Metabelsche Gruppen.

Autor(en): **Meier-Wunderli, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **25 (1951)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20691

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Metabelsche Gruppen

Seinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor RUDOLF FUETER zum 70. Geburtstag gewidmet

von H. MEIER-WUNDERLI, Cambridge (England)

Die generelle metabelsche Gruppe $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugenden

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \; (n > 1)$$

kann nach *Otto Schreier*[1]) aufgefaßt werden als die Erweiterung[2]) der freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{K}$ (Kommutatorgruppe)

$$\mathfrak{K} = \left\{ \begin{array}{c} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}) \\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} < i_k \leqslant i_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n \end{array} \right\} \tag{1}$$

mit der freien Abelschen Gruppe $\mathfrak{F}$ (Faktorkommutatorgruppe)

$$\mathfrak{F} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$$

und den Erweiterungsbedingungen

$$\big((\alpha_j, \alpha_i), \alpha_l, \alpha_k\big) = \big((\alpha_j, \alpha_i), \alpha_k, \alpha_l\big) \tag{2}$$

$$(\alpha_j, \alpha_i, \alpha_k)(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_j)(\alpha_k, \alpha_j, \alpha_i) = 1 \; . \tag{3}$$

Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots$ die absteigende Zentralreihe [3]), so erkennt man hieraus, daß alle Kommutatoren in (1) vom Gewicht $w (r = w)$ eine Basis für die freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{M}_w/\mathfrak{M}_{w+1}$ darstellen von der leicht ersichtlichen Dimension

$$d_w = (w-1)\binom{n+w-2}{w} \; . \tag{4}$$

---

[1]) *O. Schreier*, Über die Erweiterung von Gruppen. Hamb. Abh. 4, p. 322, vgl. auch *A. Scholz*, Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. Math. Zeitschr. 42, 1936/1937, p. 186ff.

[2]) vgl. auch *H. Zassenhaus*, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1. Bd.; Leipzig 1937, p. 95ff.

[3]) vgl. [2]) p. 118.

Außerdem ergibt sich die wichtige Tatsache, daß jedes Element X aus $\mathfrak{M}$ mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ eine eindeutige Basisdarstellung gestattet in der Form

$$X = \alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \ldots \alpha_n^{x_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})^{x_{i_k\, i_1 i_2 \ldots i_r}} \bmod \mathfrak{M}_{w+1} \qquad (5)$$
$$(1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_{k-1} < i_k \leqslant i_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n) \; .$$

Die Exponenten x durchlaufen dabei alle positiven und negativen ganzen Zahlen einschließlich der Null.

Ein Element X aus $\mathfrak{M}$ ist also mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ durch Angabe eines Exponentensystems

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_{i_k\, i_1 i_2 \ldots i_r}, \ldots) \qquad (6)$$

eindeutig bestimmt.

Es ergibt sich daher das Problem, das Kompositionsgesetz für die Exponentensysteme (6) zu finden[4]).

Die Ableitung des Kompositionsgesetzes und insbesondere die Bestimmung des Exponentensystems der n-ten Potenz mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ ist der Inhalt des allgemeinen Teiles unserer Arbeit.

Als Anwendung bestimmen wir die generelle metabelsche Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente $\neq 1$ alle die Ordnung p besitzen. Dies ist äquivalent mit der Lösung der metabelschen Approximation des bekannten Problemes von *Burnside*[5]) für den Fall von Primzahlen.

I.

Allgemeiner Teil

§ 1. Komposition

Ein beliebiger Basiskommutator vom Gewicht w besitzt nach (1) die Gestalt

$$K_{i_k\, i_1^{a_1} i_2^{a_2} \ldots i_k^{a_k - 1} \ldots i_r^{a_r}} =$$

$$= \Big(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_k}, \ldots, \alpha_{i_k}}_{a_k - 1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Big) \qquad (7)$$

mit
$$2 \leqslant k \leqslant r \leqslant n \; ; \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n \; ;$$
$$\sum_{i=1}^{r} a_i = w \; ; \quad 0 \leqslant a_i < w \;\; (i = 1, 2, \ldots, r) \; .$$

[4]) Für $n = 2$ vgl. *H. Meier-Wunderli*, Über endliche p-Gruppen, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen. Com. math. helv., vol. 24, I, p. 23ff.

[5]) *W. Burnside*, On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. Journ. 33, 1902, p. 230—238.

Meinen wir die Gesamtheit der Kommutatoren (7) mit festen a-Werten und $2 \leqslant k \leqslant r$, so verwenden wir an Stelle von (7) einfach das Symbol $K_{i_1^{a_1} i_2^{a_2} \ldots i_k^{a_k} \ldots i_r^{a_r}}$. Ist $i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}$ echter Teiler von $i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}$, so schreiben wir wie üblich $i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}$. Hierbei dürfen einzelne der b_i auch 0 sein, aber wenigstens zwei sollen stets von 0 verschieden sein.

Zur Bestimmung der Gruppenkomposition der Systeme (6) hat man gemäß Definition das Produkt (vgl. (5))

$$X \cdot Y = \alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_n^{x_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})^{x_{i_k i_1 \ldots i_r}} \cdot$$

$$\cdot\, \alpha_1^{y_1} \ldots \alpha_n^{y_n} \cdot \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})^{y_{i_k i_1 \ldots i_r}} \tag{8}$$

mit Hilfe der Relationen (2) und (3) in die Form (5) überzuführen. Dies geschieht am einfachsten durch den von *P. Hall*[6]) in die Gruppentheorie eingeführten „*commutator collecting process*“. Zu diesem Zweck ersetzte man $\alpha_i^{x_i}$ und $\alpha_j^{y_j}$ in (8) respektive durch $\alpha_i^{(1)} \alpha_i^{(2)} \ldots \alpha_i^{(x_i)}$ und $\alpha_j^{(x_j+1)} \alpha_j^{(x_j+2)} \ldots \alpha_j^{(x_j+y_j)}$, wobei die oberen Indizes lediglich eine Anordnung der α_l ermöglichen sollen. Die Überführung von (8) in die Normalform wird nun damit begonnen, indem man von zwei Elementen $\alpha_i^{(j)}$ und $\alpha_k^{(l)}$ dasjenige zuerst an seine Stelle in (5) durchzieht, das in der lexikographischen Anordnung der Paare (i, j) und (k, l) zuerst kommt.

Dabei hat man Kommutatoren einzuführen von der Form

$$\left(\alpha_{i_k}^{(\tau_{i_k}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^2)}, \ldots, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^{a_1})}, \ldots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^1)}, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^2)}, \ldots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^{a_r})}\right) \tag{9}$$

mit den Zahlenbedingungen

i) $1 \leqslant \tau_{i_l}^1 < \tau_{i_l}^2 < \cdots < \tau_{i_l}^{a_l} \leqslant y_{i_l} (l = 1, 2, \ldots, k-1)$

ii) $1 \leqslant \tau_{i_k}^1 \leqslant x_{i_k}$; $1 \leqslant \tau_{i_k}^1 < \tau_{i_k}^2 < \cdots < \tau_{i_k}^{a_k} \leqslant x_{i_k} + y_{i_k}$

iii) $1 \leqslant \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant x_{i_m} + y_{i_m} (m = k+1, k+2, \ldots, r)$

und Kommutatoren der Form

$$\left(K_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}^{(\varepsilon)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^1)}, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^2)}, \ldots, \alpha_{i_1}^{(\tau_{i_1}^{a_1-b_1})}, \ldots, \alpha_{i_r}^{(\tau_{i_r}^{a_r-b_r})}\right) \tag{10}$$

mit den Zahlenbedingungen

---

[6]) *P. Hall*, A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc. Lond. math. Soc., vol. 36, 1933, p. 29—95. § 3.

i) $\quad i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}$

ii) $\quad 1 \leqslant \varepsilon \leqslant x_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}$

iii) $\quad 1 \leqslant \tau_{i_l}^1 < \tau_{i_l}^2 < \cdots < \tau_{i_l}^{a_l - b_l} \leqslant y_{i_l} \; (= 1, 2, \ldots, r)$.

Wir haben nun aus (9) und (10) die Gesamtheit der beim Durchziehprozeß induzierten Kommutatoren (7) auszusondern.

Die Kommutatoren (9) sind nach Konstruktion Basiskommutatoren der Form (7). Ihre Anzahl wird nach (9) i), ii) und iii) gegeben durch

$$\prod_{l=1}^{k-1} \binom{y_{i_l}}{a_l} \left\{ \binom{x_{i_k} + y_{i_k}}{a_k} - \binom{y_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{x_{i_m} + y_{i_m}}{a_m} . \tag{11}$$

Aus (3) folgt mit $i < j < k$

$$(\alpha_k, \alpha_j, \alpha_i) = (\alpha_k, \alpha_i, \alpha_j)\,(\alpha_j, \alpha_i, \alpha_k)^{-1} . \tag{12}$$

In Verbindung mit (2) folgt hieraus, daß nur diejenigen Kommutatoren (10) Beiträge der Form (7) liefern, deren erste oder zweite Komponente gerade α_{i_k} ist. Das heißt, wir haben nur diejenigen $K_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}$ zu betrachten, deren erste oder zweite Komponente gleich α_{i_k} ist. Hierbei hat man nach (12) die Anzahl der letzteren Kommutatoren negativ einzuberechnen.

Die gesuchte Anzahl der aus (10) hervorgehenden Kommutatoren (7) ist daher nach (10) i), ii) und iii) gegeben durch

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_1^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_1^{b_r}} \cdot \prod_{l=1}^{r} \binom{y_{i_l}}{a_l - b_l} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{l=1}^{r} \binom{y_{i_l}}{a_l - b_l} . \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man daher $F(x; y) = X \cdot Y$, so können wir den Satz notieren

1. Satz: *Die generelle metabelsche Gruppe* $\mathfrak{M}$ *mit* n *Erzeugenden wird* mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ $(w = 1, 2, \ldots)$ *eindeutig dargestellt durch* (6) *mit dem Kompositionsgesetz*

$$\left.\begin{aligned} f_i(x\,;\,y) &= x_i + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ f_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}(x\,;\,y) &= x_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} + y_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} + (11) + (13) . \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Die Funktionenfolge (14) liefert ihrer Bedeutung wegen eine Partikulärlösung der Funktionalgleichung

$$F\big(f(x;\,y);\,z\big) = F\big(x;\,f(y;\,z)\big)\ .$$

Dies ist ja einfach das assoziative Gesetz für die Exponentensysteme!

§ 2. Potenz

Zur Ableitung des Exponentensystems der allgemeinen n-ten Potenz eines Elementes X aus $\mathfrak{M}$ mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ haben wir den Ausdruck (vgl. (5))

$$X^n = \left(\alpha_1^{x_1} \ldots \alpha_n^{x_n} \prod_{r=2}^{w} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r})^{x_{ik\,i_1 \ldots i_r}}\right)^n \tag{15}$$

in die Normalform (5) überzuführen. Zu diesem Zweck ersetze man in Analogie zu § 1 die Größen $\alpha_i^{x_i}$ und $(\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r})^{x_{ik\,i_1 \ldots i_r}}$ aus dem l-ten Faktor X in (15) respektive durch

$$\prod_{m=1}^{x_i} \alpha_i^{((l-1)\,x_i + m)} \quad \text{und} \quad \prod_{m=1}^{x_{ik\,i_1 \ldots i_r}} (\alpha_{i_k}, \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r})^{((l-1)\,x_{ik\,i_1 \ldots i_r} + m)}\ .$$

Die Überführung in die Normalform (5) wickelt sich jetzt analog ab wie in § 1. Einzig die Existenzbedingungen in (9) und (10) müssen neu formuliert werden.

Die Gesamtheit der durch (9) induzierten Kommutatoren der Form (7), deren erste Komponente zum l-ten Produkt X in (15) gehört, ist offenbar gleich der Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && l\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant n\,x_{i_m} (m = 1, 2, \ldots, k-1)\\
&\text{ii)} && (l-1)\,x_{i_k} < \tau_{i_k}^1 \leqslant l\,x_{i_k}\ ;\ \tau_{i_k}^1 < \tau_{i_k}^2 < \cdots < \tau_{i_k}^{a_k} \leqslant n\,x_{i_k}\\
&\text{iii)} && (l-1)\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m} \leqslant n\,x_{i_m} (m = k+1, k+2, \ldots, r)\ .
\end{aligned} \tag{16}$$

Die entsprechende Anzahl der aus (10) hervorgehenden Kommutatoren (7) ist gleich der Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$\begin{aligned}
&\text{i)} && i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}\\
&\text{ii)} && (l-1)\,x_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} < \varepsilon \leqslant l\,x_{i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}}\\
&\text{iii)} && l\,x_{i_m} < \tau_{i_m}^1 < \tau_{i_m}^2 < \cdots < \tau_{i_m}^{a_m - b_m} \leqslant n\,x_{i_m} (m = 1, 2, \ldots, r)
\end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man noch $n - l = \varepsilon$, so ist die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (16) gegeben durch

$$\prod_{m=1}^{k-1} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m} \left\{ \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_k}}{a_k} - \binom{\varepsilon x_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_m}}{a_m} \tag{18}$$

und die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von (17) wird durch den Ausdruck gegeben

$$\begin{aligned} &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_k} \mid i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} . \end{aligned} \tag{19}$$

Dies liefert den Satz:

2. Satz: *Die n-te Potenz $F^n(x) = (X)^n$ eines Elementes* (6) *der generellen metabelschen Gruppe $\mathfrak{M}$ mit n Erzeugenden wird* mod $\mathfrak{M}_{w+1}$ $(w = 1, 2, \dots)$ *gegeben durch*

$$f_i^n = n x_i$$

$$f^n_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} = \sum_{\varepsilon=1}^{n-1} \left\{ \begin{aligned} &+ \prod_{m=1}^{k-1} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m} \left\{ \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_k}}{a_k} - \binom{\varepsilon x_{i_k}}{a_k} \right\} \prod_{m=k+1}^{r} \binom{(\varepsilon+1)\, x_{i_m}}{a_m} \\ &+ \sum_{\substack{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k\, i_1^{b_1} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \\ &- \sum_{\substack{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r} \mid i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \\ b_k > 0}} x_{i_k^{b_k}\, i_{k+1}^{b_{k+1}} \dots i_r^{b_r}} \cdot \prod_{m=1}^{r} \binom{\varepsilon x_{i_m}}{a_m - b_m} \end{aligned} \right. \tag{20}$$

II.

Lösung der Metabelschen Approximation des Problemes von Burnside

Darunter verstehen wir die vollständige Bestimmung der Struktur der allgemeinen metabelschen Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente $\neq 1$ alle die Ordnung p (Primzahl) besitzen. Diese Gruppe sei im folgenden mit $\mathfrak{M}^p$ bezeichnet.

§ 1. Bemerkungen

Die wichtigsten Daten der Gruppe $\mathfrak{M}^p$, nämlich Ordnung und Klasse, sind sofort bekannt, wenn es gelingt den zum Gewicht w und der Primzahl p gehörigen Dimensionsdefekt $\delta_{p,w}$ zu bestimmen.

Er wird nach *P. Hall* definiert durch

$$d\left(\mathfrak{M}^p_w / \mathfrak{M}^p_{w+1}\right) = d_w - \delta_{p,w} \; . \tag{21}$$

Zur Ermittlung von $\delta_{p,w}$ hat man die Relationen zwischen den w-fachen Basiskommutatoren zu studieren, die sich ergeben, wenn alle Elemente aus $\mathfrak{M}$ einer Gleichung der Form $x^p = 1$ genügen sollen. Die in *I* entwickelten Formeln gestatten es, einen Überblick über diese Relationen zu gewinnen.

Aus (14) folgt unmittelbar für beliebiges l und k

$$\alpha_{i_k} \cdot \alpha_{i_l}^p = \alpha_{i_l}^p \cdot \alpha_{i_k} \cdot \prod_{m=1}^{p} \left(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_l}, \alpha_{i_l}, \ldots, \alpha_{i_l}}_{m}\right)^{\binom{p}{m}} ,$$

d. h. für $\mathfrak{M}^p$ gilt die Relation

$$\left(\alpha_{i_k}, \underbrace{\alpha_{i_l}, \alpha_{i_l}, \ldots, \alpha_{i_l}}_{p}\right) = 1 \; . \tag{22}$$

Hieraus folgt die wichtige Tatsache, daß man in (7) stets $a_i < p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ annehmen darf.

(20) kann daher für $\mathfrak{M}^p$ in der einfacheren Gestalt geschrieben werden

$$f^p_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv \sum_{\varepsilon=1}^{p-1} \begin{cases} C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \cdot \left\{\varepsilon^{A_{k-1}}(\varepsilon+1)^{w-A_{k-1}} - \varepsilon^{A_k}(\varepsilon+1)^{w-A_k}\right\} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r} + \cdots \\ + \sum\limits_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r} \,|\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} C_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \varepsilon^{w-B_r} x_{i_1}^{a_1-b_1} \ldots x_{i_r}^{a_r-b_r} x_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} + \\ - \sum\limits_{i_k^{b_k} i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{a_r} \,|\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} C_{i_k^{b_k} i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} \cdot \varepsilon^{w-B_r} x_{i_1}^{a_1-b_1} \ldots x_{i_r}^{a_r-b_r} x_{i_k^{b_k} i_{k+1}^{b_{k+1}} \ldots i_r^{b_r}} + \end{cases} \tag{23}$$

wobei

$$C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv \frac{1}{a_1!\; a_2! \ldots a_r!} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k} a_i = A_k$$

und

$$C_{i_k\, i_1^{b_1} \ldots i_r^{b_r}} \equiv \frac{1}{(a_1 - b_1)! \ldots (a_r - b_r)!} \; ; \quad \sum_{i=1}^{r} b_i = B_r \; .$$

Punkte in der Entwicklung (23) deuten Glieder niedriger Dimension in x und ε an. Die höchste Dimension in ε ist für den ersten Summanden in (23) genau $w-1$; für die andern Summanden ist sie $\leqslant w-2$.

Aus (22) geht die weitere Tatsache hervor, daß die Klasse unserer Gruppe sicher nicht größer als $n(p-1)$ sein kann. Ein Kommutator der Form (7) und vom Gewicht $n(p-1)+1$ würde ein $a_i \geqslant p$ aufweisen, ist also nach (2) und (22) gleich 1. Die Gruppe $\mathfrak{M}^p$ ist also von endlicher Ordnung.

§ 2. $\delta_{p,w}$ für $w < p$

$\delta_{p,w}$ für $w < p$ ergibt sich sofort wenn man bemerkt, daß

$$\sum_{\varepsilon=1}^{p-1} \varepsilon^k \equiv \begin{cases} 0 \bmod p & \text{falls } k \not\equiv 0 \bmod p-1 \\ -1 \bmod p & \text{falls } k \equiv 0 \bmod p-1 \end{cases} \tag{24}$$

und die unter (23) gemachten Feststellungen berücksichtigt.

Man schließt dann, daß

$$f^p_{ik\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv 0 \bmod p \quad \text{für} \quad \sum_{i=1}^{r} a_i < p$$

sein muß. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\delta_{p,w} = 0 \qquad \text{für} \qquad w < p\;. \tag{25}$$

§ 3. $\delta_{p,p}$

In diesem Paragraphen rechnen wir durchwegs mod $\mathfrak{M}_{p+1}$. Aus (23) und (24) folgt dann für $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i = p$

$$f^p_{ik\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \equiv -\, C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \cdot a_k \cdot x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r} \bmod p\;. \tag{26}$$

Zum Beweis braucht man nach (24) nur den Koeffizienten von ε^{p-1} im ersten Ausdruck von (23) zu bestimmen für $w = p$. Er ist gleich $\binom{p-A_{k-1}}{1} - \binom{p-A_k}{1} = a_k$. Damit ergibt sich (26).

Wegen der Bedeutung der Exponenten (26) gilt daher mod $\mathfrak{M}^p_{p+1}$ eine Relation der Form

$$\prod_{\substack{\sum\limits_{i=1}^{r} a_i = p \\ 0 \leqslant a_i < p\;;\; 1 < k \leqslant r \leqslant n}} K_{ik\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}^{-C_{i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}} \cdot a_k \cdot x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_r}^{a_r}} = 1\;. \tag{27}$$

Nun gehören alle in (27) auftretenden Elemente einer elementaren Abelschen Gruppe an, nämlich der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{M}^p$. Wegen $a_i < p$ und der beliebigen Wahl der $x \bmod p$ können wir daher nach dem geläufigen *Vandermondschen Argument*[7]) schließen, daß sogar

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{ik\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}}^{-C_{i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}} \cdot a_k} = 1 \quad ,$$

d. h. es gilt auch

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{i_k\, i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}}^{-a_k} = 1 \tag{28}$$

für $\sum_{i=1}^{r} a_i = p$.

(28) besagt: Zwischen den Basiskommutatoren (7) vom Gewicht p, die in den a_i und $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_r}$ übereinstimmen, gilt mod $\mathfrak{M}_{p+1}^p$ genau die Relation (28). Hieraus folgt, daß der Dimensionsdefekt der Klasse p gleich ist der Anzahl der verschiedenen Aggregate $x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_r}^{a_r}$, die man aus $x_1, x_2, \dots, x_n$ herstellen kann unter den Nebenbedingungen $\sum_{i=1}^{r} a_i = p$ und $0 \leqslant a_i < p$.

Hieraus folgt

$$\delta_{p,p} = \binom{n+p-1}{p} - n \quad . \tag{29}$$

Für $n = 2$ besagt (28), daß die Klasse unserer Gruppe genau gleich $p - 1$ ist.

§ 4. $\delta_{p,p+1}$ für $n > 2$

Alle Rechnungen gelten jetzt mod $\mathfrak{M}_{p+2}^p$. Wir betrachten die folgende p-te Potenz:

$$\left(\alpha_{i_1}^{x_{i_1}} \alpha_{i_2}^{x_{i_2}} \dots \alpha_{i_r}^{x_{i_r}} \cdot K_{ik\, ij}^{x_{ik\, ij}}\right)^p$$

Sie besitzt wegen (23) und (24) die Gestalt

$$P \cdot \prod_{\substack{\sum_{i=1}^{r} a_i = p-1 \\ (0 \leqslant a_i \leqslant p-1)}} \Big(K_{ik\, ij}\, ,\, \underbrace{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \dots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \dots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Big)^{-x_{ik\, ij} \cdot x_{i_1}^{a_1} \dots x_{i_r}^{a_r} \cdot C_{ik\, ij}} = 1 \; .$$

---

[7]) vgl. z. B.: *A. Speiser,* Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Springer, 1937. § 43, insbesondere auf p. 128.

P ist ein Produkt von Basiskommutatorpotenzen, deren Exponenten nur $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ involvieren. Wegen der beliebigen Wahl der x folgt insbesondere $P = 1$. Somit gilt

$$\Pi\Bigl(K_{i_k\, i_j},\, \underbrace{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}\Bigr)^{-x_{i_k\, i_j} \cdot x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r} \cdot c_{i_k\, i_j}} = 1 \;.$$

Aus denselben Gründen wie früher können wir jetzt wieder das *Vandermondsche Argument* anwenden und beweisen, daß

$$\Bigl(K_{i_k\, i_j},\, \overbrace{\underbrace{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_1}}_{a_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_{i_r}, \ldots, \alpha_{i_r}}_{a_r}}^{p-1}\Bigr) = 1 \;. \tag{30}$$

Nun kann aber jeder Basiskommutator vom Gewicht $p + 1$ durch (30) representiert werden.

Es folgt also

$$\delta_{p,\, p+1} = d_{p+1} \;. \tag{31}$$

Wir haben früher bereits bemerkt, daß $\mathfrak{M}^p$ eine endliche Gruppe darstellt. Statt (31) können wir daher auch sagen: Die Klasse der Gruppe $\mathfrak{M}^p$ ist für $n > 2$ genau gleich p.

Damit ist der folgende abschließende Satz über die *metabelsche Approximation des Problemes von Burnside gewonnen.*

3. Satz: *Die maximale metabelsche Gruppe mit n Erzeugenden, deren Elemente der Gleichung $x^p = 1$ genügen, ist für $n = 2$ von der Klasse $c = p - 1$ und für $n > 2$ von der Klasse $c = p$. Sie ist von der Ordnung*

$$p^{\,n + \sum\limits_{w=2}^{c} d_w - \delta_{p,w}} \;.$$

Es ist

$$d_w = (w - 1)\binom{n + w - 2}{w}$$

und

$$\delta_{p,w} = 0 \quad \text{für} \quad w < p$$

$$\delta_{p,p} = \binom{n + p - 1}{p} - n \;.$$

Für $n > 2$ bestehen zwischen den p-fachen Basiskommutatoren genau die Relationen

$$\prod_{2 \leqslant k \leqslant r} K_{i_k\, i_1^{a_1} \ldots i_r^{a_r}}^{a_k} = 1 \;.$$

(Eingegangen den 20. April 1950.)