Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik.

Autor(en): **Guggenheimer, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **25 (1951)**

PDF erstellt am: **18.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20706

Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik

Von H. GUGGENHEIMER, Basel

Einleitung

Eine Mannigfaltigkeit M^{2m} der Dimension $2m$, mit komplex-analytischer Struktur, auf welcher eine überall reguläre Hermitesche Metrik ohne komplexe Torsion definiert ist, soll eine *Kählersche Mannigfaltigkeit* heißen. Die differentialgeometrischen Eigenschaften einer solchen Metrik wurden zuerst von *E. Kähler* [11][1]) betrachtet. Die wichtigsten Resultate *Kählers* werden im § 1 dieser Arbeit kurz dargestellt, soweit sie für den weiteren Verlauf nötig sind.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der *Homologie-Eigenschaften* geschlossener Kählerscher Mannigfaltigkeiten; ihm sind die Paragraphen 2 bis 5 gewidmet. Es werden also Beziehungen zwischen der lokal-metrischen und der global-topologischen Struktur auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten untersucht. Diese Beziehungen finden ihren Ausdruck in Sätzen sowohl über die additive Struktur der Kohomologiegruppen, das heißt im wesentlichen über die Bettischen Zahlen (Sätze 5, 13, 14), als auch in Sätzen über die multiplikative Struktur des Kohomologieringes, das heißt über Schnitteigenschaften in der Mannigfaltigkeit (Sätze 17, 18).

Die naheliegendsten Beispiele Kählerscher Mannigfaltigkeiten sind der komplexe projektive Raum mit einer elliptischen Metrik und die in diesem Raum analytisch und singularitätenfrei eingebetteten komplexen Mannigfaltigkeiten. Dazu gehören alle singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeiten (vgl. [9], Kapitel IV). Daher sind in unseren Ergebnissen Aussagen über die Bettischen Zahlen und die Schnitteigenschaften algebraischer Mannigfaltigkeiten enthalten. Die meisten unserer Ergebnisse für diesen Spezialfall werden von *Hodge* hergeleitet. Die vorliegende Arbeit kann als eine Verallgemeinerung und Analyse der Hodge-

---

1) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

schen Theorie aufgefaßt werden. Dabei legen wir besonders Wert darauf, bei den Ableitungen nur die Eigenschaften der Kählerschen Metrik zu verwenden. Die Benützung sonstiger spezieller Eigenschaften der betrachteten Mannigfaltigkeiten, etwa topologischer oder algebraischer Natur, wird strikte vermieden. Ein solches Vorgehen ist von *A. Weil* [16] angeregt und skizziert worden; wir übernehmen von ihm die meisten Bezeichnungen.

Die ganze Ableitung beruht auf einer Reihe *rein lokaler Formeln* über alternierende *Differentialformen* auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten. Die Herleitung dieser Formeln geschieht mit Hilfe der differentialgeometrischen Resultate lokalen Charakters, die in § 1 dargestellt sind. Wir benützen dabei durchwegs den Kalkül von *Cartan* und den Begriff der „harmonischen" Formen, und gelangen zu sehr weitgehenden Aussagen über die harmonischen Formen in einer Kählerschen Mannigfaltigkeit. Vermöge des Satzes von *Hodge*, welcher besagt, daß der Ring der harmonischen Formen zum Kohomologiering isomorph ist, lassen sich diese Resultate auf den Kohomologiering übertragen.

Eine wichtige Rolle spielt bei der Herleitung eine der Metrik zugeordnete alternierende Differentialform Ω vom Grade zwei. Sie ist samt allen ihren Potenzen harmonisch und für die Grade $<m$ kein Nullteiler im Ring der Differentialformen. Auf ihr beruht eine Zerlegung der Formen in solche verschiedener *Klasse* (Sätze 9 bis 13). Eine Form heißt von der Klasse k, wenn sie in einem gewissen, in § 4 präzisierten, Sinn die k-te Potenz von Ω als Faktor enthält.

Auf jeder Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur gibt es eine natürliche Zerlegung der Differentialformen nach deren *Typus*. Eine Form heißt vom Typus r, wenn jeder ihrer Summanden r Faktoren $d\bar{z}_j$ enthält, wobei die z_j $(j = 1, \ldots, m)$ komplexe Koordinaten auf M^{2m} sind. Auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten gibt auch diese Zerlegung zu topologischen Sätzen Anlaß, welche gewisse Sätze über algebraische Mannigfaltigkeiten verallgemeinern (Sätze 2 bis 5).

Im § 6 werden *Orthogonalitätsrelationen* hergeleitet, welche auf dem von *de Rham* [13] verwendeten skalaren Produkte beruhen. Es zeigt sich, daß für dieses Produkt zwei Formen verschiedener Klasse oder verschiedenen Typus immer orthogonal sind. Es läßt sich daher eine orthogonalnormierte Basis der Formen angeben, welche der Einteilung der Formen in Klassen und Typen in natürlicher Weise Rechnung trägt.

In einem *Anhang* wird gezeigt, daß alle Sätze, welche auf dem Begriff „Formen verschiedener Klasse" beruhen, sich schon unter viel schwächeren Voraussetzungen herleiten lassen. Sie gelten auf reellen Mannigfaltigkeiten gerader Dimension, auf denen eine Differentialform vom Grade 2 mit bestimmten Eigenschaften existiert (Sätze 6* bis 16*).

Ein Teil der Resultate dieser Arbeit ist zusammen mit weiteren Ergebnissen in drei Noten des Verfassers gemeinsam mit Herrn *Eckmann* angekündigt worden [8].

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. *B. Eckmann*, der mir das Thema der vorliegenden Arbeit gestellt hat, meinen herzlichsten Dank auszusprechen für das stete Wohlwollen und Interesse und die vielen wertvollen Hinweise, mit denen er meine Arbeit gefördert hat.

§ 1. Komplexe Mannigfaltigkeiten

1.1. Die Punkte des $2m$ dimensionalen kartesischen Raumes R^{2m} sind die geordneten $2m$-upel reeller Zahlen $x_1, \ldots, x_{2m}$. Sie können auch durch die geordneten m-upel komplexer Zahlen $z_1, \ldots, z_m$ gegeben werden, welche den reellen $2m$-upeln durch

$$z_k = x_k + i\, x_{m+k} \qquad k = 1, \ldots, m \tag{1}$$

eineindeutig zugeordnet sind.

Alle im folgenden auftretenden Funktionen im R^{2m} seien *reell-analytisch*, das heißt sie seien als Potenzreihen in den unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_{2m}$ darstellbar. Fügen wir zu den durch (1) gegebenen komplexen Variablen noch die entsprechenden konjugiert-komplexen hinzu

$$\bar{z}_k = x_k - i\, x_{m+k} \qquad k = 1, \ldots, m \ , \tag{2}$$

so lassen sich die Potenzreihen in den $x_1, \ldots, x_{2m}$ zu solchen in $z_1, \ldots, z_m$; $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m$ umformen. Alle vorkommenden Ableitungen nach komplexen Variablen sind an den so gewonnenen Potenzreihen auszuführen.

Transformationen der reellen Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2m}$ in einem Gebiet des R^{2m} lassen sich als solche der z_k, $\bar{z}_k$ ausdrücken:

$$z'_k = f_k(z_1, \ldots, z_m, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) \ , \qquad k = 1, \ldots, m \ .$$

Im folgenden betrachten wir speziell diejenigen Koordinatentransformationen, bei denen sich die z'_k durch die z_k allein ausdrücken lassen:

$$z'_k = f_k(z_1, \ldots, z_m) \ , \qquad k = 1, \ldots, m \ , \tag{3}$$

das heißt bei denen

$$\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_l} = 0 \ , \qquad k, l = 1, \ldots, m \ , \tag{4}$$

ist. Zerlegt man die Funktionen f_k in ihre reellen Komponenten, etwa $f_k = u_k + iv_k$, $k = 1, \ldots, m$, so läßt sich (4) auch in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_k}{\partial x_{m+l}} &= 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial x_{m+l}} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l} &= 0 \end{aligned} \qquad k, l = 1, \ldots, m \tag{5}$$

schreiben. Diese Gleichungen sind nichts anderes als die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Real- und Imaginärteile der komplexen Funktionen f_k. Diese sind also komplex-analytisch in den $z_1, \ldots, z_m$, was auch daraus hervorgeht, daß sie durch Potenzreihen in den z_k allein gegeben sind. Eine Koordinatentransformation der Gestalt (3) soll *komplex-analytisch* heißen.

Zu einer komplex-analytischen Koordinatentransformation (3) gehört also stets eine reell-analytische Transformation, die durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'_k &= u_k(x_1, \ldots, x_{2m}) \qquad k = 1, \ldots, m \\ x'_k &= v_k(x_1, \ldots, x_{2m}) \qquad k = m+1, \ldots, 2m \end{aligned} \tag{3'}$$

oder ebenso gut durch

$$\begin{aligned} z'_k &= f_k(z_1, \ldots, z_m) \\ \bar{z}'_k &= \overline{f_k(z_1, \ldots, z_m)} = \bar{f}_k(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m) \end{aligned} \qquad k = 1, \ldots, m \tag{3''}$$

beschrieben sind. Zwischen den Funktionaldeterminanten von (3), (3′), (3″) bestehen die Beziehungen

$$\frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_{2m})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2m})} = \frac{\partial(z'_1, \ldots, z'_m, \bar{z}'_1, \ldots, \bar{z}'_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_m, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_m)} = \left| \frac{\partial(z'_1, \ldots, z'_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_m)} \right|^2.$$

Für eine komplex-analytische Transformation ist also stets

$$\frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_{2m})}{\partial(x_1, \ldots, x_{2m})} > 0 .$$

Geometrische Eigenschaften, die gegenüber komplex-analytischen Transformationen invariant sind, heißen Eigenschaften des komplexen kartesischen Raumes $R^{(m)}$. Dieser Invarianzbegriff liegt allen folgenden Betrachtungen zugrunde.

1.2. Eine $2m$-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit $M^{(m)}$ heißt komplex-analytisch oder kurz „komplex", wenn sie mit einer endlichen Anzahl von Umgebungen überdeckt ist, deren jede dem komplexen

$R^{(m)}$ (vgl. 1.1) homöomorph ist, derart, daß im Durchschnitt je zweier Umgebungen der Übergang von den einen komplexen Koordinaten zu den anderen durch eine komplex-analytische Transformation gegeben ist.

Ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ auf $M^{(m)}$ heißt zulässig, wenn es im Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ mit jeder Umgebung der ursprünglichen Überdeckung aus dem dort gegebenen Koordinatensystem durch eine komplex-analytische Transformation hervorgeht. Die Gesamtheit aller zulässigen Koordinatensysteme heißt die komplexe Struktur der Mannigfaltigkeit $M^{(m)}$.

Notwendige Bedingungen dafür, daß eine vorgegebene reell differenzierbare Mannigfaltigkeit eine komplexe Struktur besitzt, wurden von *Hopf*, *Ehresmann* [10] und anderen angegeben.

1.3. Einige später nützliche Konventionen seien an dieser Stelle eingeführt.

Wir bezeichnen die konjugiert-komplexen Größen durch Indizes, die sich von den ursprünglichen um m unterscheiden, mit folgender Vorzeichenregel

$$\begin{aligned} z_{m+k} &= \bar{z}_k \quad , & & \text{a)} \\ z_{2m+k} &= -z_k \quad , & k = 1, \ldots, m, \qquad & \text{b)} \qquad (6) \\ z_{3m+k} &= -\bar{z}_k \quad . & & \text{c)} \end{aligned}$$

Ferner sollen kleine lateinische Indizes immer von 1 bis m, griechische von 1 bis $2m$ laufen.

Mit diesen Bezeichnungen gelten bei einer komplex-analytischen Koordinatentransformation für die Differentiale der Koordinaten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} dz'_k &= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial z_l}\, dz_l & k &= 1, \ldots, m \,, & \text{a)} \\ dz'_{m+k} &= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial z_{m+l}}\, dz_{m+l} & k &= 1, \ldots, m \,. & \text{b)} \end{aligned} \qquad (7)$$

Hieraus kann leicht folgender Invarianzsatz abgeleitet werden:

Wenn bei einem Tensor auf $M^{(m)}$ in einem Koordinatensystem alle Komponenten verschwinden, die nicht von der Gestalt $T_{k_1 \ldots k_r\, m+k_{r+1} \ldots\, m+k_s}$ sind, so verschwinden sie auch in jedem anderen zulässigen Koordinatensystem.

1.4. Unter einer Hermiteschen Metrik verstehen wir eine positiv definite Riemannsche Metrik mit reellen (analytischen) Koeffizienten, welche in jedem zulässigen Koordinatensystem bezüglich der Differentiale der reellen Koordinaten $x_1, \ldots, x_{2m}$ (vgl. 1) die spezielle Gestalt hat

$ds^2 =$

$$\sum_{k,l} \{h_{kl}(dx_k dx_l) + h_{k\,m+l}(dx_k dx_{m+l}) + h_{m+k\,l}(dx_{m+k} dx_l) + h_{m+k\,m+l}(dx_{m+k} dx_{m+l})\}\,, \tag{8}$$

mit

$$\begin{aligned} h_{kl} = h_{lk} &= h_{m+k\,m+l} = h_{m+l\,m+k}\,, && \text{a)} \\ h_{k\,m+l} &= h_{m+k\,l}\,. && \text{b)} \end{aligned} \tag{9}$$

Dabei sind die Produkte in Klammern gewöhnliche Produkte.

Setzt man

$$g_{k\,m+l} = h_{kl} + i h_{k\,m+l}\,, \tag{10}$$

so lautet das ds^2 (8) in den komplexen Koordinaten:

$$ds^2 = \sum_{k,l} g_{k\,m+l}(dz_k dz_{m+l})\,. \tag{11}$$

Die Komponenten genügen hierbei der Hermite-Bedingung

$$g_{k\,m+l} = \overline{g}_{l\,m+k} \tag{12}$$

Sie können durch

$$\begin{aligned} g_{kl} &= g_{m+k\,m+l} = 0\,, && \text{a)} \\ g_{m+k\,l} &= g_{l\,m+k}\,, && \text{b)} \end{aligned} \tag{13}$$

zu einem symmetrischen Tensor bezüglich der $2m$ Koordinaten z_k, $\overline{z}_k$ ergänzt werden.

Das zugrunde gelegte lokale Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_{2m}$ sei nun in einem Punkte p geodätisch bezüglich der Metrik (8). Dort gilt

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}\,, && \text{a)} \\ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} &= 0\,, && \text{b)} \end{aligned} \tag{14}$$

wobei $\delta_{\mu\nu}$ das Kroneckersymbol ist. In formaler Analogie gilt dann auch nach (10)

$$\begin{aligned} g_{k\,m+l} &= \delta_{kl}\,, && \text{a)} \\ \frac{\partial g_{k\,m+l}}{\partial z_\lambda} &= 0\,. && \text{b)} \end{aligned} \tag{15}$$

In jedem lokalen Koordinatensystem existieren m linear unabhängige Pfaffsche Formen

$$\omega_j = \sum_k a_{jk}(z_1, \ldots, z_m \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m) dz_k\,, \qquad \| a_{jk} \| \neq 0\,, \tag{16}$$

(*Cartan* [3], p. 59), so daß für die Hermitesche Metrik gilt

$$ds^2 = \sum_j (\omega_j \overline{\omega}_j)\,. \tag{17}$$

Die Koeffizienten a_{jk} sind dabei homogene rationale Funktionen der $g_{k\,m+l}$. Ist das zugrunde gelegte Koordinatensystem geodätisch in einem Punkte p_0, so verschwinden in p_0 die partiellen Ableitungen der a_{jk}

$$\left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial z_\lambda}\right)_{p_0} = 0 \ , \tag{18}$$

und es kann dort

$$a_{jk} = \delta_{jk} \tag{19}$$

gewählt werden. Im folgenden sei unter p_0 stets ein Punkt einer Umgebung auf $M^{(m)}$ verstanden, in dem für das speziell gewählte Koordinatensystem (15), (18) und (19) erfüllt sind. Jeder Punkt auf $M^{(m)}$ kann zu einem p_0 gemacht werden.

1.5. Eine Kählersche Metrik ist eine Hermitesche Metrik, bei der die $g_{k\,m+l}$ der grundlegenden Bedingung genügen[2]):

$$\frac{\partial g_{k\,m+l}}{\partial z_j} = \frac{\partial g_{j\,m+l}}{\partial z_k} \ . \tag{K$_1$}$$

Wir stellen kurz die wichtigsten Eigenschaften einer Kählerschen Metrik zusammen.

Aus (K_1) folgt durch Übergang zu den konjugiert-komplexen Werten, unter Berücksichtigung der Hermitebedingung (12), die entsprechende Relation

$$\frac{\partial g_{k\,m+l}}{\partial z_{m+j}} = \frac{\partial g_{k\,m+j}}{\partial z_{m+l}} \ . \tag{20}$$

Nach *Kähler* a. a. O. gibt es in jedem Koordinatensystem eine Funktion $U(z_1 \ldots z_{2m})$, so daß

$$g_{k\,m+l} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_k \, \partial z_{m+l}} \tag{K$_2$}$$

ist. Beim Beweis ist wesentlich, daß die Koeffizienten der Metrik reell-analytisch vorausgesetzt sind. Die beiden Bedingungen (K_1) und (K_2) sind in diesem Falle äquivalent.

Die gewöhnlichen partiellen Ableitungen seien durch Indizes hinter einem Semikolon bezeichnet:

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varrho} = f_{;\varrho} \ .$$

Dann lassen sich die Komponenten des Tensors der $g_{k\,m+l}$ in einem lokalen Koordinatensystem nach (K_2) und (13) darstellen als

---

[2]) vgl. *Kähler* [11], *Bochner* [1], *Chern* [6].

$$\begin{aligned} g_{k\,m+l} &= U_{;\,k;\,m+l}\,, && \text{a)} \\ g_{k\,l} &= g_{m+k\;m+l} = 0\,. && \text{b)} \end{aligned} \qquad (21)$$

Wenn man noch die Vertauschungsregeln für Ableitungen berücksichtigt, ergibt sich für die Koeffizienten des zur Metrik gehörenden affinen Zusammenhangs

$$\begin{aligned} \Gamma_{m+j,\,kl} &= \tfrac{1}{2}\,(g_{k\,m+j;\,l} + g_{l\,m+j;\,k} - g_{kl;\,m+j}) = U_{;\,m+j;\,k;\,l}\,, && \text{a)} \\ \Gamma_{j,\,m+k\,m+l} &= U_{;\,j;\,m+k;\,m+l}\,, && \text{b)} \end{aligned} \qquad (22)$$

während alle übrigen infolge (21) verschwinden. Für den Riemannschen Krümmungstensor

$$R_{\mu\nu,\,\varrho\sigma} = \Gamma_{\nu,\,\mu\sigma;\,\varrho} - \Gamma_{\nu,\,\mu\varrho;\,\sigma} + g^{\alpha\beta}\,(\Gamma_{\alpha,\,\mu\varrho}\,\Gamma_{\beta,\,\nu\sigma} - \Gamma_{\alpha,\,\mu\sigma}\,\Gamma_{\beta,\,\nu\varrho})$$

folgt aus (22), daß nur diejenigen Komponenten von Null verschieden sind, die zu Indizesgruppen $\mu\nu$, $\varrho\sigma$ gehören, wobei μ, ν und ϱ, σ je einen Index $\leqslant m$ und einen $> m$ enthalten. So wird zum Beispiel

$$R_{h\,m+j,\,k\,m+l} = -\,U_{;\,h;\,m+j;\,k;\,m+l} + g^{r\,m+s}\,U_{;\,m+s;\,h;\,k}\,U_{;\,r;\,m+j;\,m+l}\,. \qquad (23)$$

Da die Indizes des Krümmungstensors auf der rechten Seite dieser Gleichung als Indizes partieller Ableitungen auftreten, überträgt sich die Vertauschbarkeit der Ableitungen auf die Indizes des Krümmungstensors:

$$R_{\mu\nu,\,\varrho\sigma} = R_{\nu\varrho,\,\sigma\mu} = R_{\varrho\sigma,\,\mu\nu} = R_{\sigma\mu,\,\varrho\nu}\,. \qquad (24)$$

In einem Punkt p_0 (vgl. 1.4) gelten speziell die Formeln

$$\begin{aligned} g_{k\,m+l} &= a_{kl} = U_{;\,k;\,m+l} = \delta_{kl} && \text{a)} \\ \Gamma_{\iota,\,\varkappa\lambda} &= U_{;\,\iota;\,\varkappa;\,\lambda} = 0 && \text{b)} \\ \Gamma_{\iota,\,\varkappa\lambda;\,\mu} &= U_{;\,\iota;\,\varkappa;\,\lambda;\,\mu} = R_{\iota\varkappa,\,\lambda\mu} && \text{c)} \end{aligned} \qquad (25)$$

1.6. In Zukunft sei immer vorausgesetzt, daß ohne Klammern geschriebene Produkte von Differentialen und Differentialformen dem schiefen Kalkül von *E. Cartan* [3]) gehorchen. Wir werden Differentialformen r-ten Grades oder kurz „r-Formen" betrachten

$$\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r}\,, \qquad (26)$$

gebildet in den $2m$ Unbestimmten $dz_1, \ldots, dz_{2m}$ mit alternierenden komplexwertigen kovarianten Tensoren $P_{\iota_1 \ldots \iota_r}(z_1, \ldots, z_{2m})$. Ein alter-

[3]) vgl. *Cartan* [3, 4], *Kähler* [12], *Chern* [5].

nierender Tensor r-ter Stufe wird dabei wie folgt definiert: $\varrho_1 \ldots \varrho_r$ und $\sigma_1 \ldots \sigma_r$ seien zwei verschiedene Anordnungen der gleichen r Zahlen. Dann gilt

$$P_{\varrho_1 \ldots \varrho_r} = \delta_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}^{\sigma_1 \ldots \sigma_r} P_{\sigma_1 \ldots \sigma_r} ,$$

wo $\delta_{\varrho_1 \ldots \varrho_r}^{\sigma_1 \ldots \sigma_r}$ das verallgemeinerte Kroneckersymbol ist. Die Summation in der Form (26) soll so ausgeführt werden, daß für eine gewisse Kombination von r Indizes nur über e i n e der $r!$ Permutationen summiert wird. An dieser Summationskonvention sei im folgenden durchwegs festgehalten; sie spielt eine Rolle bei der Bestimmung etwa auftretender Koeffizienten.

Die Ableitung $d\varphi^r$ einer r-Form φ^r ist definiert durch

$$d\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} dP_{\iota_1 \ldots \iota_r} dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r} = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \sum_{\varrho} \frac{\partial P_{\iota_1 \ldots \iota_r}}{\partial z_\varrho} dz_\varrho \, dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r} . \tag{27}$$

Setzen wir (26) die Pfaffschen Formen (16) mit Hilfe von

$$dz_k = \sum_j b_{kj} \, \omega_j$$

ein, so erhalten wir

$$\varphi^r = \sum_{(\lambda_1 \ldots \lambda_r)} P_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \omega_{\lambda_1} \ldots \omega_{\lambda_r} ,$$

und es sind bei der Bildung der Ableitung von φ^r auch die ω_j zu differenzieren.

Wir bemerken noch, daß die Differentiale der reellen und komplexen Koordinaten folgendermaßen zusammenhängen

$$\left.\begin{aligned} dz_k &= dx_k + i\, dx_{m+k} , && \text{a)} \\ dz_{m+k} &= dx_k - i\, dx_{m+k} , && \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$dz_k \, dz_{m+k} = dz_k \, d\bar{z}_k = -2i dx_k dx_{m+k} . \tag{29}$$

Wir wollen nun Eigenschaften der Kählerschen Metrik untersuchen, die sich aus der Gestalt (17) ergeben, und uns insbesondere mit den Ableitungen der Pfaffschen Formen ω_k (vgl. (16)) befassen. Wir definieren hierzu die s y m b o l i s c h e A b l e i t u n g n a c h e i n e m ω_j, die wir durch einen Index hinter einem Komma andeuten wollen.

Wenn der Zusammenhang zwischen den ω_k und den dz_k durch $dz_k = \sum_j b_{kj} \, \omega_j$ gegeben ist, so definieren wir

$$f_{,k} = \sum_r \frac{\partial f}{\partial z_r} b_{rk} . \tag{30}$$

Die **Torsion** einer Hermiteschen Metrik wird nach *E. Cartan* so definiert: Setzt man

$$\omega_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} \Gamma_{\lambda\mu,\nu}\, \omega_{\nu} = \overline{\omega_{\mu\lambda}}$$

und

$$d\omega_{l} = \sum_{j} \omega_{lj}\, \omega_{j} + \Omega_{l} \ , \tag{31}$$

so wird der Koeffiziententensor von Ω_{l} Torsion der Metrik genannt.

Nach Voraussetzung (K_1) und (25) ist in p_0 $d\omega_l = \sum_j \omega_{lj}\, \omega_j$, und daher dort

$$\Omega_{l} = 0 \ . \tag{K_3}$$

In gleicher Weise wie die Ableitung der Formen ω_{ι} kann diejenige der Formen $\omega_{\iota\varkappa}$ zerlegt werden in Änderung durch Parallelverschiebung und absolute Ableitung

$$d\omega_{lj} = \sum_{k} \omega_{lk}\, \omega_{kj} + \Omega_{lj} \ . \tag{32}$$

Die Größe Ω_{lj} läßt sich bei einer Kählermetrik besonders leicht in einem Punkt p_0 bestimmen. Nach (25) gilt dort

$$\Omega_{hj} = -\sum R_{h\,m+j,\;k\,m+l}\, \omega_{k}\, \overline{\omega}_{l} \tag{33}$$

Da (K_3) und (33) in p_0 gelten, so gelten sie auch in jedem Punkte der gewählten Umgebung und in jeder Umgebung auf $M^{(m)}$, da die absolute Ableitung Tensorcharakter hat. Dieser für die Anwendung geodätischer Koordinaten charakteristische Schluß wird im folgenden noch öfters auftreten. Er sei deshalb kurz als „Schluß mit geodätischen Koordinaten“ bezeichnet.

§ 2. Harmonische Differentialformen

Es handelt sich in diesem Paragraphen darum, harmonische Formen analog den Definitionen von *Hodge* [9] und *de Rham* [14, 15] einzuführen, wobei wir durchwegs im Komplexen bleiben wollen, das heißt die komplexen Differentiale $dz_1, \ldots, dz_m$, $dz_{m+1} = d\bar{z}_1, \ldots, dz_{2m} = d\bar{z}_m$ verwenden werden; an deren Stelle können auch die lokalen linearen Differentialformen ω_j, $\overline{\omega}_j$ treten (vgl. 1.4).

Φ^r bezeichne die Vektorgruppe aller komplexen auf der ganzen Mannigfaltigkeit $M^{(m)}$ definierten Differentialformen φ^r vom Grade r (vgl. 1.6), $r = 0, 1, \ldots, 2m$. Wir definieren eine Operation $*$, welche jeder r-Form φ^r eine $(2m - r)$-Form $*\varphi^r$ zuordnet, in folgender Weise: Ist in einem lokalen Koordinatensystem φ^r durch $\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r}$ gegeben, so sei

$$* \varphi^r = i^m \sum_{(\iota_{r+1} \ldots \iota_{2m})} \delta_{1 \, \ldots \ldots \ldots \, 2m}^{\iota_1 \ldots \iota_r \, \iota_{r+1} \ldots \iota_{2m}} \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r} \, \omega_{\iota_{r+1}} \ldots \omega_{\iota_{2m}} \tag{34}$$

gesetzt, wobei entsprechend unserer Summationskonvention in (26) nur über je eine Permutation der $\iota_{r+1} \ldots \iota_{2m}$ zu summieren ist. Wie sich in 2.3 ergeben wird, ist die Operation $*$ vom lokalen Koordinatensystem und von der Wahl der ω_j unabhängig und definiert eine „antilineare" Abbildung von Φ^r in Φ^{2m-r}. Aus der Definition folgt wegen

$$\delta_{1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2m}^{\iota_1 \ldots \iota_r \, \iota_{r+1} \ldots \iota_{2m}} = (-1)^r \, \delta_{1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2m}^{\iota_{r+1} \ldots \iota_{2m} \, \iota_1 \ldots \iota_r}$$

unmittelbar

$$** \varphi^r = i^m \overline{i^m} \sum \delta_{1 \ldots \ldots \ldots \ldots \, 2m}^{\iota_{r+1} \ldots \iota_{2m} \, \iota_1 \ldots \iota_r} \, \delta_{1 \ldots \ldots \ldots \ldots \, 2m}^{\iota_1 \ldots \iota_r \, \iota_{r+1} \ldots \iota_{2m}} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r} = (-1)^r \varphi^r . \tag{35}$$

Die Operation $*$ ist also ein Isomorphismus von Φ^r auf Φ^{2m-r}.

Als Volumenelement wählen wir

$$\begin{aligned} * 1 &= i^m \, \omega_1 \ldots \omega_m \, \omega_{m+1} \ldots \omega_{2m} \\ &= i^m \, \| g_{k \, m+l} \| \, dz_1 \ldots dz_m \, dz_{m+1} \ldots dz_{2m} \, . \end{aligned} \tag{36}$$

Dieses ist bis auf einen positiven Faktor mit dem üblichen Riemannschen Volumenelement in reellen Koordinaten identisch, es ist nämlich nach (29)

$$* 1 = 2^m \sqrt{\| h_{\kappa\lambda} \|} \, dx_1 \ldots dx_{2m} \, . \tag{37}$$

Aus der gegebenen Metrik $ds^2 = \sum_{k,l} g_{k \, m+l} (dz_k \, dz_{m+l})$ kann man immer durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten eine neue erhalten derart, daß für das zugehörige Volumenelement

$$\int_M * 1 = 1 \tag{38}$$

gilt, ohne daß sich die übrigen Eigenschaften wesentlich ändern. Wir wollen in Zukunft immer voraussetzen, daß für unsere Metrik (38) gilt.

Aus (34) und (36) folgt leicht:

$$\varphi^r \cdot * \varphi^r = \Big(\sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} | P_{\iota_1 \ldots \iota_r} |^2 \Big) * 1 \, . \tag{39}$$

2.2. Die Ableitungsoperation d ist eine lineare Abbildung von Φ^r in Φ^{r+1}, gegeben durch

$$d\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} dP_{\iota_1 \ldots \iota_r} dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r} \, .$$

Mit Hilfe der soeben eingeführten Operation $*$ definieren wir eine zweite Ableitungsoperation δ, welche Φ^r linear in Φ^{r-1} abbildet durch

$$\delta \varphi^r = - * d * \varphi^r \, . \tag{40}$$

Durch
$$\Delta \varphi^r = (d\delta + \delta d)\, \varphi^r \tag{41}$$
ist dann eine lineare Abbildung
$$\Delta = d\delta + \delta d \tag{41'}$$
von Φ^r in sich definiert. Der Kern dieses Endomorphismus ist eine lineare Untergruppe H^r von Φ^r, die Formen $\varphi^r \in H^r$, für die also
$$\Delta \varphi^r = 0 \tag{42}$$
gilt, heißen harmonisch.

2.3. Ein Vergleich unserer Definition von $*$, δ und Δ mit derjenigen von *Hodge* und *de Rham* für reelle Formen zeigt, daß die entsprechenden Operatoren sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, und daß daher insbesondere die beiden Definitionen der harmonischen Formen übereinstimmen.

Zur Durchführung dieses Vergleichs betrachten wir eine reelle r-Form in komplexer Schreibweise. Eine solche Form ist selbst-adjungiert (vgl. *Bochner* [2], p. 88), das heißt Komponenten des Koeffiziententensors, bei welchen sich entsprechende Indizes je um m unterscheiden, und deren Indizes alle zwischen 1 und $2m$ liegen, sind zueinander konjugiert-komplex. Insbesondere sind in einem Punkte p_0 einander entsprechende kovariante und kontravariante Komponenten konjugiert-komplex. So gilt zum Beispiel für einen selbstadjungierten Vektor
$$\xi^j = g^{j\varrho}\, \xi_\varrho = \xi_{m+j} = \overline{\xi}_j \;,$$
und analog für höhere Stufen.

Die Definition des Operators $*$ von *de Rham* ([14], p. 6), den wir zum Unterschied mit $*_H$ bezeichnen wollen, lautet
$$*_H\, \varphi^r = \sqrt{\| h_{\lambda\mu} \|}\, \sum \delta^{1\,\ldots\,2m}_{\iota_1\ldots\iota_{2m}}\, h^{\iota_1\varkappa_1} \ldots h^{\iota_r\varkappa_r} P_{\varkappa_1\ldots\varkappa_r}\, dx_{\iota_{r+1}} \ldots dx_{\iota_{2m}} \;. \tag{43}$$

Wir betrachten also eine reelle Form φ^r in reellen Koordinaten in einem Punkt p_0
$$\varphi^r = \sum_{(j_1\ldots j_r)} P_{j_1\ldots j_s\, m+j_{s+1}\ldots m+j_r}\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_s}\, dx_{m+j_{s+1}} \ldots dx_{m+j_r} \;. \tag{44}$$
In komplexen Koordinaten lautet dort der Ausdruck für φ^r
$$\varphi^r = \frac{(-i)^{r-s}}{2^r} \sum_{(j_1\ldots j_r)} \Big\{ P_{j_1\ldots j_s\, m+j_{s+1}\ldots m+j_r} \prod_{q=1}^{s} (dz_{j_q} + d\overline{z}_{j_q}) \prod_{q=s+1}^{r} (dz_{j_q} - d\overline{z}_{j_q}) \;. \tag{45}$$
Aus (44) ergibt sich

$$*_H \varphi^r = \sum_{(j_{r+1}\dots j_{2m})} \delta^{1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 2m}_{j_1\dots j_s\, m+j_{s+1}\dots m+j_r\, j_{r+1}\dots j_{m-r+s}\, m+j_{m-r+s+1}\dots m+j_{2m}} P_{j_1\dots j_s\, m+j_{s+1}\dots m+j_r} \cdot$$

$$\cdot\, dx_{j_{r+1}} \dots dx_{j_{m-r+s}}\, dx_{j_{m+r-s+1}} \dots dx_{m+j_{2m}} \;,$$

oder in komplexen Koordinaten

$$*_H \varphi^r = \frac{(-i)^{m-r+s}}{2^{2m-r}} \sum_{(j_{r+1}\dots j_{2m})} \delta^{1 \cdots\cdots 2m}_{j_1\dots m+j_{2m}} \bar{P}_{j_1\dots j_{m+r}} \prod_{q=r+1}^{m-r+s} (dz_{j_q}+d\bar{z}_{j_q}) \prod_{q=m-r+s+1}^{2m} (dz_{j_q}-d\bar{z}_{j_q}) \,,$$

während aus (45) nach (34) folgt

$$*\varphi^r = \frac{(-i)^{m-r+s}}{2^r} \sum \delta^{1 \cdots\cdots 2m}_{j_1\dots m+j_{2m}} \bar{P}_{j_1\dots m+j_r} \prod_{q=r+1}^{m-r+s} (dz_{j_q}+d\bar{z}_{j_q}) \prod_{q=m-r+s+1}^{2m} (dz_{j_q}-d\bar{z}_{j_q}) \,.$$

Der Vergleich beider Ergebnisse zeigt, daß

$$* \varphi^2 = 2^{2(r-m)} *_H \varphi^r \,. \tag{46}$$

Für geradedimensionale Mannigfaltigkeiten [4]) lauten die Definitionen von *Hodge-de Rham* der Operatoren δ und Δ

$$\delta_H \varphi^r = - *_H d *_H \varphi^r \quad ,$$

$$\Delta_H \varphi^r = (d\,\delta_H + \delta_H\, d)\, \varphi^r \;.$$

Da die Operation d die Dimension um 1 erhöht, erhalten wir, wie am Anfang dieser Nr. behauptet,

$$\left.\begin{aligned} \delta_H &= \tfrac{1}{4}\,\delta && \text{a)} \\ \Delta_H &= \tfrac{1}{4}\,\Delta && \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Es folgt insbesondere, daß für unsere harmonischen Formen der Satz von *Hodge* gilt, der den Zusammenhang zwischen den Gruppen H^r und Homologieeigenschaften von $M^{(m)}$ liefert und daher die Übertragung der folgenden Resultate auf die Kohomologie- und Homologiegruppen gestattet. Der Satz von *Hodge* besagt, daß die Gruppe der reellen harmonischen r-Formen auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M isomorph ist zur r-ten Kohomologiegruppe von M bezüglich reeller Koeffizienten. Daher ist auch die Gruppe der komplexen harmonischen r-Formen auf M dieser Kohomologiegruppe isomorph. Insbesondere ist der Rang der Gruppe H^r bezüglich komplexer Koeffizienten gleich der r-ten Bettischen Zahl p^r von M.

---

[4]) *de Rham* [15], p. 136. Das Vorzeichen ist hier wegen der geraden Dimension der Mannigfaltigkeit vom Grad der Form unabhängig. Ist die Dimension der Mannigfaltigkeit allgemein $= n$, so gilt

$$\delta = (-1)^{nr+n+1} * d *$$

2.4. Mit Hilfe der Ableitungsformeln von 1.6 ergibt sich als explizite Darstellung der Operation d

$$d\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \left\{ \sum_{\iota=1}^{2m} P_{\iota_1 \ldots \iota_r, \iota}\, \omega_\iota \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r} + \sum_{\lambda=1}^{r} (-1)^{\lambda-1} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} \Gamma_{\iota_\lambda \varkappa \varrho}\, \omega_\varkappa \omega_\varrho \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\lambda} \ldots \omega_{\iota_r} \right\}. \tag{48}$$

[5]

Diese Formel, auf $*\varphi^r$ angewendet, ergibt

$$\begin{aligned} d * \varphi^r = i^m \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \Bigg\{ & \sum_{\iota=1}^{2m} \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r, \iota}\, \omega_{\iota_{r+1}} \ldots \omega_{\iota_{2m}} + \\ & + \sum_{\iota=1}^{r} (-1)^{\varkappa+\varrho}\, \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r} \Gamma_{\iota \iota_\varkappa \iota_\varrho}\, \omega_\iota \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\varkappa} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\varrho} \ldots \omega_{\iota_r} \Bigg\} \end{aligned}$$

und hieraus folgt durch nochmalige Anwendung der Operation $*$

$$\begin{aligned} \delta\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \Bigg\{ & \sum_{\lambda=1}^{r} (-1)^{\lambda} P_{\iota_1 \ldots \iota_r, \iota_\lambda}\, \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\lambda} \ldots \omega_{\iota_r} \\ & + \sum_{\varkappa, \varrho=1}^{r} (-1)^{\varkappa+\varrho+1} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} \Gamma_{\iota, \iota_\varkappa \iota_\varrho}\, \omega_\iota \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\varkappa} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\varrho} \ldots \omega_{\iota_r} \Bigg\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Die Vorzeichen sind dabei bestimmt durch

$$\delta^{1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2m}_{\iota_\varkappa \iota_{r+1} \ldots \iota_{2m} \iota_1 \ldots \iota_{\varkappa-1} \iota_{\varkappa+1} \ldots \iota_r} = (-1)^{(\varkappa-1)(2m-r+1)+(r-\varkappa)(2n-r)}\, \delta^{1 \ldots 2m}_{\iota_1 \ldots \iota_{2m}} = (-1)^{\varkappa-1},$$

$$\delta^{1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2m}_{\iota_\varkappa \iota_\varrho \iota_{r+1} \ldots \iota_{r+\lambda-1} \iota_{r+\lambda+1} \ldots \iota_{2m} \iota_{r+\lambda} \iota_1 \ldots \iota_{\varkappa-1} \iota_{\varkappa+1} \ldots \iota_{\varrho-1} \iota_{\varrho+1} \ldots \iota_r} = (-1)^{\varrho+\varkappa+\lambda-1}.$$

Mit Hilfe von (48) und (49) kann nun Δ berechnet werden. Es genügt für unsere Zwecke, dies in einem Punkt p_0 zu tun. Nennen wir in den rechten Seiten von (48) und (49) die erste Summe d_0 respektiv δ_0, die zweite d_1 respektiv δ_1, so ist in p_0

$$\Delta\, \varphi^r = (d_0 \delta + \delta_0 d)\, \varphi^r ,$$

somit bei Berücksichtigung von (23) und (25)

$$\begin{aligned} \Delta\varphi^r = - \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \Bigg\{ & \sum_{\iota=1}^{2m} P_{\iota_1 \ldots \iota_r, \iota, \iota}\, \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r} + \\ & + \sum_{\varkappa, \lambda, \varrho, \mu} (-1)^{\varkappa+\lambda} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} R_{\varrho \iota_\varkappa \iota_\lambda \mu}\, \omega_\mu \omega_\varrho \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\varkappa} \ldots \hat{\omega}_{\iota_\lambda} \ldots \omega_{\iota_r}. \end{aligned} \tag{50}$$

In der zweiten Summe können auch mehrere Indizes gleich sein, das heißt ausgeschrieben

[5] $\wedge$ bedeutet dabei, daß die darunterstehende Größe aus der betreffenden Reihe wegzulassen ist.

$$\Delta\varphi^r = - \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)} \left\{ \sum_{\iota=1}^{2m} P_{\iota_1\ldots\iota_r,\iota,\iota}\,\omega_{\iota_1}\ldots\omega_{\iota_r} \right.$$

$$+ \sum_{(\iota_\varkappa,\iota_\lambda\neq\varrho,\mu)} (-1)^{\varkappa+\lambda} P_{\iota_1\ldots\iota_r} R_{\varrho\,\iota_\varkappa\,\iota_\lambda\,\mu}\,\omega_\mu\,\omega_\varrho\,\omega_{\iota_1}\ldots\hat{\omega}_{\iota_\varkappa}\ldots\hat{\omega}_{\iota_\lambda}\ldots\omega_{\iota_r}$$

$$+ \sum_{(\iota_\lambda\neq\mu)} (-1)^{\lambda} P_{\iota_1\ldots\iota_r} R_{\iota_\lambda\,\mu}\,\omega_{\iota_1}\ldots\hat{\omega}_{\iota_\lambda}\ldots\omega_{\iota_r}$$

$$\left. + \sum R P_{\iota_1\ldots\iota_r}\,\omega_{\iota_1}\ldots\omega_{\iota_r} \right\} . \tag{50'}$$

Diese Formeln sind offenbar nur in einem Punkte p_0 gültig.

2.5. Wir stellen nun einige wichtige Eigenschaften der Operationen d, $*$, δ und Δ zusammen.

Für beliebige Differentialformen φ^r gilt [3])

$$dd\varphi^r = 0 . \tag{51}$$

Daraus folgt

$$\delta\delta\varphi^r = 0 . \tag{52}$$

Beweis: $\delta\delta\varphi^r = *d**d*\varphi^r = (-1)^{r+1}*dd*\varphi^r = 0$.

Es folgen unmittelbar die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} d\Delta\varphi^r &= \Delta d\varphi^r \ (= d\delta d\varphi^r) , && \text{a)} \\ \delta\Delta\varphi^r &= \Delta\delta\varphi^r \ (= \delta d\delta\varphi^r) . && \text{b)} \end{aligned}\right. \tag{53}$$

Für die Operation $*$ ergeben sich aus (35) folgende Vertauschungsrelationen:

$$\left.\begin{aligned} *d\varphi^r &= (-1)^{r+1}\,\delta*\varphi^r , && \text{a)} \\ *\delta\varphi^r &= (-1)^{r}\ d*\varphi^r , && \text{b)} \\ *\Delta\varphi^r &= \Delta*\varphi^r . && \text{c)} \end{aligned}\right. \tag{54}$$

Beweis:

$$\delta*\varphi^r = -*d**\varphi^r = (-1)^{r+1}*d\varphi^r ,$$

$$*\delta\varphi^2 = -**d*\varphi^r = (-1)^{r+2}\,d*\varphi^2 ,$$

$$*\Delta\varphi^r = \big((-1)^r\delta*\delta + (-1)^{r+1}d*d\big)\,\varphi^r = \Delta*\varphi^r .$$

Aus der letzten Formel folgt eine Aussage über die harmonischen Formen.

Satz 1. Mit φ^r ist auch $*\varphi^r$ eine harmonische Form. $*$ ist ein Isomorphismus von H^r auf H^{2m-r}.

Nach dem Satz von *Hodge* folgt daraus für die Bettischen Zahlen die Dualitätsbeziehung $p^r = p^{2m-r}$. Die Beziehungen zwischen dem Operator $*$ und der Dualität in Mannigfaltigkeiten werden im § 6 noch genauer untersucht.

2.6. Für das Produkt zweier Formen $\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r}$ und $\psi^q = \sum_{(\lambda_1 \ldots \lambda_q)} Q_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} \omega_{\lambda_1} \ldots \omega_{\lambda_q}$ gilt die bekannte Ableitungsformel [3])

$$d(\varphi^r \cdot \psi^q) = d\varphi^r \cdot \psi^q + (-1)^r \varphi^r \cdot d\psi^q \; . \tag{55}$$

Für $\delta(\varphi^r \cdot \psi^q)$ läßt sich im allgemeinen keine so einfache Formel angeben. In einem Punkt p_0 erhält man jedoch eine Darstellung, welche für unsere Zwecke genügt:

$$\begin{aligned} [\delta(\varphi^r \cdot \psi^q)]_{p_0} &= \delta\varphi^r \cdot \psi^q + (-1)^2 \varphi^r \cdot \delta\psi^q \\ &+ \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_{r+q})} \left\{ \sum_{l=r+1}^{r+q} (-1)^l P_{\iota_1 \ldots \iota_r, \iota_l} Q_{\iota_{r+1} \ldots \iota_{r+q}} \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r} \ldots \hat{\omega}_{\iota_l} \ldots \omega_{\iota_{r+q}} \right. \\ &+ \left. \sum_{l=1}^{r} (-1)^l P_{\iota_1 \ldots \iota_r} Q_{\iota_{r+1} \ldots \iota_{r+q}, \iota_l} \omega_{\iota_1} \ldots \hat{\omega}_{\iota_l} \ldots \omega_{\iota_r} \ldots \omega_{\iota_{r+q}} \right\} . \end{aligned} \tag{56}$$

§ 3. Der Operator *C*

3.1. Es ist auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten $M^{(m)}$ verhältnismäßig einfach, eine gewisse Übersicht über die dort möglichen Differentialformen zu gewinnen. Ein erstes Klassifikationsprinzip ergibt sich aus den Transformationsgleichungen (7) und dem Invarianzsatz in 1.3.

Wählen wir in einer r-Form φ^r die Teilsumme aller Glieder aus, die in den $d\bar{z}_k$ von einem festen Grade h sind, so bildet diese Teilsumme selbst wieder eine r-Form. Dies führt uns zu folgender Definition:

Eine r-Form φ^r heißt **reine Form**, wenn alle ihre von 0 verschiedenen Glieder vom gleichen Grade h in den $d\bar{z}_k$ sind. Dieser Grad h heißt der **Typus** der r-Form; durch einen unteren Index in Klammern, zum Beispiel (h), deuten wir stets an, daß eine Form rein (vom Typus h) ist, zum Beispiel $\varphi^r_{(h)}$. Alle reinen r-Formen vom Typus h bilden eine Vektor-Gruppe $\Phi^r_{(h)}$, die eine lineare Untergruppe von Φ^r ist. Die harmonischen r-Formen vom Typus h bilden eine lineare Untergruppe $H^r_{(h)}$ von H^r. Der Rang von $H^r_{(h)}$ sei $\varepsilon^r_{(h)}$.

Jede Differentialform läßt sich offenbar eindeutig als Summe reiner Formen darstellen

$$\varphi^r = \sum_{s=0}^{r} \varphi^r_{(s)} \; . \tag{57}$$

Φ^r zerfällt also in die direkte Summe (mit $\dot{+}$ bezeichnet)

$$\Phi^r = \Phi^r_{(0)} \dot{+} \Phi^r_{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} \Phi^r_{(r)} \ . \tag{58}$$

Lemma. Ist $\varphi^r_{(h)}$ eine reine r-Form vom Typus h, so ist auch $\Delta\varphi^r_{(h)}$ eine solche.

Beweis: In einem Punkt p_0 läßt sich $\Delta\varphi^r_{(h)}$ nach (50) berechnen. Da wegen der Voraussetzung der Kählermetrik nur die unter (23) beschriebenen Komponenten des Krümmungstensors von 0 verschieden sind, gilt dort das Lemma. Nach dem Schluß mit geodätischen Koordinaten (vergleiche 1.6) gilt es also allgemein.

Aus dem Lemma folgt der

Satz 2. Mit φ^r sind auch alle reinen Komponenten $\varphi^r_{(h)}$ von φ^r in (57) harmonisch. H^r zerfällt in die direkte Summe

$$H^r = H^r_{(0)} \dot{+} H^r_{(1)} \dot{+} \cdots \dot{+} H^r_{(r)} \ . \tag{59}$$

Korollar zu Satz 2: Für die Bettischen Zahlen p^r von $M^{(m)}$ folgt

$$p^r = \sum_{s=0}^{r} \varepsilon^r_{(s)} \ . \tag{60}$$

Beweis von Satz 2: Setzen wir auf Grund des Lemmas

$$\Delta\varphi^r_{(s)} = \psi^r_{(s)} \ ,$$

so ist für eine harmonische Form $\varphi^r = \sum_s \varphi^r_{(s)}$

$$\Delta\varphi^r = \sum_s \Delta\varphi^r_{(s)} = \sum \psi^r_{(s)} = 0 \ ,$$

das heißt wegen der Eindeutigkeit der Darstellung (57)

$$\psi^r_{(s)} = \Delta\varphi^r_{(s)} = 0 \ .$$

3.2. Wir definieren jetzt eine lineare Operation C in Φ^r, welche wesentlich von der komplexen Struktur abhängig ist. Der r-Form $\varphi^r = \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)} P_{\iota_1\ldots\iota_r}\,\omega_{\iota_1}\ldots\omega_{\iota_r}$ wird eine neue r-Form zugeordnet durch

$$C\varphi^r = i^r \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)} \overline{P}_{\iota_1\ldots\iota_r}\,\omega_{m+\iota_1}\cdots\omega_{m+\iota_r} \ . \tag{61}$$

Für eine reine Form läßt sich C darstellen als

$$C\varphi^r_{(s)} = i^r\,(-1)^s\,\overline{\varphi}^r_{(s)} \tag{62}$$

Aus dieser Definition folgt

$$CC\varphi^r = (-1)^r \varphi^r \tag{63}$$

und

$$\overset{-1}{C}\varphi^r = (-1)^r C\varphi^r \ . \tag{64}$$

Hieraus ergibt sich

Satz 3. Die Abbildung C ist ein Automorphismus von Φ^r. C ist ein Isomorphismus von $\Phi^r_{(h)}$ auf $\Phi^r_{(r-h)}$.

Für das Weitere führen wir noch die durch C Transformierten der im vorigen Paragraphen definierten Operationen ein:

$$\left.\begin{array}{llr} \tilde{*} = \overset{-1}{C} * C \ , & & \text{a)} \\ \tilde{d} = \overset{-1}{C} dC \ , & & \text{b)} \\ \tilde{\delta} = \overset{-1}{C} \delta C \ , & & \text{c)} \\ \tilde{\Delta} = \overset{-1}{C} \Delta C \ , & & \text{d)} \end{array}\right\} \tag{65}$$

und untersuchen sie hauptsächlich im Hinblick auf Vertauschungsregeln. Dabei wird sich herausstellen, daß $\tilde{*}$ und $\tilde{\Delta}$ nichts Neues ergeben, während $\tilde{d}$ und $\tilde{\delta}$ Ableitungsoperatoren sind, die für reine Formen bis auf ein Vorzeichen mit den gewöhnlichen zusammenfallen. Für andere Formen weichen sie von diesen ab.

3.3. Man verifiziert leicht durch Einsetzen (61), daß

$$C(\varphi^r \cdot \psi^q) = C\,\varphi^r \cdot C\,\psi^q \ . \tag{66}$$

Nun betrachten wir die Vertauschung der Operatoren C und $*$.

$$C * \varphi^r = (-1)^{m-r} * C\,\varphi^r \ , \tag{67}$$

$$* \varphi^r = (-1)^{m-r}\, \tilde{*}\, \varphi^r \ . \tag{68}$$

Diese beiden Formeln sind wegen (64) äquivalent. Ihr Beweis erfolgt durch explizite Darstellung:

$$C * \varphi^r = i^{r-m} \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \delta^{1\,\ldots\,2m}_{\iota_1 \ldots \iota_{2m}} P_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{m+\iota_{r+1}} \ldots \omega_{m+\iota_{2m}} = (-1)^{m-r} * C\,\varphi^r \ .$$

Die Formeln (67) und (68) sagen im wesentlichen nichts anderes aus als

$$* \bar{\varphi}^r = (-1)^r\, \overline{* \varphi^r} \ . \tag{69}$$

Dies ist ein neuer Beweis dafür, daß der Operator $*$ reelle Formen wieder in reelle überführt, wie dies schon aus 2.3 hervorgeht.

Jetzt verifizieren wir, daß $\tilde{d}$ und $\tilde{\delta}$ die formalen Eigenschaften von Ableitungen haben.

$$\tilde{d}\tilde{d}\varphi^r = 0 \ , \qquad \text{a)}$$
$$\tilde{\delta}\tilde{\delta}\varphi^r = 0 \ . \qquad \text{b)} \qquad (70)$$

Beweis: Nach (51) und (52) ist

$$\tilde{d}\tilde{d}\varphi^r = \overset{-1}{C} d d C \ \varphi^r = 0 \ ,$$
$$\tilde{\delta}\tilde{\delta}\varphi^r = \overset{-1}{C} \delta\delta C \ \varphi^r = 0 \ .$$

Ferner gilt analog zu (40) und (41)

$$\tilde{\delta}\varphi^r = - * \tilde{d} * \varphi^r \ , \qquad (71)$$

$$\tilde{\Delta}\varphi^r = (\tilde{d}\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\tilde{d})\, \varphi^r \ . \qquad (72)$$

Beweis:

$$\tilde{\delta}\varphi^r = - \overset{-1}{C} * d * C \ \varphi^r = (-1)^{m-r} (-1)^{r-1} (-1)^{m-(2m-r+1)} * \overset{-1}{C} d C * \varphi^r$$
$$= - * \tilde{d} * \varphi^r \ .$$

Hieraus folgen sofort die zu (54) analogen Formeln

$$* \tilde{d}\varphi^r = (-1)^{r+1} \tilde{\delta} * \varphi^r \ , \qquad \text{a)}$$
$$* \tilde{\delta}\varphi^r = (-1)^r \ \tilde{d} * \varphi^r \ , \qquad \text{b)} \qquad (73)$$
$$* \tilde{\Delta}\varphi^r = \tilde{\Delta} * \varphi^r \ . \qquad \text{c)}$$

Zum Abschluß dieser Formelreihe zeigen wir noch, daß

$$C\Delta = \Delta C \qquad (74)$$

das heißt

$$\tilde{\Delta} = \Delta \ . \qquad (74')$$

Zum Beweis dieser Formeln dient der Schluß mit geodätischen Koordinaten. In einem Punkt p_0 ist nach (50)

$$\Delta C \varphi^r = - \sum_{(\iota_1 \dots \iota_r)} \left\{ \sum_{\iota=1}^{2m} P_{\iota_1 \dots \iota_r, \iota, \iota}\, \omega_{m+\iota_1} \dots \omega_{m+\iota_r} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\varkappa, \lambda} (-1)^{\varkappa+\lambda} P_{\iota_1 \dots \iota_r} R_{\varrho\, m+\iota_\varkappa\, m+\iota_\lambda\, \mu}\, \omega_\varrho\, \omega_\mu\, \omega_{m+\iota_1} \dots \hat{\omega}_{m+\iota_\varkappa} \dots \hat{\omega}_{m+\iota_\lambda} \dots \omega_{m+\iota_r} \right\} ,$$

$$C \Delta \varphi^r = - \sum_{(\iota_1 \dots \iota_r)} \left\{ \sum_{\iota=1}^{2m} P_{\iota_1 \dots \iota_r, \iota, \iota}\, \omega_{m+\iota_1} \dots \omega_{m+\cdot_r} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\varkappa, \lambda} (-1)^{\varkappa+\lambda} P_{\iota_1 \dots \iota_r} R_{\sigma\, \iota_\varkappa\, \iota_\lambda\, \tau}\, \omega_{m+\sigma}\, \omega_{m+\tau}\, \omega_{m+\iota_1} \dots \hat{\omega}_{\iota_\varkappa} \dots \hat{\omega}_{\iota_\lambda} \dots \omega_{m+\iota_r} \right\} .$$

Da nur die in (23) angegebenen Komponenten des Krümmungstensors von 0 verschieden sind, können wir hier $\sigma = m + \varrho$, $\tau = m + \mu$ usw. wählen, so daß wegen (24) die beiden rechten Seiten identisch werden. Hieraus folgt:

Satz 4. Mit φ^r sind auch $C\varphi^r$ und $\bar{\varphi}^r$ harmonisch. C bewirkt einen Automorphismus von H^r sowie einen Isomorphismus von $H^r_{(h)}$ auf $H^r_{(r-h)}$.

Satz 4 bedeutet für die Ränge der Gruppen $H^r_{(h)}$

$$\varepsilon^r_{(h)} = \varepsilon^r_{(r-h)} \ . \tag{75}$$

Setzen wir dies in (60) ein, so ergibt sich für die Bettischen Zahlen der

Satz 5.

$$\begin{aligned} p^r &= \sum_{h=0}^{r} \varepsilon^r_{(h)} = 2 \sum_{h=0}^{k} \varepsilon^r_{(h)} \equiv 0 \pmod 2 \qquad \text{für } r = 2k+1 \qquad \text{a)} \\ p^r &= \sum_{h=0}^{\iota} \varepsilon^r_{(h)} = 2 \sum_{h=0}^{k=1} \varepsilon^r_{(h)} + \varepsilon^r_{(k)} \equiv \varepsilon^r_{(\frac{r}{2})} \pmod 2 \qquad \text{für } r = 2k \qquad \text{b)} \end{aligned} \tag{76}$$

Die Formel (76.a), welche besagt, daß in einer Kählerschen Mannigfaltigkeit die Bettischen Zahlen in den ungeraden Dimensionen gerade sind, ist eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von *S. Lefschetz* über algebraische Mannigfaltigkeiten. Die Formel (76.b) kann dazu verwendet werden, gewisse Sätze von *S. Bochner* [2] über den Zusammenhang zwischen Krümmung und Bettischen Zahlen auf Kählerschen Mannigfaltigkeiten zu verschärfen.*)

3.4. Zum Schluß beweisen wir noch eine wichtige Formelgruppe, die d, δ mit $\tilde{d}$, $\tilde{\delta}$ verknüpft

$$\begin{aligned} d\tilde{d} + \tilde{d}d &= 0 \ , \qquad \text{a)} \\ \delta\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\delta &= 0 \ . \qquad \text{b)} \end{aligned} \tag{77}$$

Um die erste dieser Formeln zu beweisen, betrachten wir eine r-Form $\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r} dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r}$ und bilden

$$\tilde{d}\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r;\, m+\iota} dz_\iota dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r} \ ,$$

sowie

$$d\varphi^r = \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} P_{\iota_1 \ldots \iota_r;\, \iota} dz_\iota dz_{\iota_1} \ldots dz_{\iota_r} \ .$$

Dann ist

*) Zusatz bei der Korrektur: Vgl. *H. Guggenheimer,* A Note on Curvature and Betti Numbers, erscheint in Proc. Amer. Math. Soc.

$$
\begin{aligned}
(d\tilde{d}+\tilde{d}d)\,\varphi^r = \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)} &\Big\{ \sum_{\varkappa,\lambda} P_{\iota_1\ldots\iota_r;\, m+\varkappa;\, \lambda}\, dz_\lambda\, dz_\varkappa\, dz_{\iota_1}\ldots dz_{\iota_r} \\
&+ \sum_{\varkappa,\lambda} P_{\iota_1\ldots\iota_r;\, \lambda;\, m+\varkappa}\, dz_\varkappa\, dz_\lambda\, dz_{\iota_1}\ldots dz_{\iota_r} \Big\} \\
= \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)} \sum_{\varkappa,\lambda} &\left(P_{\iota_1\ldots\iota_r;\, m+\varkappa;\, \lambda} - P_{\iota_1\ldots\iota_r;\, \lambda;\, m+\varkappa}\right) dz_\lambda\, dz_\varkappa\, dz_{\iota_1}\ldots dz_{\iota_r} = 0\,.
\end{aligned}
$$

(77.b) folgt dann wie üblich durch Transformation mit $*$.

§ 4. Die Operatoren L und Λ

4.1. Der im vorigen Paragraphen eingeführte Operator C läßt sich auf jeder Mannigfaltigkeit mit komplex-analytischer Struktur definieren. Dagegen beruhen die Operatoren, die wir jetzt einführen wollen, wesentlich auf der Voraussetzung, daß in der betrachteten Mannigfaltigkeit eine Kählermetrik definiert ist.

Der Kählermetrik

$$ds^2 = \sum_{k,l} g_{k\, m+l}(dz_k\, d\bar{z}_l) = \sum_k (\omega_k\, \overline{\omega}_k)$$

läßt sich eine schiefe Differentialform vom Grade 2

$$\Omega = i \sum_{k,l} g_{k\, m+l}\, dz_k\, dz_{m+l} = i \sum_k \omega_k\, \omega_{m+k} \tag{78}$$

zuordnen, auf diese beziehen sich die folgenden Betrachtungen.

Die Voraussetzung (K_1) $\dfrac{\partial g_{k\, m+l}}{\partial z_j} - \dfrac{\partial g_{j\, m+l}}{\partial z_k} = 0$ ist dabei äquivalent mit

$$d\Omega = 0\,. \tag{K$_4$}$$

4.2. Wir untersuchen die 2-Form Ω genauer. Zuerst berechnen wir $*\Omega$. Es ist nach Definition

$$
\begin{aligned}
*\Omega &= i^{m-1} \sum_{j=1}^{m} \delta^{1\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, 2m}_{j\, m+j\, 1\ldots j-1\, j+1\ldots m+j-1\, m+j+1\ldots 2m}\, \omega_1\ldots\omega_{j-1}\,\omega_{j+1}\ldots\omega_{m+j-1}\,\omega_{m+j+1}\ldots\omega_{2m} \\
&= (-i)^{m+1} \sum_{j=1}^{m} \omega_1\ldots\omega_{j-1}\,\omega_{j+1}\ldots\omega_{m+j-1}\,\omega_{m+j+1}\ldots\omega_{2m} \\
&= i^{m-1}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{m}{}' \;\omega_k\,\overline{\omega}_k\,.
\end{aligned}
$$

Andererseits berechnen wir die $(m-1)$-te Potenz von Ω. Dabei wollen wir, zur Unterscheidung von Gradbezeichnungen, Exponenten immer in eckigen Klammern schreiben. Es ist

$$\Omega^{[m-1]} = i^{m-1} \sum \omega_{j_1}\,\overline{\omega}_{j_1}\ldots\omega_{j_{m-1}}\,\overline{\omega}_{j_{m-1}}\,,$$

wobei in der Summe $j_1, \ldots, j_{m-1}$ unabhängig voneinander von 1 bis m gehen, also

$$\Omega^{[m-1]} = i^{m-1}(m-1)! \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m}{}' \omega_k \overline{\omega}_k \ .$$

Vergleichen wir dies mit dem obigen Resultat, so ergibt sich

$$*\Omega = \frac{1}{(m-1)!}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Omega^{[m-1]} \ . \tag{79}$$

Allgemeiner gilt

$$*\Omega^{[k]} = \frac{k!}{(m-k)!}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Omega^{[m-k]} \tag{80}$$

Beweis: Es ist

$$\frac{1}{k!} *\Omega^{[k]} = i^{m-k} \sum_{(j_{k+1} \ldots j_{2m})} \delta^{1 \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ 2m}_{j_1\, m+j_1 \ldots j_k\, j_{m+k}\, j_{k+1} \ldots j_{2m}} \omega_{j_{k+1}} \ldots \omega_{j_{2m}}$$

$$= i^{m-k} \sum_{(j_1 \ldots j_k)} (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{k=1,\, k \neq j_1 \ldots j_k}^{m}{}' \omega_k \overline{\omega}_k \ ,$$

wobei sich die Summe über alle Kombinationen $j_1, \ldots, j_k$ von $1, \ldots, m$ erstreckt, und

$$\Omega^{[m-k]} = i^{m-k} \sum_{(j_1, \ldots, j_{m-k})} \omega_{j_1} \overline{\omega}_{j_1} \ldots \omega_{j_{m-k}} \overline{\omega}_{j_{m-k}} =$$

$$= (m-k)!\, i^{m-k} \sum_{(j_1 \ldots j_k)} \prod_{\substack{k=1, \ldots, m\\ k \neq j_1, \ldots, j_k}}{}' \omega_k \overline{\omega}_k \ .$$

Es ist insbesondere

$$\Omega^{[m]} = m!\,(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} * 1 \ , \tag{81}$$

also von 0 verschieden (dies sogar in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit), daher sind auch alle Potenzen $\Omega^{[k]}$ $k = 0, 1, \ldots, m$ überall von 0 verschieden.

Aus (K_4) folgt nach der Produktformel (55) $d\Omega^{[k]} = 0$ und hieraus ergibt sich nach (80) auch $d * \Omega^{[k]} = 0$, also

$$\delta\Omega^{[k]} = 0 \ , \tag{82}$$

somit

$$\Delta\Omega^{[k]} = 0 \ . \tag{83}$$

Satz 6. Die Formen $\Omega^{[k]}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ sind harmonisch und $\neq 0$.

Es gibt also in den geraden Dimensionen $2k \leqslant 2m$ mindestens eine harmonische Form $\neq 0$; dies bedeutet für die Bettischen Zahlen

$$p^{2k} \geqslant 1 \ , \qquad k = 0, \ldots, m \ . \tag{84}$$

Übrigens sind die Formen $\Omega^{[k]}$ vom Typus k, es ist also sogar (vgl. 3.1)

$$\varepsilon^{2k}_{(k)} \geqslant 1 \ , \qquad k \leqslant m \ . \tag{85}$$

(84) bzw. (85) ist eine erste notwendige Bedingung dafür, daß sich auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit eine Kählersche Metrik definieren läßt.

4.3. Wir führen jetzt, nach *A. Weil* [16], zwei lineare Operatoren L und Λ ein, welche die Vektorgruppe Φ^r in Φ^{r+2} resp. Φ^{r-2} abbilden, nämlich

$$\left.\begin{aligned} L\,\varphi^r &= \varphi^r \cdot \Omega^2 && \text{a)} \\ \Lambda\,\varphi^r &= (-1)^r * L * \varphi^r \ . && \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

Für sie gelten die Vertauschungsregeln

$$\left.\begin{aligned} *\Lambda\,\varphi^r &= L * \varphi^r \ , && \text{a)} \\ *L\,\varphi^r &= \Lambda * \varphi^r \ ; && \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned} C\,L\,\varphi^r &= L\,C\,\varphi^r \ , && \text{a)} \\ C\,\Lambda\,\varphi^r &= \Lambda\,C\,\varphi^r \ . && \text{b)} \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

(87) folgt unmittelbar aus der Definition (86) durch beidseitige Anwendung von $*$. Um (88) zu beweisen, schreiben wir L ausführlich in der Form

$$L\,\varphi^r = i \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \sum_{k=1}^{m} P_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{\iota_1} \ldots \omega_{\iota_r}\, \omega_k\, \omega_{m+k} \ .$$

Es ist also

$$L\,C\,\varphi^r = i^{r+1} \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \sum_{k=1}^{m} \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{m+\iota_1} \ldots \omega_{m+\iota_r}\, \omega_k\, \omega_{m+k}$$

und

$$\begin{aligned} C\,L\,\varphi^r &= i^{r+1} \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \sum_{k=1}^{m} \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{m+\iota_1} \ldots \omega_{m+\iota_r}\, \omega_{m+k}\, \omega_{2m+k} \\ &= i^{r+1} \sum_{(\iota_1 \ldots \iota_r)} \sum_{k=1}^{m} \overline{P}_{\iota_1 \ldots \iota_r}\, \omega_{m+\iota_1} \ldots \omega_{m+\iota_r}\, \omega_k\, \omega_{m+k} = L\,C\,\varphi^r \ , \end{aligned}$$

womit (88.a) bewiesen ist. (88.b) folgt dann durch Transformation mit $*$ und Anwendung von (67):

$$\begin{aligned} C\,\Lambda\,\varphi^r &= (-1)^r\, C * L * \varphi^r = (-1)^m * CL * \varphi^r = (-1)^m * L\,C * \varphi^r \\ &= (-1)^r * L * C\,\varphi^r = \Lambda\,C\,\varphi^r \ . \end{aligned}$$

4.4. Zwischen den Ableitungsoperatoren d und δ einerseits und L und Λ bestehen wichtige Zusammenhänge.

Aus (55) ergibt sich für die Vertauschung von d und L:

$$dL\,\varphi^r = d(\varphi^r\,\Omega^2) = d\varphi^r\cdot\Omega^2 + (-1)^r\,\varphi^r\,d\Omega^2 = L\,d\varphi^r\ .$$

Wir berechnen ferner δL. Dies kann unter Verwendung des Schlusses mit geodätischen Koordinaten geschehen (vgl. 1.6). Im Punkte p_0 ergibt sich dabei eine Formel, auf deren beiden Seiten nur Differentialformen stehen; diese gilt also allgemein

$$\begin{aligned}(\delta L\,\varphi^r)_{p_0} &= \delta\varphi^r\cdot\Omega^2 + (-1)^r\varphi^r\,\delta\Omega^2 + \\ &\quad + (-1)^r \sum_{(\iota_1\ldots\iota_r)}\sum_{k=1}^{m}\left\{P_{\iota_1\ldots\iota_r,\,k}\,\omega_{\iota_1}\ldots\omega_{\iota_r}\omega_{m+k} - P_{\iota_1\ldots\iota_r,\,m+k}\,\omega_{\iota_1}\ldots\omega_{\iota_r}\omega_k\right\} \\ &= L\,\delta\varphi^r - \tilde{d}\varphi^r\ .\end{aligned}$$

Entsprechende Ausdrücke für Δ erhalten wir, indem wir alle auftretenden Formen mit $*$ transformieren; es ist

$$*\,dL*\varphi^r = \delta\Lambda\,\varphi^r\quad,\qquad *\,Ld*\varphi^r = \Lambda\,\delta\varphi^r\quad,$$

und

$$*\,\delta L*\varphi^r = -\,d\Lambda\,\varphi^r\ ,\qquad *\,L\delta*\varphi^r = -\,\Lambda\,\delta\varphi^r\ .$$

Zusammengefaßt ergeben sich somit folgende Formeln:

$$\begin{aligned} dL - Ld &= 0\ , &&\text{a)}\\ \delta\Lambda - \Lambda\delta &= 0\ . &&\text{b)}\end{aligned}\qquad(89)$$

$$\begin{aligned} \delta L - L\delta &= -\tilde{d}\ , &&\text{a)}\\ d\Lambda - \Lambda d &= -\tilde{\delta}\ . &&\text{b)}\end{aligned}\qquad(90)$$

Hieraus folgen schließlich noch die Vertauschungsformeln für Δ:

$$\begin{aligned} \Delta L - L\Delta &= 0\ , &&\text{a)}\\ \Delta\Lambda - \Lambda\Delta &= 0\ . &&\text{b)}\end{aligned}\qquad(91)$$

Der Beweis ist wieder nur für eine der beiden Formeln nötig, zum Beispiel für (91.a); die andere Formel folgt daraus durch Transformation mit $*$. Nach (89) und (77) ist

$$\begin{aligned}\Delta L\,\varphi^r &= (d\delta L + \delta dL)\,\varphi^r = (dL\delta + \delta Ld - d\tilde{d})\,\varphi^r \\ &= (Ld\delta + L\delta d - (d\tilde{d} + \tilde{d}d))\,\varphi^r = L\Delta\varphi^r\ .\end{aligned}$$

Aus (91) folgt

Satz 7. Ist φ^r harmonisch, so sind auch $L\varphi^r$ und $\Lambda\varphi^r$ harmonische Formen.

Zusammenfassend gilt für die Operatoren $*$, C, L und Λ und die Gruppen H^r aller harmonischen r-Formen, für alle r: $*$ ist ein Isomorphismus von H^r auf H^{2m-r}, C von H^r auf sich; L ist ein Homomorphismus von H^r in H^{r+2}, Λ von H^r in H^{r-2}. Für die Gruppen $H^r_{(s)}$ der reinen harmonischen Formen vom Typus s gilt für alle r und s:

$*$ ist ein Isomorphismus von $H^r_{(s)}$, auf $H^{2m-r}_{(m-s)}$, C von $H^r_{(s)}$ auf $H^r_{(r-s)}$.
L ist ein Homomorphismus von $H^r_{(s)}$ in $H^{r+2}_{(s+1)}$, Λ von $H^r_{(s)}$ in $H^{r-2}_{(s-1)}$.

Harmonische Formen werden also durch diese vier Operatoren stets wieder in harmonische, reine Formen in reine übergeführt. Resultate, welche die vier Operatoren betreffen und die wir für die Gruppe Φ^r aufstellen werden, lassen sich daher ohne weiteres auf H^r und $H^r_{(s)}$ anwenden.

Wir werden im folgenden die durch L und Λ bewirkten Homomorphismen genauer untersuchen und zeigen, daß sie zum Teil Isomorphismen sind.

4.5. Φ^r_0 sei der Kern der Abbildung Λ von Φ^r in Φ^{r-2}; das heißt Φ^r_0 besteht aus denjenigen r-Formen ψ^r, für welche $\Lambda\psi^r = 0$ ist. Solche Formen heißen effektiv oder von der Klasse 0. Die Untergruppe der effektiven harmonischen r-Formen soll mit H^r_0 bezeichnet werden, die der reinen effektiven harmonischen r-Formen mit $H^r_{(s)0}$. Ihre Ränge seien ε^r_0 und $\varepsilon^r_{(s)0}$.

Eine Form φ^r heißt von der Klasse k, wenn sie in der Gestalt $\varphi^r = L^{[k]}\,\psi^{r-2k}$ dargestellt werden kann, wobei ψ^{r-2k} eine effektive Form ist. Die Vektorgruppen Φ^r_k der r-Formen der Klasse k, H^r_k der harmonischen r-Formen der Klasse k, $H^r_{(s)k}$ der reinen harmonischen r-Formen der Klasse k und des Typus s sind also folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\Phi^r_k &= L^{[k]}\,\Phi^{r-2k}_0\\
H^r_k &= L^{[k]}\,H^{r-2k}_0\\
H^r_{(s)k} &= L^{[k]}\,H^{r-2k}_{(s-k)0}
\end{aligned}$$

Analog seien ${}_0\Phi^r$, ${}_0H^r$ und ${}_0H^r_{(s)}$ die Kerne der Abbildungen L von Φ^r in Φ^{r+2} bzw. von H^r in H^{r+2} bzw. von $H^r_{(s)}$ in $H^{r+2}_{(s+1)}$, und wir bezeichnen die Ränge von ${}_0H^r$ und ${}_0H^r_{(s)}$ mit ${}_0\varepsilon^r$ und ${}_0\varepsilon^r_{(s)}$; ferner sei

$$
\begin{aligned}
{}_k\Phi^r &= \Lambda^{[k]}\,{}_0\Phi^{r+2k} \\
{}_kH^r &= \Lambda^{[k]}\,{}_0H^{r+2k} \\
{}_kH^r_{(s)} &= \Lambda^{[k]}\,{}_0H^{r+2k}_{(s+k)}
\end{aligned}
$$

gesetzt. Wir verzichten darauf, hier besondere Benennungen einzuführen.

Für effektive Formen $\psi^2 \in \Phi^r_0$ und $r + 2k \leqslant m$ gilt nun die wichtige **Grundformel**

$$
*\,L^{[k]}\,\psi^r = \frac{k!}{(m-r-k)!}\,(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}(r+1)r}\,L^{[m-r-k]}\,C\,\psi^r\,. \tag{92}
$$

Sie läßt sich auch so formulieren: Für eine Form $\varphi^s \in \Phi^s_k$ vom Grade $s \leqslant m$, das heißt $\varphi^s = L^{[k]}\,\psi^{s-2k}$ mit $\Lambda\,\psi^{s-2k} = 0$, ist

$$
*\,\varphi^s = \frac{k!}{(m-s+k)!}\,(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}s(s+1)+k}\,L^{[m-s]}\,C\,\varphi^s\,. \tag{93}
$$

Dies ergibt sich aus (92), wenn man dort $r = s - 2k$ setzt. (93) besagt mit anderen Worten: *Für eine Form φ^s der Klasse k läßt sich der Operator $*$ durch C und $L^{[m-s]}$ ersetzen, mit einem von s, k und m abhängigen numerischen Faktor.*

Beweis der Grundformel: Wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit einer r-Form in reine Formen ist es gestattet, den Beweis nur für eine reine effektive Form ψ^r zu führen. Es sei

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k!}\,L^{[k]}\,\psi^r = i^k \sum_{(\,)} P_{k_1\ldots k_s\, m+k_1\ldots m+k_s\, l_1\ldots l_t\, m+j_1\ldots m+j_u}\,\cdot \\
\cdot\,\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_s}\,\omega_{m+k_1}\ldots\omega_{m+k_s}\,\omega_{l_1}\ldots\omega_{l_t}\,\omega_{m+j_1}\ldots\omega_{m+j_u}\,,
\end{aligned}
$$

wobei die

$$
l_1,\ldots,l_t;\; m+j_1\ldots m+j_u
$$

kein Paar um m verschiedener Indizes enthalten sollen. Hiermit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
*\,\frac{1}{k!}\,L^{[k]}\,\psi^r = \varepsilon_1\, i^{m-k} \sum \overline{P}_{k_1\ldots k_s\, m+k_1\ldots m+k_s\, l_1\ldots l_t\, m+j_1\ldots m+j_u}\,\cdot \\
\cdot\,\overline{\omega}_{l_1}\ldots\overline{\omega}_{l_t}\,\omega_{j_1}\ldots\omega_{j_u}\,\omega_{q_1}\,\overline{\omega}_{q_1}\ldots\omega_{q_{m-r-k+s}}\,\overline{\omega}_{q_{m-r-k+s}}
\end{aligned}
$$

mit dem Vorzeichen

$$
\varepsilon_1 =
$$

$$
\delta^{l_1..l_t\, j_1..j_u\, k_1..k_s\, h_1..h_k\, q_1..q_{m-r-k+s}\, m+l_1..m+l_t\, m+j_1..m+j_u\, m+k_1..m+k_s\, m+h_1..m+h_k\, m+q_1..m+q_{m-r-k+s}}_{k_1..k_s\, m+k_1..m+k_s\, l_1..l_t\, m+j_1..m+j_u\, h_1\, m+h_1..h_k\, m+h_k\, m+l_1..m+l_t\, j_1..j_u\, q_1\, m+q_1..q_{m-r-k+s}\, m+q_{m-r-k+s}}
$$

Abgesehen von einem konstanten Faktor $\neq 0$ auf der linken Seite, der vom Umordnen der Tensorkomponenten herstammt, lautet die Bedingung $\Lambda\,\psi^2 = 0$ explizit

$$\sum_{k=1}^{m} P_{k\,k_2\ldots k_s\,m+k\,m+k_2\ldots m+k_s\,l_1\ldots l_t\,m+j_1\ldots m+j_u} = 0 \quad . \tag{94}$$

Wir benützen diese Formel, um die Tensorkomponenten in $*\dfrac{1}{k!}\,L^{[k]}\,\psi^r$ mit Indizes

$$k_1, \ldots, k_s, m + k_1, \ldots m + k_s$$

durch solche zu ersetzen, zu welchen keine ω_ι in unserem Ausdruck für $\dfrac{1}{k!}\,L^{[k]}\,\psi^r$ vorkommen. Dies geschieht, um die beiden Seiten der Grundformel vergleichen zu können. Die Ersetzung ist möglich für $r + 2k < m + 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} *\frac{1}{k!}\,L^{[k]}\,\psi^r = \varepsilon_1\, i^{m-k}\,(-1)^s \sum_{(\,)} \overline{P}_{q_1\ldots q_s\,m+q_1\ldots m+q_s\,l_1\ldots l_t\,m+j_1\ldots m+j_u}\,\cdot \\ \cdot\,\overline{\omega}_{l_1}\ldots\overline{\omega}_{l_t}\,\omega_{j_1}\ldots\omega_{j_u}\,\omega_{q_1}\,\overline{\omega}_{q_1}\ldots\omega_{q_{m-r-k+s}}\,\overline{\omega}_{q_{m-r-k+s}}\,. \end{aligned} \tag{95}$$

Andererseits läßt sich $L^{m-r-k}\,C\,\psi^r$ nach den Definitionen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m-r-k)!}\,L^{[m-r-k]}\,C\,\psi^r = i^{m-k}\,(-1)^{s+u} \sum_{(\,)} \overline{P}_{q_1\ldots q_s\,m+q_1\ldots m+q_s\,l_1\ldots l_t\,m+j_1\ldots m+j_u}\,\cdot \\ \cdot\,\omega_{q_1}\ldots\omega_{q_s}\,\overline{\omega}_{q_1}\ldots\overline{\omega}_{q_s}\,\overline{\omega}_{l_1}\ldots\overline{\omega}_{l_t}\,\omega_{j_1}\ldots\omega_{j_u}\,\omega_{q_{s+1}}\,\overline{\omega}_{q_{s+1}}\ldots\omega_{q_{m-r-k+s}}\,\overline{\omega}_{q_{m-r-k+s}} \end{aligned}$$

Die Summen auf den rechten Seiten von (95) und (96) sind, bis auf die Reihenfolge der ω_ι in den einzelnen Summanden, identisch. Sie unterscheiden sich daher nur durch das Vorzeichen

$$\varepsilon_2 = \delta^{m+l_1\ldots m+l_t\,j_1\ldots j_u\,q_1\,m+q_1\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,q_{m-r-k+s}\,m+q_{m-r-k+s}}_{q_1\ldots q_s\,m+q_1\ldots m+q_s\,m+l_1\ldots m+l_t\,j_1\ldots j_u\,q_{s+1}\,m+q_{s+1}\ldots q_{m-r-k+s}\,m+q_{m-r-k+s}} \quad .$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$(-1)^u\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 = (-1)^{\frac{1}{2}m\,(m-1)+\frac{1}{2}r\,(r+1)} \quad ,$$

womit die Grundformel (92) bewiesen ist.

Als erste Anwendung der Grundformel beweisen wir: Für $\Lambda\psi^r = 0$ und $r + 2k \leqslant m$ ist

$$\Lambda\,L^{[k]}\,\psi^r = -\,k(m - r - k + 1)\,L^{[k-1]}\,\psi^r \quad . \tag{97}$$

Wir heben den Spezialfall $k = 1$ von (97) besonders hervor: Für effektive ψ^r, $r \leqslant m - 2$, ist

$$\Lambda L\psi^r = -\,(m - r)\,\psi^r \quad . \tag{98}$$

Es ist also insbesondere für $\psi^r \neq 0$ auch $\Lambda L \psi^r \neq 0$, somit auch $L\psi^r \neq 0$. Dies sagt aus, daß für $r \leqslant m-2$ ΛL einen Isomorphismus von Φ_0^r bzw. von H_0^r bzw. von $H_{(s)0}^r$ auf sich bewirkt. Diese Aussage werden wir im nächsten Paragraphen noch erweitern können.

Beweis von (97): Wir erhalten durch linksseitige Anwendung von $*$ auf (97)

$$L * L^{[k]} \psi^r = -k(m-r-k+1) * L^{[k-1]} \psi^r ,$$

und dies läßt sich direkt aus der Grundformel (92) verifizieren.

4.6. Bevor wir in der Ableitung der hauptsächlichsten Resultate weiterfahren, wollen wir einige Vertauschungsformeln zwischen L und Λ herleiten. Wir benötigen jedoch diese Formeln in den weiteren Beweisen nicht.

$$(\Lambda^{[k]} L - L \Lambda^{[k]}) \varphi^r = -k(m-r+k-1) \Lambda^{k-1} \varphi^r . \tag{99}$$

Beweis: a) $k=1$. In diesem Falle lautet die zu beweisende Formel

$$(\Lambda L - L\Lambda) \varphi^r = -(m-r) \varphi^r . \tag{100}$$

Für effektive Formen ist dies gleichbedeutend mit (98), für nicht effektive führen wir den Beweis für eine reine Form

$$\varphi^r_{(r-b)} = \sum_{(\ )} P_{j_1 \dots j_a j_{a+1} \dots j_b\, m+j_1 \dots m+j_a\, m+j_{b+1} \dots m+j_c} \omega_{j_1} \dots \omega_{j_b} \overline{\omega}_{j_1} \dots \overline{\omega}_{j_a} \overline{\omega}_{j_{b+1}} \dots \overline{\omega}_{j_c} .$$

Hierbei ist

$$L\varphi^r = \sum_{(\ )} \sum_j P_{j_1 \dots m+j_c} \omega_{j_1} \dots \overline{\omega}_{j_c} \omega_j \overline{\omega}_j ,$$

$$\Lambda\varphi^r = \sum_{(\ )} \sum_j P_{j\, j_2 \dots j_a j_{a+1} \dots j_b\, m+j\, m+j_2 \dots m+j_a\, m+j_{b+1} \dots m+j_c} \omega_{j_2} \dots \omega_{j_b} \overline{\omega}_{j_2} \dots \overline{\omega}_{j_a} \overline{\omega}_{j_{b+1}} \dots \overline{\omega}_{j_c} ,$$

$$\Lambda L \varphi^r = -(m-r+a) \varphi^r ,$$

$$L\Lambda \varphi^r = a \varphi^r ,$$

und daher

$$(\Lambda L - L\Lambda) \varphi^r = -(m-r) \varphi^r .$$

b) Jetzt beweisen wir (99) durch Induktion nach k. Wir bezeichnen den Koeffizienten auf der rechten Seite von (99) mit c_{kr}. Aus

$$\Lambda^{[k]} L \varphi^r = \Lambda \Lambda^{[k-1]} L \varphi^r = \Lambda L \Lambda^{[k-1]} \varphi^r + c_{k-1\, r} \Lambda^{[k-1]} \varphi^r ,$$

ergibt sich die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} c_{k\, r} &= c_{k-1\, r} + c_{1\ r-2\,(k-1)} , \\ c_{1\, r} &= -(m-r) , \end{aligned}$$

und daher

$$c_{k\,r} = -k(m - r + k - 1) \ .$$

Gleichfalls von (100) ausgehend erhalten wir für

$$(\Lambda L^{[k]} - L^{[k]}\Lambda)\,\varphi^r = \varrho_{kr}\,L^{[k-1]}\,\varphi^r \ , \tag{101}$$

die Rekursionsformeln

$$\varrho_{kr} = \varrho_{k-1\;r} + \varrho_{1\;r+2(k-1)} \ ,$$

$$\varrho_{1\;r} = c_{1\;r} \ ,$$

und daher

$$\varrho_{k\,r} = -k(m - r - k + 1) \ . \tag{102}$$

Mit den hier abgeleiteten Beziehungen ist die Reihe dieser Formeln bei weitem nicht abgeschlossen. Setzt man zum Beispiel für effektive Formen

$$\Lambda^{[\lambda]}\,L^{[l]}\,\psi^r = \mu_{\lambda\,l\,r}\,L^{[l-\lambda]}\,\psi^r \ , \qquad \lambda \leqslant l \ , \tag{103}$$

so ergeben sich je nach den Zerlegungen

$$\Lambda\Lambda^{[\lambda-1]}\,L^{[l]}\,\psi^r = \mu_{\lambda-1\,l\,r}\,\Lambda\,L^{[l-\lambda+1]}\,\psi^r$$

und

$$\Lambda^{[\lambda]}\,L\,L^{[l-1]}\,\psi^r = c_{\lambda\,r+2(l-1)}\,\Lambda^{[\lambda-1]}\,L^{[l-1]}\,\psi^r + L\,\Lambda^{[\lambda]}\,L^{[l-1]}\,\psi^r$$

die Rekursionsformeln

$$\mu_{\lambda\,l\,r} = \mu_{\lambda-1\,l\,r}\,\varrho_{l-\lambda+1\;r} \ ,$$

$$\mu_{\lambda\,l\,r} = c_{\lambda\,r+2(l-1)}\,\mu_{\lambda-1\;l-1\;r} + \mu_{\lambda\;l-1\;r} \ ,$$

$$\mu_{1\,1\,r} = c_{1\;r} \ ,$$

und somit

$$\mu_{\lambda\,l\,r} = \prod_{j=0}^{\lambda-1} \varrho_{l-j\;r} \ . \tag{104}$$

Für kleine r können wir diese Formeln auch durch Vergleich mit der Grundformel berechnen und erhalten so Kontrollmöglichkeiten. Der Zahlenfaktor der Grundformel sei $\gamma_{k\,r}$, so ergibt zum Beispiel (101) die Beziehung

$$\gamma_{k\,r} = -\varrho_{k\,r}\,\gamma_{k-1\;r} \ .$$

Jedoch ergibt sich bei alledem nichts wesentlich Neues.

§ 5. Der Zerlegungssatz von Hodge

5.1. Die Aussagen über Kählersche Mannigfaltigkeiten, die wir im folgenden machen werden, beruhen auf den beiden nachstehenden Sätzen:

Satz 8_r. Für $r \leqslant m - 2$ ist ΛL ein Isomorphismus von Φ^r auf sich.

Satz 9_r. Für $r \leqslant m$ ist Φ^r die direkte Summe von Φ_0^r und $L\Phi^{r-2}$.

Wir beweisen die beiden Sätze gleichzeitig durch vollständige Induktion.

a) Die Operation erniedrigt die Dimension um 2. Daher ist in den Graden 0 und 1 jede Form effektiv. Die Sätze 9_0 und 9_1 sind somit richtig.

b) Aus Satz 9_s für alle $s \leqslant r$ folgt Satz 8_r $(r \leqslant m - 2)$.

Beweis: Aus 9_s für alle $s \leqslant r$ folgt, daß Φ^r direkte Summe aller $L^{[j]}\,\Phi_0^{r-2j}$, $j = 0, 1, \ldots, q$; $q = \left[\frac{r}{2}\right]$ ist; eine Form $\varphi^r \in \Phi^r$ läßt sich daher als Summe

$$\varphi^r = \sum_{j=0}^{q} L^{[j]}\,\psi^{r-2j}$$

mit eindeutig bestimmten effektiven ψ^{r-2j} darstellen. Es ist dann nach (97)

$$\Lambda L \varphi^r = \sum_{j+0}^{q} \Lambda L^{[j+1]}\,\psi^{r-2j} = -\sum_{j=0}^{q} (j+1)\bigl(m-(r-2j)-j\bigr)L^{[j]}\,\psi^{r-2j}$$
$$= -\sum_{j=0}^{q} (j+1)(m-r+j)\,L^{[j]}\,\psi^{r-2j}\ .$$

Wegen $r \leqslant m - 2$ sind die Koeffizienten von $L^{[j]}\,\psi^{r-2j}$ von 0 verschieden; es gibt also eine und nur eine Form $\chi^r \in \Phi^r$, so daß $\Lambda L\varphi^r = \chi^r$, das heißt ΛL ist ein Isomorphismus von Φ^r auf sich.

c) Aus Satz 8_r folgt Satz 9_{r+2} $(r \leqslant m - 2)$.

Beweis: Wir formulieren Satz 9_{r+2} folgendermaßen: Zu jeder Form $\varphi^{r+2} \in \Phi^{r+2}$ gibt es eine effektive Form φ_0^{r+2} und eine Form φ^r, beide eindeutig bestimmt, so daß

$$\varphi^{r+2} = \varphi_0^{r+2} + L\varphi^r\ . \tag{105}$$

In der Tat gibt es nach Satz 8_r ein und nur ein χ^r derart, daß

$$\Lambda\,\varphi^{r+2} = \Lambda L\,\chi^r\ . \tag{106}$$

Dann ist $\Lambda(\varphi^{r+2} - L\,\chi^r) = \Lambda\,\varphi^{r+2} - \Lambda L\,\chi^r = 0$, das heißt $\varphi_0^{r+2} = \varphi^{r+2} - L\,\chi^r$ ist effektiv. φ^{r+2} ist also in der gewünschten Form (105) dargestellt, und da aus (105) (106) folgt, ist diese Darstellung eindeutig.

5.2. Nach der Schlußbemerkung von 4.4 gelten die Sätze 8_r und 9_r auch, wenn man darin Φ^r immer durch H^r oder durch $H^r_{(s)}$ ersetzt.

Ferner erhalten wir durch Transformation mit $*$ noch folgende Sätze, die in den „oberen" Dimensionen $\geqslant m$ gelten.

Satz 10. Für $r \geqslant m + 2$ ist $L\Lambda$ ein Isomorphismus von Φ^r auf sich.

Satz 11. Für $r \geqslant m$ ist Φ^r die direkte Summe von ${}_0\Phi^r$ und $\Lambda\Phi^{r+2}$.

Aus den Sätzen 8 und 10 folgt:

Satz 12. Für $r \leqslant m - 2$ ist L ein Isomorphismus von Φ^r in Φ^{r+2} und bewirkt Isomorphismen von H^r in H^{r+2} und von $H^r_{(s)}$ in $H^{r+2}_{(s+1)}$. Für $r \geqslant m + 2$ ist Λ ein Isomorphismus von Φ^r in Φ^{r-2} und bewirkt Isomorphismen von H^r in H^{r-2} und von $H^r_{(s)}$ in $H^{r-2}_{(s-1)}$.

Der hauptsächlichste Inhalt dieses Satzes läßt sich auch so formulieren:

Satz 12a. Für $r \leqslant m - 2$ ist für jede r-Form $\varphi^r \neq 0$ das Produkt $\varphi^r \cdot \Omega \neq 0$, und für jede harmonische r-Form $\varphi^r \neq 0$ ist das Produkt $\varphi^r \cdot \Omega \neq 0$ und harmonisch.

Nach dem Satz von *Hodge* (vgl. 2.5) ist die Gruppe H^r der r-ten Kohomologiegruppe bezüglich komplexer Koeffizienten isomorph. Nach dem „dritten Satz von *de Rham*" entspricht dem schiefen Produkt geschlossener Differentialformen das Alexandersche (Cup-) Produkt der entsprechenden Kohomologieklassen. Der Satz 12a sagt daher aus, daß die zu Ω gehörende Kohomologieklasse im Kohomologiering in den Dimensionen $< m$ keinen Nullteiler besitzt.

Aus den Sätzen 9 und 11 folgen die expliziten Zerlegungen der Gruppen aller r-Formen Φ^r, aller harmonischen r-Formen H^r bzw. aller reinen harmonischen r-Formen vom Typus $sH^r_{(s)}$:

Satz 13.

$$\Phi^r = \Phi_0^r \dotplus L\Phi_0^{r-2} \dotplus \cdots \dotplus L^q\,\Phi_0^{r-2q} \qquad r \leqslant m\,, \quad q = \left[\frac{r}{2}\right], \qquad \text{a)}$$

$$H^r = H_0^r \dotplus LH_0^{r-2} \dotplus \cdots \dotplus L^q\,H_0^{r-2q} \qquad r \leqslant m\,, \quad q = \left[\frac{r}{2}\right], \qquad \text{b)}$$

$$H^r_{(s)} = H^r_{(s)0} \dotplus LH^{r-2}_{(s-1)0} \dotplus \cdots \dotplus L^{[t]}\,H^{r-2t}_{(s-t)0} \qquad t = \min\left(\left[\frac{r}{2}\right], s\right), \quad r \leqslant m\,. \qquad \text{c)}$$

$$\Phi^r = {}_0\Phi^r \dotplus \Lambda\, {}_0\Phi^{r+2} \dotplus \cdots \dotplus \Lambda^p\, {}_0\Phi^{r+2p}\,, \qquad r \geqslant m\,, \qquad p = \left[\frac{2m-r}{2}\right], \tag{d)}$$

$$H^r = {}_0H^r \dotplus \Lambda\, {}_0H^{r+2} \dotplus \cdots \dotplus \Lambda^p\, {}_0H^{r+2p}\,, \qquad r \geqslant m\,, \qquad p = \left[\frac{2m-r}{2}\right], \tag{e)}$$

$$H^r_{(s)} = {}_0H^r_{(s)} \dotplus \Lambda\, {}_0H^{r+2}_{(s+1)} \dotplus \cdots \dotplus \Lambda^{[t]}\, {}_0H^{r+2t}_{(s+t)}\,, \qquad t = \min\left(\left[\frac{2m-r}{2}\right], m-s\right), \quad r \geqslant m\,. \tag{f)}$$

Das wichtigste Resultat ist dabei die Formel b), welche für algebraische Mannigfaltigkeiten von *Hodge* [9] aufgestellt wurde.

Die Gruppe H^r gibt Auskunft über die Homologiestruktur der Kählerschen Mannigfaltigkeiten. Wir wollen immer voraussetzen, daß unsere Mannigfaltigkeit zusammenhängend ist. Unter Berücksichtigung von $p^0 = p^{2m} = \varepsilon_0^0 = {}_0\varepsilon^{2m} = 1$ gilt dann für die Ränge der Formengruppen H^r, also für die Bettischen Zahlen:

Satz 14.

$$p^r = -\sum_{j=0}^{q} \varepsilon_0^{r-2j}\,, \qquad r \leqslant m\,, \tag{a)}$$

$$p^r = -\sum_{j=0}^{p} {}_0\varepsilon^{r+2j}\,, \qquad r \geqslant m\,. \tag{b)}$$

Eine etwas schwächere Formulierung dieses Satzes ist

Satz 14a.

$$p^r - p^{r-2} = \varepsilon_0^r \geqslant 0\,, \qquad r \leqslant m\,, \tag{a)}$$

$$p^r - p^{r+2} = {}_0\varepsilon^r \geqslant 0\,, \qquad r \geqslant m\,. \tag{b)}$$

Diese Formeln ergeben in Verbindung mit Satz 5 und $\varepsilon^0_{(0)\,0} = \varepsilon^{2m}_{(m)\,0} = 1$:

Satz 15.

$$p^{2k} \equiv 1 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon^{2j}_{(j)\,0} \pmod 2\,, \qquad 2k \leqslant m\,, \tag{a)}$$

$$p^{2k} \equiv 1 + \sum_{j=k}^{m-1} {}_0\varepsilon^{2j}_{(j)} \pmod 2\,, \qquad 2k \geqslant m\,, \tag{b)}$$

oder

$$p^{2k} - p^{2(k-1)} \equiv \varepsilon^{2k}_{(k)\,0} \pmod 2\,, \qquad 2k \leqslant m\,, \tag{a)}$$

$$p^{2k} - p^{2(k+1)} \equiv {}_0\varepsilon^{2k}_{(k)} \pmod 2\,. \qquad 2k \geqslant m\,. \tag{b)}$$

Satz 13 liefert auch ein Konstruktionsprinzip für eine Basis aller r-Formen oder aller harmonischen r-Formen. Wir formulieren es nur für die Dimensionen $\leqslant m$, da aus einer Basis für diese Dimensionen eine solche für diejenigen $\geqslant m$ durch Transformation mit $*$ folgt.

Satz 16. Eine Basis aller Formen ist bekannt, wenn die effektiven r-Formen (in den Dimensionen $r \leqslant m$) bekannt sind. Eine Basis aller harmonischen r-Formen ist bekannt, wenn die effektiven harmonischen r-Formen (in den Dimensionen $r \leqslant m$) bekannt sind. Eine Basis aller reinen harmonischen r-Formen ist bekannt, wenn die effektiven reinen harmonischen r-Formen (in den Dimensionen $r \leqslant m$) bekannt sind.

§ 6. Orthogonalitätsrelationen

6.1. In der betrachteten $2m$-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit wollen wir uns in diesem Paragraphen auf die Dimensionen $\leqslant m$ beschränken. Unsere Sätze können mittels der schon oft angewandten Methode ohne weiteres auf die Dimensionen $\geqslant m$ übertragen werden.

Wir untersuchen hauptsächlich die Eigenschaften eines skalaren Produktes zweier Formen gleichen Grades. Es ist definiert durch

$$(\varphi^r, \psi^r) = \int_M \varphi^r \cdot * \psi^r \ . \tag{107}$$

Aus dieser Definition folgt die Hermitizitätseigenschaft

$$(\varphi^r, \psi^r) = \overline{(\psi^r, \varphi^r)} \tag{108}$$

und (39) ergibt

$$(\varphi^r, \varphi^r) \geqslant 0 \,; \quad (\varphi^r, \varphi^r) = 0 \text{ nur für } \varphi^r = 0 \ . \tag{109}$$

Ist φ^r eine harmonische Form, so bezeichnen wir die durch sie gegebene Kohomologieklasse ebenfalls mit φ^r. Für eine $2m$-dimensionale Kohomologieklasse γ sei $\gamma(M)$ der Wert von γ auf dem Grundzyklus M der Mannigfaltigkeit (der Kronecker-Index). $\smile$ bedeutet das Cup-, $\frown$ das Cap-Produkt. $D\varphi^r$ bezeichne einen repräsentierenden Zyklus der zur Kohomologieklasse φ^r dualen Homologieklasse. Die Schnittzahl zweier Zyklen z, z', wird durch $S\,(z, z')$ angegeben.

Da dem schiefen Produkt von Differentialformen das $\smile$-Produkt der zugehörigen Kohomologieklassen entspricht, ist

$$\int_M \varphi^r \cdot \psi^{2m-r} = \varphi \smile \psi(M) \ .$$

Folglich ist (vgl. [17])

$$\int_M \varphi^r \cdot \psi^{2m-r} = \varphi^r\,(\psi^{2m-r} \frown M) = \varphi^r\,(D\psi^{2m-r}) = \int_{D\psi^{2m-r}} \varphi^r = (-1)^r \int_{D\varphi^r} \psi^{2m-r}$$
$$= S\,(D\varphi^r, D\psi^{2m-r}) \ .$$

Für das skalare Produkt von φ^r und ψ^r erhalten wir die Ausdrücke

$$(\varphi^r, \psi^r) = \int\limits_{D* \psi^r} \varphi^r = \overline{\int\limits_{D* \varphi^r} \psi^r} = S(D\varphi^r, D* \psi^r) \ . \tag{110}$$

Aus (108) ergibt sich hieraus zum Beispiel

$$S(D\varphi^r, D* \psi^r) = \overline{S(D\psi^r, D* \varphi^r)} \ .$$

Die folgenden Ergebnisse führen in dieser Weise zu Aussagen über die Homologiestruktur von $M^{(m)}$, auf die hier nicht weiter eingegangen wird [6]).

6.2. **Lemma.** $(L\varphi^{r-2}, \psi^r) = (\varphi^{r-2}, \Lambda \psi^r)$. (111)

Beweis:

$$(\varphi^{r-2}, \Lambda\psi^r) = (-1)^r \int\limits_M \varphi^{r-2} * * L * \psi^r = \int\limits_M \varphi^{r-2} \Omega * \varphi^r = (L\varphi^{r-2}, \psi^r) \ .$$

Wir zeigen jetzt, daß bezüglich des Skalarprodukts (107) r-Formen verschiedener Klasse und ebenso r-Formen verschiedenen Typus zueinander orthogonal sind; mit anderen Worten, daß alle direkten Summanden, die in den Zerlegungen von Satz 2 und Satz 13 auftreten, zueinander orthogonal sind.

Wir bezeichnen wie früher mit φ_k^r eine r-Form der Klasse k (vgl. 4.5) und mit $\varphi_{(k)}^r$ eine r-Form vom Typus k (vgl. 3.1); es gilt der

Satz 17. Für $k \neq l$ ist

$$(\varphi_{(k)}^r, \varphi_{(l)}^r) = 0 \ , \tag{112}$$

$$(\varphi_k^r, \varphi_l^r) = 0 \ . \tag{113}$$

Beweis: Es sei etwa $k > l$. Der Integrand von (112) ist $\varphi_{(k)}^r \cdot * \varphi_{(l)}^r$. Er enthält $m + k - l > m$ Faktoren der Gestalt $\overline{\omega}_j$, das heißt mindestens einen solchen Faktor zweimal und verschwindet deshalb identisch.

(113) beweisen wir mit Hilfe des Lemmas (111) und der Formel (103). Wir wenden das Lemma l mal an:

$$(\varphi_k^r, \varphi_l^r) = (L^{[k]} \varphi_0^{r-2k}, L^{[l]} \varphi_0^{r-2l}) = (L^{[k-l]} \varphi_0^{r-2k}, \Lambda^{[l]} L^{[l]} \varphi_0^{r-2l})$$

$$= \mu_{l\,l\,r-2l} (L^{[k-l]} \varphi_0^{r-2k}, \varphi_0^{r-2l}) \ .$$

Nochmalige Anwendung des Lemmas ergibt

$$(L^{[k-l]} \varphi_0^{r-2k}, \varphi_0^{r-2l}) = (L^{[k-l-1]} \varphi_0^{r-2k}, \Lambda \varphi_0^{r-2l}) = 0 \ , \qquad \text{q. e. d.}$$

Eine reine r-Form, die von bestimmter Klasse ist, nennen wir eine e i n f a c h e r-F o r m. Wir können Satz 16 dann folgendermaßen interpretieren:

---

[6]) vgl. *B. Eckmann* [7].

Zwei einfache Formen, die nicht sowohl im Typus als auch in der Klasse übereinstimmen, sind orthogonal.

Die natürliche Zerlegung der harmonischen r-Formen in einfache Formen nach den Sätzen 2 und 13 ist daher eine, schon ziemlich weitgehende, Zerlegung in orthogonale Formen. Es gibt also eine orthogonale Basis der Gruppe H^r, die aus einfachen harmonischen Formen besteht; um sie zu erhalten, genügt es, nach den Sätzen 2 und 13 von einer Basis auszugehen, die aus einfachen Formen gebildet ist. Das übliche Verfahren zur Gewinnung einer orthogonalen Basis braucht man nur dort anzuwenden, wo mehrere unabhängige Formen gleichen Typus und gleicher Klasse auftreten. Nach Satz 16 genügt es sogar, diese Konstruktion nur für eine Basis der effektiven Formen auszuführen, da nach dem Lemma (111) aus $(\varphi_0^r, \psi_0^r) = 0$ auch $(L\varphi_0^r, L\psi_0^r) = 0$ folgt.

6.3. Ähnliche Relationen wie für die skalaren Produkte gelten auch für Produkte der Gestalt $\varphi^r\,\overline{\varphi}^r$. Diese Relationen sind aus (112) und (113) mit Hilfe der Grundformel (92) abzuleiten. Dabei zeigt es sich, daß als natürliche Integrationsbereiche für diese Produkte die zu $\Omega^{[k]}$ dualen Zyklen auftreten.

α^r und β^r seien zwei einfache Formen, die einer orthogonal normierten Basis angehören. α^r sei von der Klasse h und dem Typus j, β^r von der Klasse k und dem Typus l. Dann gilt

Satz 18.

$$\int\limits_{D\Omega^{[m-r]}} \alpha^r\,\overline{\beta}^r = \frac{(m-h-r)!}{h!}(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}r(r-1)+h+j}\,\delta_{hk}\,\delta_{jl}\;.$$

Zum Beweis berechnen wir nach der Grundformel (92) und der Definition (62):

$$(\alpha^r_{h(j)}\,\beta^r_{k(l)}) = \frac{k!}{(m-r+k)!}(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}r(r+1)+k}\int\limits_{M}\alpha^{r-2h}_{(j-h)_0}\,C\,\overline{\beta}^{r-2k}_{(l-k)_0}\,\Omega^{[m-r+h+k]}$$

$$= \frac{k!}{(m-r+k)!}(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}r(r+3)+k+l}\int\limits_{D\Omega^{[m-r]}}\alpha^r_{(j)\,h}\cdot\overline{\beta}^r_{(l)\,k}\;.$$

Wir geben die Nummerierung der Formen einer Basis durch einen Index in eckiger Klammer an. $\varphi^r_{(j)\,h\,[s]}$ ist eine einfache Form der Klasse h, vom Typus j, und mit der Nummer s in der Basis. Mit dieser Bezeichnung folgt aus Satz 18

Satz 19. Besteht eine Basis der harmonischen r-Formen nur aus einfachen Formen, so zerfällt die Matrix

$$(\mu_{s\,t}) = \Big(\int\limits_{D\Omega^{[m-r]}} \varphi^r_{h\,(j)\,[s]}\, \bar{\varphi}^r_{k\,(l)\,[t]} \Big)$$

nach Typus und Klasse in Kästchen. Nur die Teilmatrizen, für die

$$h = k, \quad j = l$$

sind $\neq 0$. Die Matrizen

$$\alpha_{h\,j} = (-1)^{\frac{1}{2}m\,(m-1) + \frac{1}{2}r\,(r-1) + h + j} \Big(\int\limits_{D\Omega^{[m-r]}} \varphi^r_{h\,(j)\,[s]}\, \varphi^r_{h\,(j)\,[t]} \Big) \qquad (114)$$

sind hermitesch positiv definit.

Für eine beliebige Basis der harmonischen r-Formen läßt sich die Signatur der Matrix

$$(\mu_{st})$$

aus der Zerlegung der Basis in einfache Formen nach (114) explizit berechnen.

Anhang

§ 7. Reelle Analoga Kählerscher Mannigfaltigkeiten

7.1. Die im vorhergehenden abgeleiteten Sätze über Kählersche Mannigfaltigkeiten zerfallen in zwei Gruppen nach den dabei hauptsächlich verwendeten Voraussetzungen:

a) Die Existenz der komplex-analytischen Struktur gestattet die invariante Definition des Operators C. Dies führt zu den Sätzen, die auf der Zerlegung der Formen in Typen beruhen.

b) Die Existenz einer 2-Form Ω mit den benützten Eigenschaften führt zur Definition der Klasse von Formen und damit zu den Zerlegungssätzen des § 5.

Die nachfolgende Analyse will zeigen, daß die beiden soeben charakterisierten Satzgruppen voneinander weitgehend unabhängig sind. Während die Sätze über den Typus offenbar wesentlich auf der komplexanalytischen Struktur beruhen, kann gezeigt werden, daß sich der Begriff von Formen verschiedener Klasse auch auf reellen Mannigfaltigkeiten einführen läßt, sofern dort eine gewisse 2-Form mit speziellen Eigenschaften existiert, und es gelten dann auch Analoga der Sätze des § 5. Diese analogen Sätze werden wir durch die Nummer des entsprechenden Satzes mit einem dahinter gesetzten $*$ bezeichnen.

Auf einer Kählerschen Mannigfaltigkeit mit der Metrik

$$ds^2 = \sum_{i,\,k} g_{i\,k}\,(dz_i\, d\bar{z}_k)$$

das heißt mit dem metrischen Tensor

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{ik} \\ g_{ik} & 0 \end{pmatrix} \tag{115}$$

haben wir die 2-Form

$$\Omega = \sum_{i,k} g_{ik} dz_i d\bar{z}_k$$

das heißt die Differentialform mit dem Koeffiziententensor

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{ik} \\ -g_{ik} & 0 \end{pmatrix} \tag{116}$$

eingeführt. Wir bezeichnen die kovariante Differentiation bezüglich (115) durch einen Querstrich. Dann gilt in jedem Punkt der betrachteten Mannigfaltigkeit

$$g'_{\varkappa\lambda/\mu} = 0 \ . \tag{117}$$

Diese Formel ist mit der Kählerbedingung äquivalent [7]).

M^{2m} sei eine $2m$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf welcher eine Riemannsche Metrik gegeben ist; kovariante Ableitung bezüglich dieser Metrik werde durch einen Querstrich bezeichnet. In Analogie zu (117) wollen wir folgende Situation betrachten:

Auf der geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit M^{2m} existiere eine 2-Form $\eta^2 = h_{ik} dx^i dx^k$, die in jedem Punkt vom Range $2k$ ist und die Bedingung erfüllt

$$h_{ik/l} = 0 \qquad \text{für alle } l. \tag{K^*}$$ [8]) *)

---

[7]) Dies wurde von *S. Bochner* [1], Theorem 7, zuerst angegeben. Der Beweis dieses Theorems, zu Formel (66), p. 388 a. a. O., sollte folgendermaßen lauten: Es ist

$$h_{\alpha\beta^*,\gamma} = \frac{\partial h_{\alpha\beta^*}}{\partial z_\gamma} - h_{\lambda\beta^*} \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} \ .$$

Setzt man hierin die aus (K) folgenden Werte (22) ein, so folgt

$$h_{\alpha\beta^*,\gamma} = 0 \ .$$

[8]) *S. Bochner* a. a. O. bewies, daß auf dieser Voraussetzung für $k = m$ folgt

$$p^{2r} \geqq 1 \ , \qquad r = 1, \ldots, m \ . \tag{118}$$

Für $k = m$ genügt zum Beweis von (118) schon die schwächere Voraussetzung $d\eta = 0$. Bezeichnen wir nämlich mit η auch die durch die 2-Form repräsentierte Kohomologieklasse, so folgt hieraus $\eta^{[m]} \not\sim 0$, d. h. auch $\eta^{[r]} \not\sim 0$, $r = 1, \ldots, m$.

*) Zusatz bei der Korrektur: *Für $k = m$ genügt zum Beweis aller Sätze dieses Paragraphen, sowie der in diesem Anhang nicht bewiesenen Formel* (76.a) $p^{2k+1} \equiv 0$ *(mod 2) schon die sehr viel schwächere Voraussetzung* $d\eta = 0$. Vgl. *H. Guggenheimer*, Sur les variétés qui possèdent une forme extérieure quadratique fermée, C. R. Acad. Sci. Paris **232**, (1951), p. 470. — Eine Beweisskizze für Mannigfaltigkeiten *beliebiger* Dimension und (K*), sowie weitere Resultate, bei *A. Lichnerowicz*, C. R. Acad. Sci. Paris **232** (1951), p. 677.

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit mit B_{2k}^{2m}.

7.2. Wir verwenden für die Rechnungen die üblichen Definitionen der Operationen $*_H$, δ_H und Δ_H nach *de Rham*, wie sie in 2.2 angegeben sind. Da an dieser Stelle keine anderen Operationen auftreten, lassen wir die Indizes H wieder weg. Φ^r bezeichne wieder die Vektorgruppe aller r-Formen, H^r die der harmonischen r-Formen.

Bei ungeradedimensionalen Mannigfaltigkeiten würden in den meisten Definitionen noch gradabhängige Vorzeichen auftreten. Dies ist der Grund dafür, daß die folgenden Beweise und die Sätze selbst für solche Mannigfaltigkeiten nicht gelten.

7.3. Aus den Definitionen ist ersichtlich, daß die Formeln (54) und (56) auch auf einer Mannigfaltigkeit B_{2k}^{2m} gelten. Ebenso ist nach (K*) $\Delta\eta = 0$. Analog zu unserem Vorgehen im Komplexen führen wir die linearen Operationen ein:

$$L\,\varphi^r = \varphi^r \cdot \eta^2 \,, \qquad \text{a)}$$
$$\Lambda\,\varphi^r = (-1)^2 * L * \varphi^r \,. \qquad \text{b)} \qquad (119)$$

und definieren wieder wie in § 4 Φ_h^r, H_h^r, ${}_h\Phi^r$, ${}_hH^r$. Es gilt

$$L\,\Delta = \Delta\,L \,, \qquad \text{a)}$$
$$\Lambda\,\Delta = \Delta\,\Lambda \,, \qquad \text{b)} \qquad (120)$$

und somit

Satz 7*. Ist φ^r harmonisch, so sind auch $L\varphi^r$ und $\Lambda\varphi^r$ harmonische Formen.

Wir brauchen analog wie früher nur die eine Formel, etwa (120a) zu beweisen. Wegen (K*) ist

$$d\,L - L\,d = 0 \,. \qquad (121)$$

Da uns ein Operator analog zu C hier nicht zur Verfügung steht, definieren wir direkt

$$\tilde{d}\varphi^r = h_t^s P_{i_1\ldots i_r;\,s}\, dx^t\, dx^{i_1}\ldots dx^{i_r} \,. \qquad (122)$$

Es ist wieder

$$(d\tilde{d} + \tilde{d}d)\,\varphi^r = h_t^s P_{i_1\ldots i_r;\,s;\,u}\, dx^u\, dx^t\, dx^{i_1}\ldots dx^{i_r}$$
$$+ h_t^s P_{i_1\ldots i_r;\,u;\,s}\, dx^t\, dx^u\, dx^{i_1}\ldots dx^{i_r}$$
$$= h_t^s (P_{i_1\ldots i_r;\,s;\,u} - P_{i_1\ldots i_r;\,u;\,s})\, dx^u\, dx^t\, dx^{i_1}\ldots dx^{i_2} = 0 \,. \qquad (123)$$

Verwenden wir ein in einem Punkt p_0 geodätisches Koordinatensystem, so ist dort, wegen $[h_t^s]_{p_0} = [h_{st}]_{p_0}$

$$[\delta L \varphi^r]_{p_0} = \delta\varphi^r \cdot \eta^2 - h_t^s P_{i_1 \dots i_r; s}\, dx^t\, dx^{i_1} \dots dx^{i_r} = [L\delta\varphi^r - \tilde{d}\varphi^r]_{p_0} \ .$$

Nach dem Schluß mit geodätischen Koordinaten (analog zu 1.6) ist also überall

$$\delta L - L\delta = -\tilde{d} \ . \tag{124}$$

(121), (123) und (124) zusammen ergeben (120a).

Aus Satz 7* und der Voraussetzung (K*) folgt der

Satz 6*. Die Formen $\eta^{[q]}$, $q = 1, \dots, k$ sind harmonisch und $\neq 0$.

Korollar: In einer B_{2k}^{2m} ist $p^{2q} \geqslant 1$ für $q \leqslant k$ (und $m - k \leqslant q \leqslant m$).

Im folgenden werden wir nur die Operatoren L und Λ benötigen. Nach Satz 7* können wir uns wie in den Paragraphen 4 und 5 darauf beschränken, die Sätze für Φ^r zu beweisen, sie sind dann für H^r mitbewiesen.

Der Induktionsbeweis für die Sätze 8_r und 9_r beruht auf der folgenden Formel, die für effektive Formen gilt:

$$\Lambda L \psi^r = -(m - r)\, \psi^r \ . \tag{98}$$

Wenn wir diese Formel noch bewiesen haben, so ist unser Programm erfüllt, da alle weiteren Beweise des § 5 sich wörtlich auf den Fall der B_{2k}^{2m} übertragen lassen. Der Beweis benützt die Voraussetzung, daß der Rang von η überall gleich $2k$ ist und gelingt nur für die Grade $r \leqslant k$. In den Sätzen 8* usw. tritt daher immer k an die Stelle von m.

In jedem Punkt der B_{2k}^{2m} lassen sich Koordinaten $x^1 \dots x^{2m}$ finden, derart, daß dort gilt

$$\eta = \sum_{i=1}^{k} dx^i\, dx^{m+i} \ .$$

Mit diesen Koordinaten sei zum Beispiel

$$\varphi^r =$$

$$= P_{i_1 \dots i_a k_1 \dots k_b\, m+i_1 \dots m+i_a\, m+l_1 \dots m+l_c}\, dx^{i_1} \dots dx^{i_a}\, dx^{k_1} \dots dx^{k_b}\, dx^{m+i_1} \dots dx^{m+i_a}\, dx^{m+l_1} \dots dx^{m+l_c} ,$$

$$k_\mu \neq l_\varrho \qquad \text{für alle } \mu, \varrho \ ,$$

dann ist

$$\Lambda L \varphi^r = -(k - r + a)\, \varphi^r \ ,$$

$$L \Lambda \varphi^r = -a\, \varphi^r \ ,$$

das heißt, wenn $\Lambda \varphi^r = 0$,

$$\Lambda L \varphi^r = -(k-r)\varphi^r \qquad (r<k)\ . \tag{125}$$

Es gelten also die Sätze:

Satz 8*. Für $r \leqslant k-2$ ist L ein Isomorphismus von Φ^r auf sich.

Satz 9*. Für $r \leqslant k$ ist Φ^r die direkte Summe von Φ_0^r und $L\,\Phi^{r-2}$.

Satz 10*. Für $r \geqslant 2m-k+2$ ist Λ ein Isomorphismus von Φ^r auf sich.

Satz 11*. Für $r \geqslant 2m-k$ ist Φ^r die direkte Summe von ${}_0\Phi^r$ mit $\Lambda\,\Phi^{r+2}$.

Satz 12*. Für $r \leqslant k-2$ ist L ein Isomorphismus von Φ^r in Φ^{r+2} und bewirkt einen von H^r in H^{r+2}. Für $r \geqslant 2m-k+2$ ist Λ ein Isomorphismus von Φ^r in Φ^{r-2} und bewirkt einen von H^r in H^{r-2}.

Satz 12a*. Die zu η gehörende Kohomologieklasse ist in den Graden $\leqslant k$ kein Nullteiler im Kohomologiering.

Satz 13*.

$$\Phi^r = \Phi_0^2 \dotplus L\Phi_0^{r-2} \dotplus \cdots \dotplus L^{\left[\left[\frac{r}{2}\right]\right]}\, \Phi^{r-2\left[\frac{r}{2}\right]} \qquad r \leqslant k\ . \tag{a}$$

$$H^r = H_0^r \dotplus L\,H_0^{r-2} \dotplus \cdots \dotplus L^{\left[\left[\frac{r}{2}\right]\right]}\, H_0^{r-2\left[\frac{r}{2}\right]} \qquad r \leqslant k\ . \tag{b}$$

$$\Phi^r = {}_0\Phi^r \dotplus \Lambda_0\Phi^{r+2} \dotplus \cdots \dotplus \Lambda^{\left[\left[\frac{2m-r}{2}\right]\right]}\, {}_0\Phi^{r-2\left[\frac{2m-r}{2}\right]} \qquad r \geqslant 2m-k\ . \tag{c}$$

$$H^r = {}_0H^r \dotplus \Lambda\,{}_0H^{r+2} \dotplus \cdots \dotplus \Lambda^{\left[\left[\frac{2m-r}{2}\right]\right]}\, {}_0H^{r-2\left[\frac{2m-r}{2}\right]} \qquad r \geqslant 2m-k\ . \tag{d}$$

Satz 14*.

$$p^r = 1 + \sum_{j=0}^{r} \varepsilon_0^j \qquad r \leqslant k\ , \tag{a}$$

$$p^r = 1 + \sum_{j=r}^{2m} {}_0\varepsilon^j \qquad r \geqslant 2m-k\ . \tag{b}$$

Lemma. $(L\,\varphi^{r-2}, \psi^r) = (\varphi^{r-2}, \Lambda\,\psi^r) \qquad r \leqslant k\ .$

Satz 17*. Für $h \neq i$ und $r \leqslant k$ ist $(\varphi_h^r, \varphi_i^r) = 0$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *S. Bochner*, Curvature and Betti Numbers, Ann. of. Math. 49 (1948), pp. 379—390.

[2] *S. Bochner*, Curvature and Betti Numbers II, Ann. of. Math. 50 (1949), pp. 77—93.

[3] *E. Cartan*, Leçons sur les invariants intégraux, Paris 1922.

[4] *E. Cartan*, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, deuxième éd., Paris 1947.

[5] *S. S. Chern*, Differential Geometry in the Large, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 1—30.

[6] *S. S. Chern*, Characteristic Classes of Hermitian Manifolds, Ann. of. Math. 47 (1946) pp. 85—121.

[7] *B. Eckmann*, Quelques propriétés globales des variétés kähleriennes. C. R. Acad. Sci. Paris 229 (1949), pp. 557—559.

[8] *B. Eckmann und H. Guggenheimer*, Formes différentielles et métrique hermitienne sans torsion I, II. Sur les variétés closes à métrique hermitienne sans torsion. C. R. Acad. Sci. Paris 229 (1949), pp. 464, 489, 503.

[9] *W. V. D. Hodge*, The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge 1941.

[10] *H. Hopf*, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten. Studies and Essays presented to R. Courant (New York 1948), pp. 167—185. — *Ch. Ehresmann*, Sur la théorie des espaces fibrés. Colloque de topologie algébrique, C. N. R. S., 1947.

[11] *E. Kähler*, Über eine bemerkenswerte hermitische Metrik. Abh. Math. Sem. Hamburg 9 (1933), pp. 173—186.

[12] *E. Kähler*, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig/Berlin 1934.

[13] *G. de Rham*, Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples. Ens. Math. 1936, pp. 213—228.

[14] *G. de Rham et P. Bidal*, Les formes différentielles harmoniques. Comm. Math. Helv. 19 (1946), pp. 1—49.

[15] *G. de Rham*, Sur la théorie des formes différentielles harmoniques. Ann. Univ. Grenoble 22 (1946), pp. 135—152.

[16] *A. Weil*, Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe. Comm. Math. Helv. 20 (1947), pp. 110—116.

[17] *H. Whitney*, On Products in a Complex. Ann. of. Math. 39 (1938), pp. 397—432.

(Eingegangen den 22. November 1950)