

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1949)

Artikel: Sur une décomposition de la droite.
Autor: Sierpinski, Waclaw
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19204>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur une décomposition de la droite

Par WACLAW SIERPIŃSKI, Varsovie

Le but de cette Note est de démontrer ce

Théorème. *Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de la droite en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints de puissance 2^{\aleph_0} , tels que toute translation le long de la droite transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

Démonstration. Soit X l'ensemble de tous les nombres réels. Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω ,

$$x_1, x_2, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega) \quad (1)$$

formée de tous les nombres (distincts) de l'ensemble X .

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal tel que $1 < \alpha < \Omega$ et supposons que nous avons déjà défini tous les nombres p_ξ , où $\xi < \alpha$.

L'ensemble P_α de tous les nombres

$$p_\xi \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi < \alpha$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ (où n est un nombre naturel quelconque) est au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$): il existe donc des nombres $x_\xi \in X - P_\alpha$; nous désignerons par p_α le premier terme de la suite (1) qui est un tel nombre x_ξ .

La suite transfinie $\{p_\alpha\}_{\alpha < \Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie, et, comme on voit sans peine, tous leur termes sont distincts.

Soit Z l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$. Comme $\aleph_1^2 = \aleph_1$, il existe une décomposition de l'ensemble Z en \aleph_1 ensembles disjoints de puissance \aleph_1 , soit $Z = \sum_{\lambda < \Omega} Z_\lambda$. Désignons maintenant, pour $\lambda < \Omega$, par E_λ l'ensemble de tous les nombres

$$p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$. Les ensembles E_λ sont évidemment de puissance \aleph_1 pour $\lambda < \Omega$. Je dis que

$$E_\lambda E_\mu = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda < \Omega, \quad \mu < \Omega, \quad \lambda \neq \mu. \quad (2)$$

En effet, si $p \in E_\lambda E_\mu$, on aurait

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} \quad (3)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$ et

$$p = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \dots \pm x_{\eta_m}, \quad (4)$$

où $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ et $\beta \in Z_\mu$.

Comme $\lambda \neq \mu$, on a $Z_\lambda Z_\mu = 0$, donc, vu que $\alpha \in Z_\lambda$, $\beta \in Z_\mu$, on a $\alpha \neq \beta$. Si $\alpha < \beta$, (3) et (4) donnent :

$$p_\beta = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} \mp x_{\eta_1} \mp x_{\eta_2} \mp \dots \mp x_{\eta_m},$$

où $\xi_i < \alpha < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\eta_i < \beta$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_β .

Si $\alpha > \beta$, on trouve

$$p_\alpha = p_\beta \pm x_{\eta_1} \pm x_{\eta_2} \pm \dots \pm x_{\eta_m} \mp x_{\xi_1} \mp x_{\xi_2} \mp \dots \mp x_{\xi_n},$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\eta_i < \beta < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui contredit à la définition du nombre p_α .

La formule (2) est ainsi établie. Les ensembles E_λ ($\lambda < \Omega$) sont ainsi disjoints.

Je dis qu'on a pour tout a réel

$$\overline{\overline{E_\lambda(a) - E_\lambda}} \leq \aleph_0 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{E_\lambda - E_\lambda(a)}} \leq \aleph_0, \quad (5)$$

où, généralement, $H(a)$ désigne la translation de l'ensemble linéaire H (le long de la droite) de longueur a . Vu la définition de la suite transfinie (1), il existe pour le nombre réel a un nombre ordinal $\nu < \Omega$, tel que $a = x_\nu$. Si $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$, on a $p \in E_\lambda(a)$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \dots \pm x_{\xi_n} + x_\nu, \quad (6)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

S'il était $\alpha > \nu$, il résulterait de (6) et de la définition de l'ensemble E_λ que $p \in E_\lambda$, contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda(a) - E_\lambda$. On a donc

$\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (6), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. La première des inégalités (5) est ainsi établie.

Si $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$, on a $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n}, \quad (7)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on aurait, d'après (7) et la définition de l'ensemble E_λ :

$$p - x_\nu \in E_\lambda, \quad \text{ce qui donne tout de suite: } p \in E_\lambda(x_\nu),$$

contrairement à l'hypothèse que $p \in E_\lambda - E_\lambda(a)$. On a donc $\alpha \leq \nu$ et on en déduit que l'ensemble des nombres (7) est au plus dénombrable. La deuxième des inégalités (5) est ainsi établie.

Chacun des ensembles $E_\lambda (\lambda < \Omega)$ est donc transformé par toute translation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Posons encore $E = X - \sum_{\lambda < \Omega} E_\lambda$.

Soit, pour un nombre ordinal $\nu < \Omega$, $p \in E - E(x_\nu)$. On a donc, pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$, $p - x_\nu \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} + x_\nu, \quad (8)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si $\alpha > \nu$, on trouve, d'après (8) et d'après la définition de l'ensemble E_λ , $p \in E_\lambda$, contrairement à $p \in E$. On a donc $\alpha \leq \nu$. Or, l'ensemble de tous les nombres (8), où $\alpha \leq \nu$ est au plus dénombrable. On a donc

$$\overline{\overline{E - E(x_\nu)}} \leq \aleph_0.$$

Soit maintenant $p \in E(x_\nu) - E$. On a donc pour un nombre ordinal $\lambda < \Omega$: $p \in E_\lambda$, donc

$$p = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n}, \quad (9)$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$, et $\alpha \in Z_\lambda$ d'où

$$p - x_\nu = p_\alpha \pm x_{\xi_1} \pm x_{\xi_2} \pm \cdots \pm x_{\xi_n} - x_\nu,$$

où $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et $\alpha \in Z_\lambda$.

Si l'on avait $\alpha > \nu$, on aurait donc $p - x_\nu \in E_\lambda$, d'où $p - x_\nu \in \overline{E}$, ce qui donne $p \in \overline{E}(x_\nu)$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha \leq \nu$. L'ensemble de tous les nombres (9), où $\alpha \leq \nu$ étant au plus dénom-

brable, on trouve $\overline{\overline{\overline{E}(x_\nu) - E}} \leq \aleph_0$.

Toute translation de l'ensemble E ne diffère donc de E que d'un ensemble au plus dénombrable de points.

Nous pouvons évidemment adjoindre E à l'ensemble E_1 sans altérer la propriété de ce dernier (d'être de puissance 2^{\aleph_0} et de ne différer de ses translations que d'un ensemble au plus dénombrable de points). $X = (E + E_1) + \sum_{1 < \lambda < \aleph} E_\lambda$ donne donc la décomposition de la droite satisfaisant aux conditions de notre théorème qui se trouve ainsi démontré.

En modifiant un peu notre démonstration, on pourrait démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu la proposition suivante :

Il existe une décomposition de la droite en 2^{\aleph_0} ensembles disjoints de puissance 2^{\aleph_0} tels que toute translation transforme chacun de ces ensembles en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance inférieure à celle du continu.

Il est à remarquer que en 1932 *S. Banach* a démontré que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe sur la circonférence un ensemble non mesurable qui est transformé par chaque rotation en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points¹⁾.

(Reçu le 15 juillet 1948.)

¹⁾ *Fundamenta Mathematicae* **19**, p. 15.