^*:

[3]) Auch für die zu θ konjugierten Einheiten soll immer der positive Wert genommen werden; dadurch ersparen wir uns in der vorangehenden und in der folgenden Formel das Zeichen für den absoluten Betrag bei den zu θ konjugierten Einheiten, wenn wir je den Logarithmus einer dieser Einheiten nehmen.

Fall A: Die Grundeinheiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*}$ von k^* gehören auch zu den Grundeinheiten von K^*, so daß $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*}$; $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{R^*-r^*}$ ein System von Grundeinheiten von K^* bilden.

Fall B: Die Einheiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*-1}, \sqrt{\gamma_{r^*}}$ gehören zu den Grundeinheiten von K^*, so daß $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*-1}, \sqrt{\gamma_{r^*}}, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{R^*-r^*}$ ein System von Grundeinheiten von K^* bilden.

Fall C: Die Einheiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*-1}, \sqrt{-i\gamma_{r^*}}$ gehören zu den Grundeinheiten von K^*, so daß $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{r^*-1}, \sqrt{-i\gamma_{r^*}}, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{R^*-r^*}$ ein System von Grundeinheiten von K^* bilden. Dieser Fall kann höchstens eintreten, wenn k^* die vierte Einheitswurzel i *nicht* enthält, $K^* = k^*(i)$ ist und $\sqrt{2\gamma_{r^*}}$ eine Zahl von k^* ist.

Beim Übergang von k_0 zu K_0 gilt der Fall A unseres Lemmas. Denn K_0 entsteht aus k_0 zum Beispiel durch Adjunktion von $i(\zeta - \zeta^{-1})$.

Nun kann der Fall B nicht eintreten, denn eine Gleichung von der Form

$$-(\zeta - \zeta^{-1})^2 \beta_0^2 = \alpha_0^2 \gamma_0 \,,$$

wo α_0 und β_0 ganze Zahlen von k_0 sind und γ_0 eine Grundeinheit von k_0 ist, ist nicht möglich, wie man sofort erkennt, wenn man beidseitig die absolute Norm in k_0 nimmt.

Ferner kann der Fall C nicht eintreten, denn eine Gleichung von der Form

$$-(\zeta - \zeta^{-1})^2 \beta_0^2 = -i\gamma_0 \alpha_0^2 \,,$$

wo α_0 und β_0 wieder ganze Zahlen von k_0 sind und γ_0 eine Grundeinheit von k_0 ist, ergibt durch Quadrieren:

$$(\zeta - \zeta^{-1})^4 \beta_0^4 = -\gamma_0^2 \alpha_0^4 \,.$$

Nimmt man hier beidseitig die absolute Norm in k_0, so ergibt sich ein Widerspruch.

Da also alle $\frac{l-3}{2}$ Grundeinheiten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\frac{l-3}{2}}$, die in R_{k_0} auftreten, neben $\frac{l-1}{2}$ weiteren Grundeinheiten $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{\frac{l-1}{2}}$ als ein System von Grundeinheiten von K_0 genommen werden können, wird der Regulator R_{K_0} von K_0:

$$R_{K_0} = \left| \log|\gamma_1| \dots \log|\gamma_{\frac{l-3}{2}}| \log|\Gamma_1| \dots \log|\Gamma_{\frac{l-1}{2}}| \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}} \left| \log|\gamma_1| \dots \log|\gamma_{\frac{l-3}{2}}| \log|\Gamma_1^2| \dots \log|\Gamma^2_{\frac{l-1}{2}}| \right| .$$

Da für jede Zahl $\Gamma \neq 0$ von K_0:

$$\Gamma^2 = \Gamma^{1+\Sigma} \cdot \Gamma^{1-\Sigma}$$

ist, wo $\Gamma^{1+\Sigma}$ in k_0 liegt, erkennt man, wenn man je eine geeignete homogene lineare Kombination der ersten $\frac{l-3}{2}$ Spalten bzw. zur $\frac{l-1}{2}$-ten, $\frac{l+1}{2}$-ten, ..., letzten $[(l-2)\text{-ten}]$ Spalte addiert, daß der Regulator von K_0 auch so geschrieben werden kann:

$$R_{K_0} = \frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}} \left| \log|\gamma_1| \dots \log|\gamma_{\frac{l-3}{2}}| \log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| \dots \log|\Gamma^{1-\Sigma}_{\frac{l-1}{2}}| \right| ,$$

oder auch, falls wir wie in *Hilbert* [7], § 139, pag. 283, zur Abkürzung $l^* = \frac{l-3}{2}$ setzen:

$$R_{K_0} = \frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}} \begin{vmatrix} \log|\gamma_1| & \dots \log|\gamma_{l^*}| & \log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \dots \log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\gamma_1^{S^{l^*-1}}| & \dots \log|\gamma_{l^*}^{S^{l^*-1}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)S^{l^*-1}}| & \dots \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)S^{l^*-1}}| \\ \log|\gamma_1^{S^{l^*}}| & \dots \log|\gamma_{l^*}^{S^{l^*}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)S^{l^*}}| & \dots \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)S^{l^*}}| \\ \log|\gamma_1| & \dots \log|\gamma_{l^*}| & -\log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \dots -\log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\ \log|\gamma_1^{S}| & \dots \log|\gamma_{l^*}^{S}| & -\log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)S}| & \dots -\log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)S}| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log|\gamma_1^{S^{l^*-1}}| & \dots \log|\gamma_{l^*}^{S^{l^*-1}}| & -\log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)S^{l^*-1}}| & \dots -\log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)S^{l^*-1}}| \end{vmatrix} .$$

Subtrahiert man hier die 1. Zeile von der $\frac{l+1}{2}$-ten Zeile, die 2. Zeile von der $\frac{l+3}{2}$-ten Zeile usf., die $\frac{l-3}{2}$-te Zeile von der letzten $[(l-2)\text{-ten}]$ Zeile, so ergibt sich:

$$R_{K_0}=\frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}}\begin{vmatrix}
\log|\gamma_1| & \ldots\log|\gamma_{l^*}| & \log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\log|\gamma_1^{s^{l^*-1}}| & \ldots\log|\gamma_{l^*}^{s^{l^*-1}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| \\
\log|\gamma_1^{s^{l^*}}| & \ldots\log|\gamma_{l^*}^{s^{l^*}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*}}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*}}| \\
0 & \ldots\ 0 & -2\log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \ldots & -2\log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\
0 & \ldots\ 0 & -2\log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s}| & \ldots & -2\log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s}| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \ldots\ 0 & -2\log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| & \ldots & -2\log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}|
\end{vmatrix}$$

oder

$$R_{K_0}=\frac{(-1)^{l^*}}{2}\begin{vmatrix}
\log|\gamma_1| & \ldots\log|\gamma_{l^*}| & \log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\log|\gamma_1^{s^{l^*-1}}| & \ldots\log|\gamma_{l^*}^{s^{l^*-1}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| \\
\log|\gamma_1^{s^{l^*}}| & \ldots\log|\gamma_{l^*}^{s^{l^*}}| & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*}}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*}}| \\
0 & \ldots\ 0 & \log|\Gamma_1^{1-\Sigma}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{1-\Sigma}| \\
0 & \ldots\ 0 & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s}| \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & \ldots\ 0 & \log|\Gamma_1^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}| & \ldots & \log|\Gamma_{l^*+1}^{(1-\Sigma)s^{l^*-1}}|
\end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man hier die $\frac{l+1}{2}$-te Zeile von der 1. Zeile, die $\frac{l+3}{2}$-te Zeile von der 2. Zeile usf., die letzte [$(l-2)$-te] Zeile von der $\frac{l-3}{2}$-ten Zeile und addiert nachher die Summe der ersten $\frac{l-3}{2}$-ten Zeilen zur $\frac{l-1}{2}$-ten Zeile, so ergibt sich

$$R_{K_0}=\tfrac{1}{2}\cdot R_{k_0}\cdot\left|\log|\Gamma_1^{1-\Sigma}|\ \ \log|\Gamma_2^{1-\Sigma}|\ \ldots\ \log|\Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma}|\right|.$$

Wir gehen dazu über, den Zähler von H_0 umzuformen. Das erste Produkt ist gemäß dem Corollar, *Gut* [2], pg. 172 unten, gleich der linken, also auch der rechten Seite der Formel (2.2).

Das zweite Produkt können wir wieder in der Form einer Determinante schreiben.

Ist u irgend eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{l-1}{2}$, so ist der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{2l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} \tag{2.3}$$

gleich

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{2l-1} - \chi_0(n)\, \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{2l-1} - \chi_0(n)\, \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{2l-1} - \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} + \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{2l-1} \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} .$$

Setzt man in der zweiten Summe $n = 4l - n'$ und läßt nachher bei n' den Strich wieder weg, so wird der Ausdruck (2.3) gleich

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{2l-1} - \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} + \sum_{\substack{n=2l+1 \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{4l-1} - \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} =$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)}}^{4l-1} - \chi^{2u-1}(n) \log \sin \frac{\pi n}{4l} .$$

Da wir oben festgesetzt haben, daß man die Primitivwurzel $r \equiv 1$ (mod. 4) wählen soll, wird der Ausdruck (2.3) gleich

$$\sum_{t=0}^{l-2} - \chi^{2u-1}(r^t) \log \left| \sin \frac{\pi r^t}{4l} \right| ,$$

oder falls zur Abkürzung $\beta = e^{\frac{2\pi i}{l-1}}$ gesetzt wird, gleich

$$\sum_{t=0}^{l-2} - \beta^{(2u-1)t} \log \left| \sin \frac{\pi r^t}{4l} \right| =$$

$$= \sum_{t=0}^{\frac{l-3}{2}} - \beta^{(2u-1)t} \log \left| \sin \frac{\pi r^t}{4l} \right| + \sum_{t'=\frac{l-1}{2}}^{l-2} - \beta^{(2u-1)t'} \log \left| \sin \frac{\pi r^{t'}}{4l} \right| .$$

Setzt man in der zweiten Summe $t' = \frac{l-1}{2} + t$, so wird der Ausdruck (2.3) gleich

$$\sum_{t=0}^{\frac{l-3}{2}} \beta^{(2u-1)t} \log \left| \frac{\sin \frac{\pi r^{\frac{l-1}{2}+t}}{4l}}{\sin \frac{\pi r^t}{4l}} \right| .$$

Nun ist $r^{\frac{l-1}{2}} = 2l - 1 + 4lw$, wo w ganz rational ist, mithin ist der Ausdruck (2.3) gleich

$$\sum_{t=0}^{\frac{l-3}{2}} \beta^{(2u-1)t} \log \left| \operatorname{cotg} \frac{\pi r^t}{4l} \right| .$$

Aber

$$\left| \operatorname{cotg} \frac{\pi r^t}{4l} \right| = \left| \frac{1 + e^{\frac{2\pi i r^t}{4l}}}{1 - e^{\frac{2\pi i r^t}{4l}}} \right|$$

und

$$e^{\frac{2\pi i}{4l} r^t} = e^{\frac{2\pi i}{4l}\left[\left(r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l\right) + (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l\right]} =$$

$$= e^{\frac{2\pi i}{l}\left(\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}\right)} \cdot e^{\frac{2\pi i}{4}(-1)^{\frac{l-1}{2}}} = i^l \cdot \zeta^{\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}} .$$

Folglich ist

$$\left| \operatorname{cotg} \frac{\pi r^t}{4l} \right| = \left| \frac{1 + i^l \zeta^{\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}}{1 - i^l \zeta^{\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1 + i^l \zeta^{\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}\right)\left(1 - i^l \zeta^{-\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}\right)}{\left(1 - i^l \zeta^{\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}\right)\left(1 + i^l \zeta^{-\frac{r^t - (-1)^{\frac{l-1}{2}} \cdot l}{4}}\right)}} .$$

Führt man mithin die positive Einheit

$$\Theta = + \sqrt{\left(1 + i\zeta^{\frac{1-l^2}{4}}\right)\left(1 - i\zeta^{-\frac{1-l^2}{4}}\right)} \tag{2.4}$$

ein[4]), so wird der Ausdruck (2.3) gleich

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} \sum_{t=0}^{\frac{l-3}{2}} \beta^{(2u-1)t} \log \Theta^{(1-\Sigma) S^t} .$$

Das zweite Produkt im Zähler von H_0 wird mithin gleich

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} \prod_{u=1}^{\frac{l-1}{2}} \left\{ \sum_{t=0}^{\frac{l-3}{2}} \beta^{(2u-1)t} \log \Theta^{(1-\Sigma) S^t} \right\} .$$

Unter nochmaliger Benützung der Theorie der *Zirkulanten*, vgl. z. B. *Cesàro* [1], pg. 25, erhält man für diesen Ausdruck, falls wir zur Erleichterung des Formelsatzes bei der Drucklegung der vorliegenden Arbeit vorübergehend zur Abkürzung $\Theta^{1-\Sigma} = \Phi$ setzen:

$$(-1)^{\frac{l-1}{2}} \begin{vmatrix} \log \Phi & \log \Phi^S & \log \Phi^{S^2} & \dots & \log \Phi^{S^{\frac{l-3}{2}}} \\ \log \Phi^{S^{l-2}} & \log \Phi & \log \Phi^S & \dots & \log \Phi^{S^{\frac{l-5}{2}}} \\ \log \Phi^{S^{l-3}} & \log \Phi^{S^{l-2}} & \log \Phi & \dots & \log \Phi^{S^{\frac{l-7}{2}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \log \Phi^{S^{\frac{l+3}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l+5}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l+7}{2}}} & \dots & \log \Phi^S \\ \log \Phi^{S^{\frac{l+1}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l+3}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l+5}{2}}} & \dots & \log \Phi \end{vmatrix} .$$

---

[4]) Auch hier soll für die zu Θ konjugierten Einheiten immer der positive Wert genommen werden, dadurch ersparen wir uns in den folgenden Formeln das Zeichen für den absoluten Betrag bei den zu Θ konjugierten Einheiten, wenn wir je den Logarithmus einer dieser Einheiten nehmen.

Multipliziert man hier alle Zeilen mit Ausnahme der ersten mit -1, so wird diese Determinante:

$$(-1)\cdot\begin{vmatrix} \log \Phi & \log \Phi^{S} & \log \Phi^{S^2} & \ldots & \log \Phi^{S^{\frac{l-3}{2}}} \\ \log \Phi^{S^{\frac{l-3}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l-1}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l+1}{2}}} & \ldots & \log \Phi^{S^{l-3}} \\ \log \Phi^{S^{\frac{l-5}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l-3}{2}}} & \log \Phi^{S^{\frac{l-1}{2}}} & \ldots & \log \Phi^{S^{l-4}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \log \Phi^{S^2} & \log \Phi^{S^3} & \log \Phi^{S^4} & \ldots & \log \Phi^{S^{\frac{l+1}{2}}} \\ \log \Phi^{S} & \log \Phi^{S^2} & \log \Phi^{S^3} & \ldots & \log \Phi^{S^{\frac{l-1}{2}}} \end{vmatrix}.$$

Führt man hier die letzte Zeile in die 2. Zeile über, die vorletzte in die 3. Zeile usf., so wird diese Determinante unter Wiedereinführung der Einheit Θ:

$$(-1)^{\frac{(l-1)(l-7)}{8}} \left| \log \Theta^{1-\Sigma} \quad \log \Theta^{(1-\Sigma)S} \quad \log \Theta^{(1-\Sigma)S^2} \ldots \log \Theta^{(1-\Sigma)S^{\frac{l-3}{2}}} \right|.$$

Zusammenfassend wird

$$H_0 = h_0 \cdot \frac{(-1)^{\frac{(l-1)(l-7)}{8}} \cdot 2 \cdot \left| \log \Theta^{1-\Sigma} \quad \log \Theta^{(1-\Sigma)S} \ldots \log \Theta^{(1-\Sigma)S^{\frac{l-3}{2}}} \right|}{\left| \log \left|\Gamma_1^{1-\Sigma}\right| \quad \log \left|\Gamma_2^{1-\Sigma}\right| \quad \ldots \quad \log \left|\Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma}\right| \right|}. \tag{2.5}$$

Hiebei ist $\frac{H_0}{h_0}$ eine natürliche Zahl, denn jedes Stück des Hilbertschen Klassenkörpers von k_0 gehört auch zum Hilbertschen Klassenkörper von K_0, vgl. *Gut* [3], Satz pg. 86 oben.

3. Hilfssätze

Um die Betrachtungen in der Folge nicht unterbrechen zu müssen, leiten wir in diesem Abschnitt fünf Hilfssätze her.

Wir betrachten die Summe

$$\sum_{n=1}^{4l} -\chi_0(n)\,\chi^{2u}(n)\cdot n\ , \tag{3.1}$$

wo χ_0 wie in Abschnitt 2 den eigentlichen Charakter mod. 4 bedeutet und $\chi(n)$ der in (2.1) definierte Charakter ist, endlich u jede der Zahlen $1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$ bedeuten darf.

Ist $l \equiv 1$ (mod. 4), so läßt sich (3.1) durch Einführung des Wertes von $\chi_0(n)$ zunächst so schreiben:

$$
\begin{aligned}
&- \chi^{2u}(1) \cdot 1 + \chi^{2u}(3) \cdot 3 - + \cdots \\
&\qquad - \chi^{2u}(l-4) \cdot (l-4) + \chi^{2u}(l-2) \cdot (l-2) + \\
&+ \chi^{2u}(2) \cdot (l+2) - \chi^{2u}(4) \cdot (l+4) + - \cdots \\
&\qquad + \chi^{2u}(l-3) \cdot (2l-3) - \chi^{2u}(l-1) \cdot (2l-1) + \\
&+ \chi^{2u}(1) \cdot (2l+1) - \chi^{2u}(3) \cdot (2l+3) + - \cdots \\
&\qquad + \chi^{2u}(l-4) \cdot (3l-4) - \chi^{2u}(l-2) \cdot (3l-2) + \\
&- \chi^{2u}(2) \cdot (3l+2) + \chi^{2u}(4) \cdot (3l+4) - + \cdots \\
&\qquad - \chi^{2u}(l-3) \cdot (4l-3) + \chi^{2u}(l-1) \cdot (4l-1) \quad .
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$
\begin{aligned}
2l \{ &\chi^{2u}(1) - \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) + \chi^{2u}(4) + - - + \cdots \\
&+ \chi^{2u}(l-4) - \chi^{2u}(l-3) - \chi^{2u}(l-2) + \chi^{2u}(l-1) \}
\end{aligned}
$$

oder auch gleich

$$
4l \left\{ \chi^{2u}(1) - \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) + \chi^{2u}(4) + - - + \cdots + (-1)^{\frac{l-1}{4}} \chi^{2u}\left(\frac{l-1}{2}\right) \right\}.
$$

Da in der letzten geschweiften Klammer eine ganze Zahl des Körpers der $\frac{l-1}{2}$-ten Einheitswurzeln steht, ergibt sich der

1. Hilfssatz. Ist die Primzahl $l \equiv 1$ (mod. 4), und darf u jede der Zahlen $1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$ bedeuten, so ist

$$
\sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \cdot \frac{n}{4l} =
$$

$$
\begin{aligned}
= \tfrac{1}{2} \{ &\chi^{2u}(1) - \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) + \chi^{2u}(4) + - - + \cdots \\
&+ \chi^{2u}(l-4) - \chi^{2u}(l-3) - \chi^{2u}(l-2) + \chi^{2u}(l-1) \}
\end{aligned}
$$

eine ganze Zahl des Körpers der $\frac{l-1}{2}$-ten Einheitswurzeln.

Ist $l \equiv 3 \pmod{4}$, so läßt sich (3.1) durch Einführung des Wertes von $\chi_0(n)$ so schreiben:

$$\begin{aligned}
&- \chi^{2u}(1)\cdot 1 \quad + \chi^{2u}(3)\cdot 3 \quad - + \cdots \\
&\qquad + \chi^{2u}(l-4)\cdot(l-4) - \chi^{2u}(l-2)\cdot(l-2) + \\
&- \chi^{2u}(2)\cdot(l+2) + \chi^{2u}(4)\cdot(l+4) - + \cdots \\
&\qquad + \chi^{2u}(l-3)\cdot(2l-3) - \chi^{2u}(l-1)\cdot(2l-1) + \\
&+ \chi^{2u}(1)\cdot(2l+1) - \chi^{2u}(3)\cdot(2l+3) + - \cdots \\
&\qquad - \chi^{2u}(l-4)\cdot(3l-4) + \chi^{2u}(l-2)\cdot(3l-2) + \\
&+ \chi^{2u}(2)\cdot(3l+2) - \chi^{2u}(4)\cdot(3l+4) + - \cdots \\
&\qquad - \chi^{2u}(l-3)\cdot(4l-3) + \chi^{2u}(l-1)\cdot(4l-1) \quad .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\begin{aligned}
2l\,\{ &\chi^{2u}(1) + \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) - \chi^{2u}(4) + + - - \cdots \\
&- \chi^{2u}(l-4) - \chi^{2u}(l-3) + \chi^{2u}(l-2) + \chi^{2u}(l-1)\,\}
\end{aligned}$$

oder auch gleich

$$4l\left\{\chi^{2u}(1) + \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) - \chi^{2u}(4) + + - - \cdots + (-1)^{\frac{l-3}{4}}\chi^{2u}\left(\frac{l-1}{2}\right)\right\}.$$

Da in der letzten geschweiften Klammer wieder eine ganze Zahl des Körpers der $\frac{l-1}{2}$-ten Einheitswurzeln steht, ergibt sich der

2. Hilfssatz. Ist die Primzahl $l \equiv 3 \pmod{4}$, und darf u jede der Zahlen $1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$ bedeuten, so ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\,\chi^{2u}(n)\cdot\frac{n}{4l} = \\
&= \tfrac{1}{2}\{\chi^{2u}(1) + \chi^{2u}(2) - \chi^{2u}(3) - \chi^{2u}(4) + + - - \cdots \\
&\qquad - \chi^{2u}(l-4) - \chi^{2u}(l-3) + \chi^{2u}(l-2) + \chi^{2u}(l-1)\}
\end{aligned}$$

eine ganze Zahl des Körpers der $\frac{l-1}{2}$-ten Einheitswurzeln.

Weiter benötigen wir zwei Hilfssätze über Eulersche Zahlen, die sich vielleicht schon irgendwo in der umfangreichen Literatur über die Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen finden.

In der Fundamentalformel der Theorie der Eulerschen Zahlen, vgl. z. B. *Cesàro* [1], pg. 297:

$$2f(x) = f\big((x+h) + Eh\big) + f\big((x-h) + Eh\big)$$

setzen wir $h = 1$:

$$2f(x) = f\big((x+1) + E\big) + f\big((x-1) + E\big) . \tag{3.2}$$

Es sei zunächst $l \equiv 1$ (mod. 4). Es wird, falls man in (3.2) sukzessive $x = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ setzt, die entstehenden Gleichungen mit der Vorzeichenfolge $+ - - +$ versieht und addiert:

$$\begin{aligned} 2\{f(1) - f(2) - f(3) + f(4) + - - + \cdots \\ + f(l-4) - f(l-3) - f(l-2) + f(l-1)\} = \\ = f(l+E) + f(E) - f\big((l-1) + E\big) - f(1+E) . \end{aligned}$$

Ist daher m eine beliebige natürliche Zahl und setzt man

$$f(x) = x^m ,$$

so ergibt sich der

3. Hilfssatz. Ist die Primzahl $l \equiv 1$ (mod 4), m eine beliebige natürliche Zahl, so gilt die Kongruenz:

$$\begin{aligned} 1^m - 2^m - 3^m + 4^m + - - + \cdots \\ + (l-4)^m - (l-3)^m - (l-2)^m + (l-1)^m \equiv E_m \pmod{l} . \end{aligned}$$

Es sei $l \equiv 3$ (mod. 4). Es wird, falls man in (3.2) sukzessive $x = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ setzt, die entstehenden Gleichungen mit der Vorzeichenfolge $+ + - -$ versieht und addiert:

$$\begin{aligned} 2\{f(1) + f(2) - f(3) - f(4) + + - - \cdots + f(l-2) + f(l-1)\} = \\ = f(l+E) + f\big((l-1) + E\big) + f(1+E) + f(E) . \end{aligned}$$

Setzt man wie eben für eine beliebige natürliche Zahl m

$$f(x) = x^m ,$$

so ergibt sich der

4. Hilfssatz. Ist die Primzahl $l \equiv 3$ (mod. 4), m eine beliebige natürliche Zahl, so gilt die Kongruenz:

$$1^m + 2^m - 3^m - 4^m + + - - \cdots + (l-2)^m + (l-1)^m \equiv E_m (\mathrm{mod.}\, l).$$

Ist wie in *Hilbert* [7], pg. 280, $\mathfrak{l}$ das in l aufgehende Primideal

$$\mathfrak{l} = (l, \beta - r) , \quad \beta = e^{\frac{2\pi i}{l-1}} ,$$

des Körpers der $(l - 1)$-ten Einheitswurzeln, so gilt für $t=0, 1, 2, \ldots, l-2$:

$$\chi(r^t) = \beta^t \equiv r^t \pmod{\mathfrak{l}} ,$$

mithin für jede der Zahlen $n = 1, 2, \ldots, l - 1$:

$$\chi(n) \equiv n \pmod{\mathfrak{l}} .$$

Folglich ergibt sich aus dem ersten und dritten, bzw. aus dem zweiten und vierten der vorangehenden Hilfssätze der

5. Hilfssatz. Ist l eine beliebige ungerade Primzahl, und darf u jede der Zahlen $1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$ bedeuten, so ist die in der folgenden Kongruenz auf der linken Seite stehende Summe eine ganze algebraische Zahl des Körpers der $\frac{l-1}{2}$-ten Einheitswurzeln, und sie erfüllt die Kongruenz:

$$\sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \cdot \frac{n}{4l} \equiv \tfrac{1}{2} E_{2u} \pmod{\mathfrak{l}} ,$$

wo $\mathfrak{l}$ das in l aufgehende Primideal $\mathfrak{l} = (l, \beta - r)$ des Körpers der $(l - 1)$-ten Einheitswurzeln bedeutet.

4. Die Klassenzahlen von k und K

Die Klassenzahl h von k wird, da der Regulator von k_0 auch Regulator von k ist, vgl. *Gut* [2], pg. 200/201:

$$h = h_1 \cdot h_0 , \tag{4.1}$$

wo

$$h_1 = \frac{l}{2^{\frac{l-3}{2}}} \prod_{u=1}^{\frac{l-1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{l} - \chi^{2u-1}(n) \cdot \frac{n}{l} \right\} \tag{4.2}$$

eine natürliche Zahl ist, da jedes Stück des Hilbertschen Klassenkörpers von k_0 auch zum Hilbertschen Klassenkörper von k gehört, vgl. *Gut* [3], Satz pg. 86 oben.

Endlich ergibt sich für die Klassenzahl H von K, vgl. *Gut* [2], pg. 200/201, falls R_K der Regulator von K ist:

$$H = H_1 \cdot H_0 \ , \tag{4.3}$$

wo

$$H_1 = \frac{l}{2^{l-3}} \cdot \frac{R_{K_0}}{R_K} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n) \frac{n}{4l} \right\} \prod_{u=1}^{\frac{l-1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi^{2u-1}(n) \frac{n}{4l} \right\} \cdot$$

$$\cdot \prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \frac{n}{4l} \right\} .$$

$2 \cdot H_1$ ist eine natürliche Zahl, da jedes Stück des Hilbertschen Klassenkörpers von K_0 auch zum Hilbertschen Klassenkörper von K gehört, und K zum Hilbertschen Klassenkörper von K_0 gehört, vgl. *Gut* [3], Satz pg. 86 oben.

Vermöge des Lemmas, *Gut* [2], pg. 172 unten, wird der letzte Ausdruck auch gleich

$$H_1 = \frac{l}{2^{l-2}} \cdot \frac{R_{K_0}}{R_K} \prod_{u=1}^{\frac{l-1}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{l} - \chi^{2u-1}(n) \frac{n}{l} \right\} \cdot \prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \frac{n}{4l} \right\} .$$

Unter Berücksichtigung von (4.2) folgt

$$H_1 = \frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}} \cdot h_1 \cdot \frac{R_{K_0}}{R_K} \prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \frac{n}{4l} \right\} .$$

Trägt man diese Form des Wertes von H_1 und den in (2.5) angegebenen Wert für H_0 in (4.3) ein, so wird unter Berücksichtigung von (4.1):

$$H = h \cdot \frac{1}{2^{\frac{l-1}{2}}} \cdot \frac{R_{K_0}}{R_K} \cdot \frac{(-1)^{\frac{(l-1)(l-7)}{8}} \cdot 2 \cdot \left| \log \Theta^{1-\Sigma} \ldots \log \Theta^{(1-\Sigma) S^{\frac{l-3}{2}}} \right|}{\left| \log \left| \Gamma_1^{1-\Sigma} \right| \ \log \left| \Gamma_2^{1-\Sigma} \right| \ldots \log \left| \Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma} \right| \right|} \times$$

$$\times \prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_0(n)\, \chi^{2u}(n) \frac{n}{4l} \right\} .$$

Der Quotient $\frac{H}{h}$ ist jedenfalls eine natürliche Zahl, da jedes Stück des Hilbertschen Klassenkörpers von k auch zum Hilbertschen Klassenkörper von K gehört, vgl. *Gut* [3], Satz pg. 86 oben.

Gemäß unserem Lemma in Abschnitt 2 ist ferner der dritte Faktor von H, also $\frac{R_{K_0}}{R_K}$, entweder gleich 1 oder gleich 2.

Ebenso ist der vierte Faktor von H eine natürliche Zahl, wie wir am Ende des 2. Abschnittes gesehen haben.

Der letzte, fünfte Faktor ist daher auch eine positive rationale Zahl, folglich da dieser Faktor gemäß Hilfssatz 5 von Abschnitt 3 als Produkt von ganzen algebraischen Zahlen eine ganze algebraische Zahl ist, ebenfalls eine natürliche Zahl. Ferner genügt diese natürliche Zahl der Kongruenz:

$$\prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{4l} - \chi_{\bullet}(n)\, \chi^{2u}(n) \frac{n}{4l} \right\} \equiv \frac{1}{2^{\frac{l-3}{2}}} \prod_{u=1}^{\frac{l-3}{2}} E_{2u} \pmod{l},$$

denn gemäß Hilfssatz 5 von Abschnitt 3 gilt diese Kongruenz jedenfalls modulo dem dort definierten Primideal $\mathfrak{l}$ des Körpers der $(l-1)$-ten Einheitswurzeln, folglich da beide Seiten der Kongruenz rational sind modulo der rationalen Primzahl l.

Aus den letzten Aussagen und dem Satz von *Kummer* [5]) folgt sofort, daß wenn einer der Zähler der $\frac{l-1}{2}$ ersten Bernoullischen Zahlen von geradem Index: $B_0, B_2, B_4, \ldots, B_{l-3}$ oder eine der $\frac{l-1}{2}$ ersten Eulerschen Zahlen von geradem Index: $E_0, E_2, E_4, \ldots, E_{l-3}$ durch l teilbar ist, auch H durch l teilbar ist.

Der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit wird mithin bewiesen sein, wenn noch folgendes gezeigt worden sein wird:

Gelten die *Voraussetzung I:* Die Zähler aller $\frac{l-1}{2}$ ersten Bernoullischen Zahlen von geradem Index: $B_0, B_2, B_4, \ldots, B_{l-3}$ sind alle zu l teilerfremd, und die *Voraussetzung II:* Die $\frac{l-1}{2}$ ersten Eulerschen Zahlen von geradem Index: $E_0, E_2, E_4, \ldots, E_{l-3}$ sind alle zu l teilerfremd, so ist H zu l teilerfremd.

Aus der Voraussetzung I allein folgt aber gemäß dem Satze von *Kummer*, daß jedenfalls der Faktor h von H zu l teilerfremd ist.

---

[5]) Vergleiche die Bemerkung in Abschnitt 1.

Aus der Voraussetzung II allein folgt jedenfalls, daß der fünfte Faktor von H zu l teilerfremd ist. Im folgenden Abschnitt werden wir noch zeigen, daß aus der Voraussetzung II allein folgt, daß auch der vierte Faktor von H zu l teilerfremd ist. Hiermit wird dann der in Abschnitt 1 aufgestellte Satz bewiesen sein.

5. Beweis der letzten Behauptung von Abschnitt 4

Die Einheit Θ, vgl. Formel (2.4) liegt im Körper der $8l$-ten Einheitswurzeln, aber ihr Quadrat ist in K_0. Setzt man daher zur Abkürzung

$$\Omega = \Theta^{2(1-\Sigma)}\ , \tag{5.1}$$

so ist Ω die $(1 - \Sigma)$-te Potenz einer Einheit von K_0.

Bezug nehmend auf Abschnitt 3 und 4 der Arbeit *Gut* [4], und unter Verwendung der dort benutzten Bezeichnungen berechnen wir zunächst die „*Takagi*"-schen Exponenten für die Einheiten

$$\Omega^{P_u(S)}\ ,$$

wo u jede der Zahlen $1, 2, \ldots, l-1$ bedeuten darf und wo zur Erleichterung des Formelsatzes bei der Drucklegung der vorliegenden Arbeit $P_u(S)$ das ganzrationalzahlige Polynom vom Grade $l-2$ in S:

$$P_u(S) = -r^u \frac{S^{l-1} - r^{u(l-1)}}{S - r^u}$$

bedeutet. Es ist

$$\overline{\Omega}(\xi) = \frac{\left(1 + i\xi^{\frac{1-l^2}{4}}\right)\left(1 - i\xi^{-\frac{1-l^2}{4}}\right)}{\left(1 - i\xi^{\frac{1-l^2}{4}}\right)\left(1 + i\xi^{-\frac{1-l^2}{4}}\right)}\ ,$$

also $\overline{\Omega}(1) = \overline{\Omega}^{\Sigma}(1) = 1$, und

$$\log \overline{\Omega}(e^v) \simeq i \sum_{w=1}^{\infty} \frac{E_{w-1}}{2^{2w-1}} \cdot \frac{v^w}{w!}\ .$$

Für $w = 1, 2, \ldots, l-1$ wird :

$$L_w(\Omega) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ l)\ ,$$

$$L_w^*(\Omega) \equiv i \frac{E_{w-1}}{2^{2w-1}} \,(\mathrm{mod}\ l)\ ,$$

folglich für $w = 1, 2, \ldots, l-1$; $u = 1, 2, \ldots, l-1$, wie sich aus den Formeln der Seite 85, *Gut* [4], sofort ergibt

$$L_w(\Omega^{Pu(S)}) \equiv 0 \pmod{l} ,$$

$$L_w^*(\Omega^{Pu(S)}) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{l} , & \text{falls} \quad u \neq w , \\ i \dfrac{E_{w-1}}{2^{2w-1}} \pmod{l} , & \text{falls} \quad u = w , \end{cases}$$

und damit

$$G_w(\Omega^{Pu(S)}) \equiv 0 \pmod{l} ,$$

$$G_w^*(\Omega^{Pu(S)}) \equiv \left\{ \begin{array}{ll} 0 \pmod{l} , & \text{falls} \quad u \neq w , \\ \dfrac{(-1)^{w-1}}{w!\, 2^{2w-1}} E_{w-1} \pmod{l} , & \text{falls } u = w \end{array} \right\} . \tag{5.2}$$

Wir multiplizieren den vierten Faktor von H mit $(-1)^{\frac{(l-1)(l-7)}{8}} . 2^{\frac{l-3}{2}}$, dadurch entsteht die ganze rationale Zahl

$$\frac{\left| \log \Omega \quad \log \Omega^S \quad \ldots \quad \log \Omega^{S^{\frac{l-3}{2}}} \right|}{\left\| \log \left| \Gamma_1^{1-\Sigma} \right| \quad \log \left| \Gamma_2^{1-\Sigma} \right| \quad \ldots \quad \log \left| \Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma} \right| \right\|} ,$$

und es genügt, zu zeigen, daß diese ganze rationale Zahl unter der Voraussetzung II zu l teilerfremd ist.

Im folgenden mögen m und n immer unabhängig voneinander alle Werte $1, 2, \ldots, \dfrac{l-1}{2}$ annehmen dürfen, und sind $\left(\dfrac{l-1}{2}\right)^2$ Größen q_{mn} gegeben, so setzen wir zur Abkürzung $\| q_{mn} \|$ für die Determinante

$$\| q_{mn} \| = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1,\frac{l-1}{2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{\frac{l-1}{2},1} & \cdots & q_{\frac{l-1}{2},\frac{l-1}{2}} \end{vmatrix} .$$

Da Ω die $(1 - \Sigma)$-te Potenz einer Einheit von K_0 ist, gelten Gleichungen von der Form

$$\Omega^{S^{n-1}} = \Gamma_1^{(1-\Sigma)a_{1n}} \Gamma_2^{(1-\Sigma)a_{2n}} \ldots \Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{(1-\Sigma)a_{\frac{l-1}{2},n}} , \tag{5.3}$$

wo die Exponenten a_{mn} alle ganz rational sind. Aus (5.3) folgt

$$\log \Omega^{S^{n-1}} = \sum_{t=1}^{\frac{l-1}{2}} a_{tn} \log \left| \Gamma_t^{1-\Sigma} \right| \tag{5.4}$$

und daraus

$$\frac{\left|\log \Omega \quad \log \Omega^{S} \quad \ldots \quad \log \Omega^{S^{\frac{l-3}{2}}}\right|}{\left|\log\left|\Gamma_1^{1-\Sigma}\right| \quad \log\left|\Gamma_2^{1-\Sigma}\right| \quad \ldots \quad \log\left|\Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma}\right|\right|} = \| a_{mn} \| \ . \tag{5.5}$$

Im folgenden sei zur Abkürzung

$$\Omega_m = \Omega^{P_{2m-1}(S)} \tag{5.6}$$

gesetzt, und wir betrachten den Quotienten

$$\frac{\left|\log \Omega_1 \quad \log \Omega_2 \quad \ldots \quad \log \Omega_{\frac{l-1}{2}}\right|}{\left|\log \Omega \quad \log \Omega^{S} \quad \ldots \quad \log \Omega^{S^{\frac{l-3}{2}}}\right|} \ .$$

Da für $t = 0, 1, 2, \ldots, \frac{l-3}{2}$ gemäß (5.1)

$$\Omega^{S^{t+\frac{l-1}{2}}} = \Theta^{2(1-\Sigma)S^{t+\frac{l-1}{2}}} = \Theta^{2\left(S^{\frac{l-1}{2}} - \Sigma S^{\frac{l-1}{2}}\right)\cdot S^t} = \Theta^{2(\Sigma-1)\cdot S^t} = \Omega^{-S^t}$$

gesetzt werden kann in der Formel (5.6), so wird

$$\Omega_m = \Omega^{b_{1m}}\, \Omega^{b_{2m} S}\, \Omega^{b_{3m} S^2} \ \ldots \ \Omega^{b_{\frac{l-1}{2}, m} S^{\frac{l-3}{2}}} , \tag{5.7}$$

wo die Exponenten b_{nm} alle ganz rational sind. Aus (5.7) folgt:

$$\log \Omega_m = \sum_{t=1}^{\frac{l-1}{2}} b_{tm} \log \Omega^{S^{t-1}} , \tag{5.8}$$

und

$$\frac{\left|\log \Omega_1 \quad \log \Omega_2 \quad \ldots \quad \log \Omega_{\frac{l-1}{2}}\right|}{\left|\log \Omega \quad \log \Omega^{S} \quad \ldots \quad \log \Omega^{S^{\frac{l-3}{2}}}\right|} = \| b_{mn} \| \tag{5.9}$$

erweist sich als eine ganze rationale Zahl.

Unsere Behauptung am Ende von Abschnitt 4 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß unter der Voraussetzung II sogar das Produkt der beiden ganzen rationalen Zahlen (5.5) und (5.9) zu l teilerfremd ist. Setzt man

$$c_{mn} = a_{m1} b_{1n} + a_{m2} b_{2n} + \cdots + a_{m,\frac{l-1}{2}} b_{\frac{l-1}{2}, n} ,$$

so sind auch die Größen c_{mn} alle ganz rational, und es wird das genannte Produkt gemäß Formel (5.5) und (5.9)

$$\frac{\left|\log \Omega_1 \quad \log \Omega_2 \quad \ldots \quad \log \Omega_{\frac{l-1}{2}}\right|}{\left|\log\left|\Gamma_1^{1-\Sigma}\right| \log\left|\Gamma_2^{1-\Sigma}\right| \ldots \log\left|\Gamma_{\frac{l-1}{2}}^{1-\Sigma}\right|\right|} = \|c_{mn}\| \;, \qquad (5.10)$$

endlich folgt aus (5.8) und (5.4):

$$\log \Omega_m = \sum_{t=1}^{\frac{l-1}{2}} c_{tm} \log \left|\Gamma_t^{1-\Sigma}\right| \;. \qquad (5.11)$$

Zum indirekten Beweise wollen wir jetzt annehmen, daß $\|c_{mn}\|$ durch l teilbar ist. Dann gibt es $\frac{l-1}{2}$ ganze rationale Zahlen d_n, *die nicht alle durch l teilbar sind,* für welche aber alle $\frac{l-1}{2}$ ganzen rationalen Zahlen

$$e_m = \sum_{n=1}^{\frac{l-1}{2}} c_{mn}\, d_n$$

durch l teilbar sind. Aus (5.11) folgt

$$\log \left(\Omega_1^{d_1} \Omega_2^{d_2} \ldots \Omega_{\frac{l-1}{2}}^{d_{\frac{l-1}{2}}}\right) = \sum_{t=1}^{\frac{l-1}{2}} e_t \log \left|\Gamma_t^{1-\Sigma}\right| = -\, l \cdot \log |\Phi_0|$$

für eine gewisse Einheit Φ_0 von K_0. Aus der letzten Gleichung folgt

$$\Phi_0^l\, \Omega_1^{d_1} \Omega_2^{d_2} \ldots \Omega_{\frac{l-1}{2}}^{d_{\frac{l-1}{2}}} = \pm 1 = (\pm 1)^l \;.$$

Mithin muß für $w = 1, 3, 5, \ldots, l-2$:

$$G_w^*\left(\Omega_1^{d_1} \Omega_2^{d_2} \ldots \Omega_{\frac{l-1}{2}}^{d_{\frac{l-1}{2}}}\right) \equiv 0 \pmod{l} \;,$$

also gemäß (5.6):

$$G_w^*\left(\Omega^{d_1 P_1(S) + d_2 P_3(S) + d_3 P_5(S) + \cdots + d_{\frac{l-1}{2}} P_{l-2}(S)}\right) \equiv 0 \pmod{l}$$

sein. Das bedeutet aber auf Grund der Formel (5.2), daß für $n = 1, 2, \ldots, \frac{l-1}{2}$:

$$d_n \cdot \frac{1}{(2n-1)! \cdot 2^{4n-3}} E_{2(n-1)} \equiv 0 \pmod{l}$$

ist. Es ergibt sich demnach der Widerspruch, daß wegen der Voraussetzung II alle $\frac{l-1}{2}$ ganzen rationalen Zahlen d_n durch l teilbar sind.

Abgesehen von möglichen weitergehenden Verallgemeinerungen mit Hilfe der von *Hasse*[6]) entwickelten Theorie der Reziprozitätsgesetze in Erweiterungskörpern des Körpers der m-ten Einheitswurzeln[7]) lassen sich offenbar die in *Gut* [4] in Abschnitt 3 und 4 entwickelten Formeln auf das Kompositum von k mit irgend einem absolut quadratischen Körper übertragen, und es gelten dann wohl zu dem in der vorliegenden Arbeit bewiesenen analoge Sätze.

(Eingegangen den 15. April 1950.)

LITERATUR

[1] *Cesàro, Ernesto*, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Deutsch herausgegeben von G. Kowalewski, Leipzig, B. G. Teubner, 1904.

[2] *Gut, Max*, Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kroneckersche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers. Comment. Math. Helvet., vol. 1, pg. 160, 1929.

[3] *Gut, Max*, Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper. Comment. Math. Helvet., vol. 15, pg. 81, 1942/43.

[4] *Gut, Max*, Eulersche Zahlen und großer Fermatscher Satz. Comment. Math. Helvet., vol. 24, pg. 73, 1950.

[5] *Hasse, Helmut*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil I: Klassenkörpertheorie und Teil Ia: Beweise zu Teil I. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930.

[6] *Hasse, Helmut*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil II: Reziprozitätsgesetz. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930.

[7] *Hilbert, David*, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Gesammelte Abhandlungen, 1. Band, pg. 63. Berlin, Julius Springer, 1932.

---

[6]) Vergleiche *Hasse* [6] und die später im Journal f. d. reine und angewandte Mathematik erschienenen diesbezüglichen Arbeiten von *Hasse* und *Artin*.

[7]) wobei m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet.