Über eine diophantische Identität.

Über eine diophantische Identität

Von Karl-Felix Moppert, Basel

Die Identität

$$P_1^{k_1} + P_2^{k_2} + P_3^{k_3} \equiv 0 \ , \tag{1}$$

wo k_1, k_2 und k_3 natürliche Zahlen > 1 und P_1, P_2 und P_3 teilerfremde, nicht konstante Polynome mit beliebigen komplexen Koeffizienten in der Variabeln z sind, ist schon mehrfach untersucht worden. Durch Differentieren[1]) wurde festgestellt, für welche Wertsysteme k_1, k_2, k_3 diese Identität überhaupt möglich ist; es konnte aber auf diesem Wege nicht nachgewiesen werden, ob es für jedes dieser Systeme eine Identität der Form (1) tatsächlich gibt.

Im Anschluß an seine Arbeiten über normale Funktionenfamilien hat *Montel* ein ähnliches Problem behandelt[2]). Er untersucht die Möglichkeit einer Identität der Form (1), wobei er aber für die Funktionen P nicht nur Polynome, sondern überhaupt ganze Funktionen zuläßt. Er kommt zu unserer Relation (4), mit dem Unterschied, daß bei ihm dort auch das Gleichheitszeichen erlaubt ist. Er weist — offenbar erstmalig — auf die Lösung der Identität (1) durch *Schwarz*'sche Dreiecksfunktionen hin.

Wir behandeln das Problem so, daß wir die Riemann-Hurwitz'sche Relation $v = 2n - 2$ auf die Riemann'sche Fläche der rationalen Funktion $w = Q(z) = \dfrac{(P_1(z))^{k_1}}{(P_3(z))^{k_3}}$ anwenden. So folgt sogleich, daß die Zahlen k der Relation $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} > 1$ genügen müssen. Weiter lehrt eine einfache Überlegung, daß die Schwarz'schen Dreiecksfunktionen zum Dreieck mit den Winkeln $\dfrac{\pi}{k_1}, \dfrac{\pi}{k_2}$ und $\dfrac{\pi}{k_3}$ zu jedem Fall eine Lösung liefern. *Die obige Ungleichung für die Zahlen k ist also für die Möglichkeit einer Identität* (1) *notwendig und hinreichend.* Zuletzt geben wir für die ersten drei der vier sich ergebenden Fälle eine explizite

[1]) *Velmine*, Math. Sbornik 24, 1903; *Korselt*, Archiv für Mathematik und Physik (3), Bd. 25, 1917, p. 89. Vgl. auch *Liouville*, Comptes Rendues t. 89.

[2]) *Montel*: „Sur les familles de fonctions analytiques", Annales scientifiques de l'école normale sup., t. 33, 1916.

Lösung. Dies liefert jedesmal unendlich viele Lösungen der Diophantischen Gleichungen $X^k = pY^2 - qZ^2$, (k gerade); $X^k = Y^2 - pqZ^2$ (k ungerade); $pX^3 + qY^3 = Z^2$ und $X^2 - Y^3 = 432\,Z^4$.

Sei n der Grad der höchsten in (1) auftretenden Potenz von z und seien n_1, n_2 und n_3 beziehentlich die Grade der Polynome P_1, P_2 und P_3. Dann können wir dieselben von vornherein so numerieren, daß

$$n = n_1 k_1 = n_2 k_2 = n_3 k_3 + c\,, \quad c \geq 0 \tag{2}$$

gilt.

Wir setzen $w = Q(z) = \dfrac{P_1^{k_1}}{P_3^{k_3}}$. Es folgt $w + 1 = -\dfrac{P_2^{k_2}}{P_3^{k_3}}$. Die Funktion $w = Q(z)$ bildet also die schlichte z-Ebene ein-eindeutig auf eine n-blättrige, rationale Riemann'sche Fläche ab, die gewiß über den Grundpunkten $w = 0$, $w = -1$ und $w = \infty$ verzweigt ist. Bedeuten p_1, p_2 und p_3 die Anzahlen der verschiedenen Nullstellen der Polynome P_1, P_2 und P_3 und v_0, v_{-1} und v_∞ die Verzweigungszahlen der Fläche über den Grundpunkten $w = 0$, $w = -1$ und $w = \infty$, so gilt $v_0 = n_1 k_1 - p_1 = n - p_1$; $v_{-1} = n_2 k_2 - p_2 = n - p_2$. Für $c = 0$ ist $v_\infty = n_3 k_3 - p_3 = n - p_3$, für $c > 0$ ist $v_\infty = n_3 k_3 - p_3 + c - 1 = n - p_3 - 1$.

Zwischen der gesamten Verzweigungszahl v der Fläche und ihrer Blätterzahl n besteht die Riemann-Hurwitz'sche Relation in der Form $v = 2n - 2$ [3]). Wegen $v \geq v_0 + v_{-1} + v_\infty$ folgt somit $2n - 2 \geq n - p_1 + n - p_2 + n - p_3 - 1$. Hierin ist aber für $i = 1, 2, 3: p \leq n_i \leq \dfrac{n}{k_i}$.

So folgt, daß die Ungleichung bestehen muß

$$n\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right) \geq n + 1 > n\,. \tag{3}$$

Die Zahlen k_1, k_2 und k_3 müssen also der Ungleichung

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} > 1 \tag{4}$$

genügen. Diese Ungleichung wird durch die folgenden Zahlentripel (k_1, k_2, k_3) gelöst:

A) $(2, 2, k)$ (k beliebig ≥ 2); B) $(2, 3, 3)$;
C) $(2, 3, 4)$; D) $(2, 3, 5)$.

---

[3]) *Nevanlinna,* Eindeutige analytische Funktionen, Grundlehren, Bd. XLVI, p. 315.

Setzen wir voraus, daß die Fläche über keinem von 0, -1 und ∞ verschiedenen Grundpunkt verzweigt sei, daß $c = 0$ und $p_i = n_i$ gelte ($i = 1, 2, 3$), so hat die Fläche genau 3 Verzweigungsgrundpunkte und ihre Verzweigtheit ist regulär. Sie ist dann die Fläche einer Schwarz'schen Dreiecksfunktion zu einem Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{k_1}$, $\frac{\pi}{k_2}$ und $\frac{\pi}{k_3}$ (vgl. [3]), p. 282).

Ist also ein Wertetripel k_1, k_2, k_3 gegeben, das die Ungleichung (4) befriedigt, so finden wir auf die folgende Weise eine Lösung der zugehörigen Identität (1): wir bilden ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{k_1}$, $\frac{\pi}{k_2}$ und $\frac{\pi}{k_3}$ konform auf eine Halbebene ab, derart, daß seine Eckpunkte der Reihe nach in die Punkte $w = 0$, $w = -1$ und $w = \infty$ übergehen. Die Abbildungsfunktion, die das liefert, ist die rationale Funktion $Q(z) = \frac{(P_1(z))^{k_1}}{(P_3(z))^{k_3}}$. Wir können auch das Ausgangsdreieck an seinen Seiten so oft spiegeln, bis die z-Ebene lückenlos überdeckt ist. Die Eckpunkte, die die Winkel $\frac{\pi}{k_1}$ tragen, sind die Nullstellen des Polynoms P_1, diejenigen mit den Winkeln $\frac{\pi}{k_2}$ sind die Nullstellen von P_2 und diejenigen mit den Winkeln $\frac{\pi}{k_3}$ sind die Nullstellen von P_3. Die Konstanten, mit denen die Polynome noch multipliziert werden müssen, finden wir durch Vergleich der Koeffizienten einer Potenz von z. (Es ist hier natürlich nicht nötig, darauf zu achten, wie die Eckpunkte des Ausgangsdreiecks den Werten $w = 0$, $w = -1$ und $w = \infty$ zugeordnet werden. Denn das, was oben über die Vielfachheit des Punktes ∞ ausgesagt wurde, kann ohne weiteres auf die Vielfachheit des Punktes 0 oder des Punktes -1 übertragen werden.)

Fall A. Wir wählen das Ausgangsdreieck so, daß ein Eckpunkt in den Nullpunkt der z-Ebene zu liegen kommt, und zwei seiner Seiten durch ein Stück der reellen und der imaginären Achse gebildet werden. Schreiben wir noch vor, daß der Eckpunkt, der den Winkel $\frac{\pi}{k}$ trägt, in $z = 1$ liegen soll, so ist dadurch das Dreieck und sind die Funktionen P_1, P_2 und P_3 vollständig bestimmt. Ersetzen wir in der so entstehenden Identität noch z durch $\frac{\sqrt{p}\,x}{\sqrt{q}\,y}$, so folgt für gerade k

$$\text{A 1)}\qquad (p x^2 - q y^2)^k = p\left[x \prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{k-1}{2}} \left(p x^2 + q y^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\nu\pi}{k}\right)\right]^2$$

$$- q\left[y \prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{k-1}{2}} \left(p x^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2k} + q y^2\right)\right]^2$$

und für ungerade k

$$\text{A 2)}\qquad (p x^2 - q y^2)^k = \left[\prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{k}{2}} \left(p x^2 + q y^2 \operatorname{tg}^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2k}\right)\right]^2$$

$$- pq\left[c x y \prod_{\nu=1}^{\nu=\frac{k}{2}-1} \left(p x^2 + q y^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\nu\pi}{k}\right)\right]^2 .\ ^{4)}$$

Fall B. Wir legen das Ausgangsdreieck in der z-Ebene so, daß ein Eckpunkt mit dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ in den Nullpunkt zu liegen kommt. Die beiden Seiten, die an diesem Eckpunkt zusammenstoßen, seien gerade. Schreiben wir noch vor, daß ein weiterer Eckpunkt mit dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ in $z = -4$ liegen soll, so ist damit alles bestimmt. Ersetzen wir in der entstehenden Identität der Form (1) noch z durch $\frac{\sqrt[3]{p}\,x}{\sqrt[3]{q}\,y}$, so folgt

$$\text{B)}\quad p(px^4 - 64qxy^3)^3 + q(8px^3 y + 512qy^4)^3 =$$
$$= (p^2 x^6 + 160pqx^3 y^3 - 512q^2 y^6)^2 .$$

Fall C. Den Eckpunkt mit dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ des Ausgangsdreiecks bringen wir nach $z = 0$, dort mögen zwei gerade Seiten aneinander stoßen. Einen Eckpunkt mit den Winkel $\frac{\pi}{3}$ bringen wir nach $z = \sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}}$. So folgt

$$\text{C)}\quad (x^{12} + 132\, x^8 y^4 - 528\, x^4 y^8 - 64\, y^{12})^2 -$$
$$- (x^8 - 56\, x^4 y^4 + 16\, y^8)^3 = 432\,(x^5 y + 4\, xy^5)^4 .$$

Fall D. Wie man sich leicht überzeugt, können die Eckpunkte des Ausgangsdreiecks so gewählt werden, daß die Polynome P reelle, nicht aber so, daß sie ganzzahlige Koeffizienten erhalten. Wir verzichten darauf, eine solche Identität (vom 60. Grad) hier anzuschreiben.

(Eingegangen am 30. Dezember 1949.)

---

[4]) Vgl. hiezu *Euler*, Algebra, 2. Teil, 2. Abschnitt, Cap. 12; *Pépin*, journal de Math. (3), t. 1, p. 317; *M. Ward*, Transactions Am. Math. Soc. 38, 1935, p. 447.