Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen. II.

Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen II *)

Von ROLF CONZELMANN, Basel

§ 1. Einleitung

1. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Anwendungen der im ersten Teil dieser Beiträge gewonnenen Sätze auf die bekanntesten Kerne singulärer Integrale.

Zum Verständnis dieses zweiten Teils genügt es, vom ersten Teil die Einleitung, die Sätze V bis VIII, sowie die Kriterien I und II in § 13 sich in Erinnerung zu rufen. Über die in beiden Teilen verwendeten besonderen Bezeichnungen und Begriffe orientiert ein Verzeichnis am Ende dieser Arbeit. Wenn im folgenden Aussagen des ersten Teils zitiert werden, so geschieht dies unter Verwendung der leicht verständlichen Symbolik: (1 ; 6.3) für Formel (6.3); 1,V für Satz V; 1,Va) für Voraussetzung Va) usw. Die römischen Zahlen hinter den Autorennamen in den Fußnoten verweisen auf das beiden Teilen gemeinsame Literaturverzeichnis am Schlusse des ersten.

2. Für jeden Typus eindimensionaler klassischer Kerne[1]) gibt es „Differentiationssätze", d. h. es gelten — abgesehen von besonders komplizierten Kernen — die Relationen (1 ; 1.2) für alle Funktionen einer bestimmten Klasse[2]).

Im Falle mehrerer Variablen wird man, um sich die Integrationsarbeit möglichst zu erleichtern, zunächst etwa Kerne untersuchen, die gleich einem Produkt von eindimensionalen Kernen des gleichen Typus sind. Auf solche Kerne werden im folgenden die im ersten Teil aufgestellten Sätze angewandt. Dabei ergeben sich verschiedene Möglichkeiten je nach den über die darzustellende Funktion getroffenen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (Totales Differential, O-Ableitung, H-Ableitung).

---

*) Siehe *Comm. Math. Helv.*, Vol. 19 (1946/47), Fasc. IV, pp. 279—315.

[1]) Darunter sind im folgenden die allgemein bekannten Kerne zu verstehen, welche nach der in *H. Hahn* (I) gegebenen Klassifikation in die Kerne vom *Stieltjesschen*, *Poissonschen* und *Weierstraßschen* Typus zerfallen.

[2]) *H. Hahn* (I).

3. Im Falle der O-Ableitung zeigt sich ein unerwarteter und eigentümlicher Sachverhalt, für den es in einer Dimension kein Analogon gibt, und auf den erstmals Herr *Ostrowski* aufmerksam gemacht hat. Es scheint nämlich für $m \geqq 2$ überhaupt keine m-dimensionalen Kerne zu geben, die gleich einem Produkt von m klassischen eindimensionalen Kernen desselben Typus sind, so daß eine beliebige der Relationen (1 ; 1.4) für jede stetige Funktion f gilt, die im „singulären Punkt" bloß O-differenzierbar nach der betreffenden Variablen vorausgesetzt wird[3]).

Ein Beweis der Richtigkeit dieser Vermutung für sehr allgemeine *Stieltjessche* und *Poissonsche* Kerne ist enthalten in den beiden auf diese Kerne bezüglichen Sätzen VII und VIII (in den Nummern 22 bzw. 47) dieser Arbeit. Der Beweis obiger Vermutung für Kerne vom *Weierstraßschen* Typus wird sich bei späterer Gelegenheit in anderem Zusammenhang ergeben.

4. Herr *Ostrowski*[4]) hat einen neuen, formal sehr einfachen Kern angegeben, welcher den oben beschriebenen Mangel der klassischen Kerne nicht aufweist, und der z. B. für die in Fußnote 4 zitierte Arbeit von ganz fundamentaler Bedeutung ist. Weitere Untersuchungen über Kerne mit analogen Eigenschaften bleiben einer späteren Arbeit vorbehalten.

Wie bereits im ersten Teil habe ich auch hier für die Darstellung stets $m = 2$ Variable gewählt. Wo die Verhältnisse für mehr als zwei Variable nicht ganz analog liegen, wird jeweils besonders darauf hingewiesen werden.

Für die vielseitige Unterstützung, die mir Herr Prof. Dr. *A. Ostrowski* auch bei der Bearbeitung dieses zweiten Teils gewährt hat, bin ich meinem verehrten Lehrer zu großem Dank verpflichtet.

§ 2. Hilfssätze

5. Mit einer beliebig vorgegebenen Größe $l > 0$ bilden wir das (offene) Intervall $(-l, l) \equiv (L)$. Unter einem **Einerkern auf** (L) soll dann im folgenden eine Funktionenfolge $\psi(u, n)$ $n = 1, 2, \ldots$ verstanden werden, deren Glieder bis auf Nullmengen $\mathfrak{N}_n$ auf (L) definiert und über L integrabel sind. Wir wollen sagen, der Einerkern ψ auf (L) sei **totalstetig**,

---

[3]) *A. Ostrowski* (I), p. 269. In der zitierten Arbeit beziehen sich die Aussagen über diesen Punkt zwar auf eine Relation, die sich von der unter (1; 1.4) notierten dadurch unterscheidet, daß die Operationen der Integration und der Differentiation miteinander vertauscht sind. Wir werden jedoch in den Nummern 30 und 46 nachweisen, daß diese beiden Relationen für die zur Diskussion stehenden klassischen Kerne miteinander äquivalent sind.

[4]) *A. Ostrowski* (I), p. 270.

wenn $\psi(u, n)$ für jedes n in jedem (abgeschlossenen) Teilintervall $L' \prec (L)$ totalstetig ist.

Gilt für jedes hinreichend kleine $h > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-h}^{h} \psi(u, n)\, du = \varrho \;, \qquad \int_{-h}^{h} |\, \psi(u, n) \,|\, du < N \qquad (n = 1, 2, \ldots) \;,$$

so werden wir sagen, ψ sei ϱ-strebig im Ursprung bzw. genüge einer N-Ungleichung im Ursprung.

Wir bezeichnen mit $(R_{2l}(O))$ ein offenes achsenparalleles Quadrat mit der Seitenlänge $2l$, dessen Zentrum O ist. Schließlich heiße $\psi(u, n)\,\varphi(v, n)$ $n=1, 2, \ldots$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, wobei $\psi(u, n)$ und $\varphi(v, n)$ Einerkerne auf (L) sind, wenn der erste Faktor dieses Produkts totalstetig ist und wenn

$$\psi(u, n)\,\varphi(v, n) \Longrightarrow 0 \quad \left(P(u, v) \prec R^* \prec (R_{2l}(O))\,,\ n \to \infty\right)\ ^{5)} \qquad (2.1)$$

gilt, und zwar gleichmäßig für alle Punkte $P(u, v)$ eines beliebigen achsenparallelen, abgeschlossenen Rechtecks $R^* \prec (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält. Ist $\varphi = \psi$, so sprechen wir von einem symmetrischen Produktkern.

6. Unter Benutzung des in den Nummern 28 und 29 im ersten Teil definierten Begriffs des Verschiebungskerns können wir jetzt einen Hilfssatz wie folgt formulieren:

Hilfssatz 1. *Jeder Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ ist ein Verschiebungskern auf $(R_{2l}(O))$.*

Die Relation (2.1) ist offenbar äquivalent mit (1 ; 6.3), und der Beweis ist erbracht, sobald wir wissen, daß die Produkte $\Phi = \psi(u, n)\,\varphi(v, n)$, $\Phi'_u = \psi'(u, n)\,\varphi(v, n)$ über jedes Rechteck $R' \prec (R_{2l}(O))$ integrabel sind.

---

[5]) Da es sich in dieser Nummer durchwegs um Produkte von Einerkernen handelt, wäre es wünschenswert, alle Voraussetzungen in Relationen zu fassen, die bloß von je einer Variablen abhängen. Wollte man dieser Forderung konsequent entsprechen, so hätte man jedenfalls oft sehr komplizierte Bedingungen in Kauf zu nehmen.

Es ist besonders bemerkenswert, daß die Relation (2.1) im Falle $\varphi = \psi$ eine für $\psi(u, n)$ dimensionsabhängige Bedingung ist. Es kann nämlich sehr wohl sein, daß (2.1) für $\varphi = \psi$ gilt, während die entsprechende Bedingung für drei und mehr Variable für denselben Einerkern ψ nicht erfüllt ist. Eine entsprechende „Verschlechterung" ist natürlich bereits beim Übergang von einer zu zwei und mehr Dimensionen zu beobachten.

Nach (1 ; 7.2) ist

$$\int_{-l'}^{l'} |\psi'(u,n)|\,du = T_n(-l', l') \qquad (0<l'<l) ,$$

wo $T_n(-l', l')$ die Totalvariation von $\psi(u,n)$ im Intervall $\langle -l', l'\rangle$ bedeutet. Zusammen mit der Existenz der Integrale

$$\int_{-l'}^{l'} |\psi(u,n)|\,du , \qquad \int_{-l'}^{l'} |\varphi(v,n)|\,dv \qquad (0<l'<l)$$

ergibt sich die Existenz von

$$\int_{R'} |\psi(u,n)\,\varphi(v,n)|\,du\,dv , \qquad \int_{R'} |\psi'(u,n)\,\varphi(v,n)|\,du\,dv$$

und somit die Integrabilität von Φ und Φ'_u. —

7. **Hilfssatz 2.** *Ist* $\psi(u,n)\,\varphi(v,n)$ *ein Produktkern auf* $(R_{2l}(O))$ *und ist* $\varphi(v,n)$ *für ein* $\varrho \neq 0$ ϱ*-strebig im Ursprung, so gilt für jedes hinreichend kleine* $h>0$:

$$\psi(h,n) \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Wäre die Behauptung falsch, so existierten zu beliebig kleinen $h>0$ je ein $\mu>0$ und eine Folge n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$), so daß $|\psi(h, n_\nu)| > \mu$ für alle ν gälte. Wegen (2.1) wäre dann $\varphi(v, n_\nu)$ nach 0 konvergent, und zwar gleichmäßig für alle $v \prec \langle -h, h\rangle$, was aber der ϱ-Strebigkeit von φ widerspräche. —

§ 3. Differentiationssätze im Falle des totalen Differentials und der *H*-Ableitung für Produktkerne

8. Unter Benutzung des Hilfssatzes 1 ergibt sich aus Satz 1,VI, wie man sich sofort überzeugt, der folgende:

Satz I. *Es sei* $\psi(u,n)\,\varphi(v,n)$ *ein Produktkern auf* $(R_{2l}(O))$ *und* $Q_0(x,y)$ *ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates* R_l *der* $\xi\eta$*-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi,\eta)$, *die auf* R_l *zu* F_i ($i = 1, 2$) *gehört und in* Q_0 *ein* ***totales Differential*** *besitzt, die Relationen*

$$f(x, y) = \lim_{n\to\infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta)\, \psi(\xi - x, n)\, \varphi(\eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{3.1}$$

$$f'_\xi(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta)\, \frac{\partial\psi(\xi - x, n)}{\partial x}\, \varphi(\eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{3.2}$$

gelten, ist notwendig und hinreichend:

a) (*oder* a°)). *Für den zu* $\Phi'_u = \psi'(u, n)\, \varphi(v, n)$ *gehörigen gelochten Kern gilt* 1,V a) (*bzw.* 1,V a°))[6].

b$_1$) *und* b$_2$). *Es existieren positive Konstanten* N *und* h, *so daß für alle* n

$$\text{b}_1) \quad \int_{-h}^{h} |\, u\,\psi'(u, n)\,|\, du \cdot \int_{-h}^{h} |\, \varphi(u, n)\,|\, du \quad < N\ ,$$

$$\text{b}_2) \quad \int_{-h}^{h} |\, \psi'(u\ ,\ n)\,|\, du \cdot \int_{-h}^{h} |\, u\,\varphi(u, n)\,|\, du < N$$

gilt.

c$_1$) *und* c$_2$) *Es existiert eine Konstante* $\varrho \neq 0$, *so daß* ψ ϱ*-strebig und* φ $\dfrac{1}{\varrho}$*-strebig ist im Ursprung.*

9. Für $\varphi = \psi$ nimmt dieser Satz, wie wir sogleich beweisen werden, die etwas einfachere Gestalt an:

Satz II. *Es sei* $\psi(u, n)\, \psi(v, n)$ *ein symmetrischer Produktkern auf* $(R_{2l}(O))$ *und* $Q_0(x, y)$ *ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates* R_l *der* $\xi\eta$*-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, *die auf* R_l *zu* F_i $(i = 1, 2)$ *gehört und in* Q_0 *ein totales Differential besitzt, die Relationen*

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta)\, \psi(\xi - x, n)\, \psi(\eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{3.3}$$

$$f'_\xi(x,y) = \lim_{n\to\infty} \int_{R_l} f(\xi, \eta)\, \frac{\partial\psi(\xi - x, n)}{\partial x}\, \psi(\eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{3.4}$$

gelten, ist notwendig und hinreichend:

---

[6]) a) (*oder* a°)) bedeutet hier und in den folgenden Sätzen, daß die Voraussetzung a), welche sich auf 1, Va) a. p. 298 bezieht, nach Belieben durch die Voraussetzung a°) ersetzt werden kann, welche auf 1, Va°) a. p. 299 Bezug nimmt.

a) (*oder* a°)) *Für den zu* $\Phi_u' = \psi'(u, n)\,\psi(v, n)$ *gehörigen gelochten Kern gilt* 1,V a) (*bzw.* 1,V a°))[6].

b$_1$) $u\,\psi'(u, n)$ *genügt einer N-Ungleichung im Ursprung.*

b$_2$) *Es existieren positive Konstanten N und h, so daß für alle n*

$$\int_{-h}^{h} |\,\psi'(u, n)\,|\,du \cdot \int_{-h}^{h} |\,u\,\psi(u, n)\,|\,du < N$$

gilt.

c) ψ *ist eins-strebig im Ursprung.*

Beweis. Wir haben offenbar bloß nachzuweisen, daß I b$_1$) für $\varphi = \psi$ erfüllt und II b$_1$) notwendig ist.

In der Tat erhält man durch partielle Integration

$$\int_{-h}^{h} |\,\psi(u, n)\,|\,du = u\,|\,\psi(u, n)\,|\,\Big|_{-h}^{h} - \int_{-h}^{h} u\,\psi'(u, n)\,\mathrm{sgn}\,\psi\,du\ ,$$

wobei $\mathrm{sgn}\,\psi = 1$ für $\psi \geqq 0$ und $\mathrm{sgn}\,\psi = -1$ für $\psi < 0$ ist.

Wegen Hilfssatz 2 strebt der ausintegrierte Bestandteil mit $n \to \infty$ nach 0, während das letzte Integral zufolge II b$_1$) absolut beschränkt ist. Also ist auch die linke Seite absolut beschränkt, und zusammen mit II b$_1$) folgt hieraus die Gültigkeit von I b$_1$). —

Wäre II b$_1$) nicht erfüllt, so würde für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und eine gewisse von h abhängige Folge n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) die rechte und daher auch die linke Seite der Ungleichung

$$\int_{-h}^{h} |\,u\,\psi'(u, n_\nu)\,|\,du \cdot \int_{-h}^{h} |\,\psi(v, n_\nu)\,|\,dv \geqq \int_{-h}^{h} |\,u\psi'(u, n_\nu)\,|\,du \cdot \left| \int_{-h}^{h} \psi(v, n_\nu)\,dv \right|$$

über alle Grenzen wachsen, da der zweite Faktor rechts nach 1 strebt. Also könnte I b$_1$) für $\varphi = \psi$ nicht gelten. —

10. Ganz analog wie die Sätze I und II ergeben sich, jetzt unter Berufung auf Satz 1,VII, die beiden folgenden:

Satz III. *Es sei $\psi(u, n)\,\varphi(v, n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x, y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi,\eta)$, die auf R_l zu F_i $(i=1,2)$ gehört und in Q_0 stetig und H-differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) *gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen $I\,a)$ (oder $a^\circ)$), $b_1)$, $c_1)$, $c_2)$ erfüllt sind.*

Die Voraussetzung $\mathrm{I}\,\mathrm{b}_2)$ kommt also in Wegfall.

Satz IV. *Es sei $\psi(u,n)\,\psi(v,n)$ ein symmetrischer Produktkern auf $(R_{2l}(O))$ und $Q_0(x,y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi,\eta)$, die auf R_l zu F_i $(i=1,2)$ gehört und in Q_0 stetig und H-differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.3), (3.4) *gelten, ist notwendig und hinreichend, daß die Voraussetzungen $II\,a)$ (oder $a^\circ)$), $b_1)$, $c)$ erfüllt sind.*

§ 4. Differentiationssätze im Falle der O-Ableitung für Produktkerne

11. Der nächste Satz verlangt die Einführung speziellerer Einerkerne. Es sei fast überall in einer Umgebung $\mathfrak{U}(O)$ des Nullpunktes für den Einerkern φ:

$$\varphi(v,n)\geqq 0\,,\quad \varphi(-v,n)=\varphi(v,n)\quad \big(v<\mathfrak{U}(O),\ n=1,2,\ldots\big) \tag{4.1}$$

Ein solcher Kern heiße in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver gerader Einerkern. — Ist ψ ein totalstetiger Einerkern und gilt fast überall in $\mathfrak{U}(O)$

$$u\psi'(u,n)\leqq 0,\quad \psi(-u,n)=\psi(u,n)\quad \big(u<\mathfrak{U}(O),\ n=1,2,\ldots\big) \tag{4.2}$$

so wollen wir sagen, ψ sei in $\mathfrak{U}(O)$ ein gerader Glockenkern[7]).

Satz V. *Es sei $\psi(u,n)\,\varphi(v,n)$ ein Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, und in $\mathfrak{U}(O)$ sei φ ein positiver gerader Einerkern und ψ ein gerader Glockenkern. $Q_0(x,y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi,\eta)$, die auf R_l zu F_i $(i=1,2)$ gehört und in Q_0 stetig und O-differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.1), (3.2) *gelten, ist notwendig und hinreichend:*

a) (oder a°)) *Für den zu $\Phi'_u=\psi'(u,n)\,\varphi(v,n)$ gehörigen gelochten Kern gilt* $1, Va)$ (*bzw.* $1, Va^\circ)$).

[7]) Die Wahl von Glockenkernen scheint für das Folgende eine besonders einschneidende Beschränkung zu sein. Es wird sich aber erweisen, daß die klassischen Kerne (vgl. Fußnote 1), abgesehen von den kompliziertesten Fällen, Glockenkerne sind.

b$_1$) und b$_2$) *Es existiert eine Konstante* $\varrho > 0$, *so daß* ψ *ϱ-strebig und* φ $\frac{1}{\varrho}$*-strebig ist im Ursprung.*

c) *Es existiert eine Konstante* M_1, *so daß für jedes hinreichend kleine* $h > 0$ *und alle* n

$$E_n \equiv \int_0^h \varphi(v, n)\{\psi(0, n) - \psi(v, n)\}\, dv < M_1 \tag{4.3}$$

gilt.

12. Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz obiger Voraussetzungen mit jenen von Satz 1,VIII.

1,VIIIa) und 1,VIIIc) sind äquivalent mit a) bzw. b$_1$) und b$_2$). — 1,VIIIb) ist sicher erfüllt, wenn $u\,\psi'(u, n)\,\varphi(v, n)$ im Ursprung sogar einer N-Ungleichung genügt. Wir weisen daher jetzt Ib$_1$) als erfüllt nach:

Wegen (4.2) ist für jedes hinreichend kleine $h > 0$

$$\int_{-h}^{h} |\, u\psi'(u, n)\,|\, du = - u\,\psi(u, n)\Big|_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} \psi(u, n)\, du\,.$$

Unter Beachtung des Hilfssatzes 2 und der ϱ-Strebigkeit von ψ erkennt man, daß das Integral linker Hand für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Andererseits ist $\int_{-h}^{h} |\,\varphi\,|\, dv$ für hinreichend kleine $h > 0$ in n gleichmäßig beschränkt wegen der Positivität und der $\frac{1}{\varrho}$-Strebigkeit von φ. Also ist Ib$_1$) und somit auch 1,VIIIb) erfüllt.

13. Es bleibt noch einzusehen, daß 1,VIIId) äquivalent ist mit c). In der Tat ist, wenn $\psi(u)$, $\varphi(v)$ anstatt $\psi(u,n)$, $\varphi(v,n)$ geschrieben wird,

$$\int_{V_h(0)} |\,\psi'(u)\,\varphi(v)\,|\, du\, dv = \int_{-h}^{0}\int_{v}^{-v} |\,\psi'(u)\,\varphi(v)\,|\, du\, dv + \int_{0}^{h}\int_{-v}^{v} |\,\psi'(u)\,\varphi(v)\,|\, du\, dv =$$

$$= \int_{-h}^{0} \varphi(v) \int_{v}^{0} \psi'(u)\, du\, dv - \int_{-h}^{0}\varphi(v) \int_{0}^{-v} \psi'(u)\, du\, dv +$$

$$+ \int_{0}^{h} \varphi(v) \int_{-v}^{0} \psi'(u)\, du\, dv - \int_{0}^{h} \varphi(v) \int_{0}^{v} \psi'(u)\, du\, dv =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-h}^{0} \varphi(v)\,[\psi(0) - \psi(v)]\, dv + \int_{-h}^{0} \varphi(v)\,[\psi(0) - \psi(-v)]\, dv + \\ &\quad + \int_{0}^{h} \varphi(v)\,[\psi(0) - \psi(-v)\,]\, dv + \int_{0}^{h}\varphi(v)\,[\psi(0) - \psi(v)]\, dv\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Zufolge der Geradheit von ψ, φ in $\mathfrak{U}(O)$ ist für jedes hinreichend kleine $h > 0$ die letzte Summe gleich der wegen (4.1), (4.2) positiven Größe

$$4\int_0^h \varphi(v)[\psi(0) - \psi(v)]\,dv\ .$$

Dies ist gerade das Vierfache des Ausdrucks, von dem wir unter c) die Beschränktheit vorausgesetzt haben. Damit ist bewiesen, daß die Bedingungen a), b_1), b_2), c) notwendig und hinreichend sind.

14. Anmerkung. Will man darauf verzichten, in den Voraussetzungen dieses Satzes ψ und φ in $\mathfrak{U}(O)$ als gerade anzunehmen, so hat man offenbar c) durch die Forderung zu ersetzen, daß jedes einzelne der vier Integrale in (4.4) für $n \to \infty$ beschränkt bleibt. Diese Forderung ist nämlich auch notwendig, weil alle vier Integrale nicht negativ sind.

15. Für $\varphi = \psi$ erhält man aus Satz V sofort den folgenden:

Satz VI. *Es sei $\psi(u, n)\,\psi(v, n)$ ein symmetrischer Produktkern auf $(R_{2l}(O))$, und $\psi(u, n)$ sei in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver gerader Glockenkern. $Q_0(x, y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i $(i = 1, 2)$ gehört und in Q_0 stetig und O-differenzierbar nach ξ ist, die Relationen (3.3), (3.4) *gelten, ist notwendig und hinreichend:*

a) (oder a°)) *Für den zu $\Phi'_u = \psi'(u, n)\,\psi(v, n)$ gehörigen gelochten Kern gilt* 1,*Va*) (*bzw.* 1,*Va°*)).

b) *ψ ist eins-strebig im Ursprung.*

c) *Es existiert eine Konstante M_1, so daß für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und alle n*

$$D_n \equiv \int_0^h \psi(u, n)\,[\psi(0, n) - \psi(u, n)]\,du < M_1 \tag{4.5}$$

ist. —

16. Schließlich sei noch bemerkt, daß auf Grund der Sätze 1,VI* bis 1,VIII* ohne weiteres ersichtlich ist, wie die den Sätzen I bis VI entsprechenden, unter Berücksichtigung der *gleichmäßigen Konvergenz* zu formulierenden Sätze lauten.

§ 5. Bemerkungen zu den Sätzen V und VI

17. Während sich die Sätze I bis VIII im ersten Teil und daher hier die Sätze I bis IV analog für mehr als zwei Dimensionen formulieren und beweisen lassen, ist in den Sätzen V und VI wegen der Voraussetzung c) eine solche Analogie nicht offensichtlich. Wir wollen daher im Falle von $m > 2$ Dimensionen Bedingungen angeben, die den Voraussetzungen V c) und VI c) entsprechen.

Es sei $\psi_1(u, n)$ auf (L) ein totalstetiger Einerkern, der in $\mathfrak{U}(O)$ ein gerader Glockenkern ist, und es seien $\psi_\mu(u, n)$ $(\mu = 2, \ldots, m)$ Einerkerne auf (L), die alle in $\mathfrak{U}(O)$ positiv und gerade sind. Es mögen ferner m Konstanten ϱ_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ mit $\prod_{\mu=1}^{m} \varrho_\mu = 1$ existieren, so daß $\psi_\mu(u, n)$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ ϱ_μ-strebig ist im Ursprung.

Wir betrachten sodann den m-dimensionalen Produktkern

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m; n) = \prod_{\mu=1}^{m} \psi_\mu(x_\mu, n) \qquad (|x_\mu| < l,\ \mu = 1, \ldots, m)$$

in den m Variablen x_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und bezeichnen für ein beliebiges $h > 0$ mit $U_h(O)$ jetzt den Bereich

$$|x_\mu| \leqq h \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \qquad |x_\mu| \leqq |x_1| \qquad (\mu = 2, \ldots, m)$$

und mit $V_h(O)$ den Bereich $R_{2h}(O) - U_h(O)$, wobei $R_{2h}(O)$ hier ein um den Ursprung als Zentrum gelegtes, achsenparalleles m-dimensionales Intervall mit der Seitenlänge $2h$ bedeutet.

Die Lösung unseres Problems gibt der folgende Satz, worin (5.1) jene Voraussetzung ist, die der Voraussetzung 1,VIII d) im Fall von $m = 2$ Dimensionen entspricht.

18. **Satz.** *Damit eine Konstante M_0 und ein $h > 0$ existieren, so daß für alle n*

$$\int_{V_h(O)} |\Phi'_{x_1}(x_1, \ldots, x_m; n)|\, dP < M_0 \qquad (dP = dx_1 \ldots dx_m) \tag{5.1}$$

gilt, ist notwendig und hinreichend, daß für $\psi = \psi_1(x_1, n)$ und $\varphi = \psi_\mu(x_\mu, n)$ $(\mu = 2, \ldots, m)$ die sich so ergebenden $m - 1$ Relationen (4.3) *erfüllt sind.* — Hieraus folgt offenbar, daß im Falle $\psi_\mu = \psi_1 \equiv \psi$ $(\mu = 2, \ldots, m)$ die Gültigkeit von VI c) zu fordern ist.

19. Beweis. Mit Δ_μ ($\mu = 2, \ldots, m$) sei für ein festes μ jener in der $x_1\, x_\mu$-Koordinatenebene liegende (nicht abgeschlossene) Bereich bezeichnet, für dessen Punkte $P(x_1, x_\mu)$

$$| x_1 |, | x_\mu | \leqq h \ , \qquad | x_1 | < | x_\mu |$$

gilt.

Um die Notwendigkeit unserer Behauptung zu beweisen, beachte man jetzt, daß der m-dimensionale Bereich Δ_2^*, welcher durch die Gesamtheit der Punkte $P(x_1, \ldots, x_m)$ mit

$$P(x_1, x_2) \prec \Delta_2, \qquad | x_\mu | \leqq h \qquad (\mu = 3, \ldots, m)$$

festgelegt wird, ein Teilbereich von $V_h(O)$ ist. Daher folgt aus (5.1), wenn wir iteriert, zuerst nach x_1 und x_2 und sodann nach den übrigen Variablen integrieren

$$\int\limits_{\Delta_2^*} | \Phi'_{x_1} | \, dP = \int\limits_{\Delta_2} | \psi_1'(x_1, n) \, \psi_2(x_2, n) | \, dx_1 \, dx_2 \int\limits_{Q_2} \prod_{\mu=3}^{m} | \psi_\mu(x_\mu, n) | \, dx_3 \ldots dx_m < M_0 \tag{5.2}$$

für alle n, wobei Q_2 das durch $| x_\mu | \leqq h$ ($\mu = 3, \ldots, m$) definierte $(m - 2)$-dimensionale Intervall bezeichnet. Das über Q_2 erstreckte Integral in (5.2) strebt mit $n \to \infty$ gegen eine feste, von 0 verschiedene Konstante, da

$$\int\limits_{Q_2} \prod_{\mu=3}^{m} | \psi_\mu(x_\mu, n) | \, dx_3 \ldots dx_m = \prod_{\mu=3}^{m} \int\limits_{-h}^{h} \psi_\mu(x_\mu, n) \, dx_\mu$$

ist und die ψ_μ ($\mu = 1, \ldots, m$) ϱ_μ-strebig sind.

Wäre jetzt Relation (4.3), welche ja, wie wir in Nummer 13 gesehen haben, mit 1, VIII d) äquivalent ist, nicht erfüllt für $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$, so wäre das Integral über Δ_2 in (5.2) für $n \to \infty$ nicht beschränkt und (5.2) könnte nicht gelten. — Indem man x_2 mit x_u ($\mu = 3, \ldots, m$) permutiert, erkennt man die Notwendigkeit aller aufgestellten Bedingungen.

Daß die Voraussetzungen auch hinreichend sind, geht aus den an (5.2) angeknüpften Überlegungen hervor, wenn man berücksichtigt, daß die $m - 1$ Bereiche Δ_μ^* ($\mu = 2, \ldots, m$) den Bereich $V_h(O)$ überdecken.

§ 6. Produktkerne vom Stieltjes-Hahnschen Typus

20. Mit *H. Hahn* nennen wir ψ einen *Stieltjesschen* Einerkern, wenn ψ die folgende Gestalt hat: Es sei für jeden Parameterwert $k \geqq 1$:

$$\psi(u,k) = C k^{\frac{1}{p}} \, | \chi(u) |^k \qquad (u \prec (-l,l) \equiv (L)) \; ;$$

$$C = \frac{p \cdot a^{\frac{1}{p}}}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \qquad \alpha , p > 0 \; ;$$

$$\chi(u) = 1 - \alpha \, | u |^p + \omega(u) \, | u |^p \qquad \lim_{u \to 0} \omega(u) = 0 \; .$$

Ferner sei $\operatorname{Sup} | \chi(u) | < 1$ für jedes Teilintervall $L^* \prec (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\omega(u)$ meßbar auf L[8]).

Hahn[8]) hat insbesondere gezeigt, daß für jede Funktion $f(\xi)$ $(\xi \prec (L))$ aus der Klasse F_1 in einem Stetigkeitspunkt die Relation (1 ; 1.1) mit $J = L$ und einem *Stieltjesschen* Einerkern $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$[9]) gilt.

Einen *Stieltjesschen* Einerkern wollen wir insbesondere einen *Stieltjes-Hahnschen* Einerkern nennen, wenn $\chi(u)$ in jedem (abgeschlossenen) Intervall $L' \prec (L)$ totalstetig ist und bis auf eine Nullmenge die Ungleichung

$$| \chi'(u) | < A \, | u |^{p-1} \qquad (u \prec L', \;\; A = \text{Const.}) \tag{6.1}$$

befriedigt.

Ist $\psi(u,k)$ ein Einerkern von letzterer Art, so gelten nach *Hahn*[8]) insbesondere die Relationen (1 ; 1.2) mit $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$, $J = L$, $s = 1$ in jedem Punkt $x \prec (L)$ einer beliebigen Funktion $f(\xi)$, die auf L zu F_1 gehört und für $\xi = x$ differenzierbar ist.

21. Im Falle von zwei Dimensionen stellen wir jetzt als Beispiel zu den Sätzen II, IV, V den folgenden Satz auf:

Satz VII[10]). *Es sei $\psi(u,k)$ ein Stieltjes-Hahnscher Einerkern auf (L) und $Q_0(x,y)$ ein beliebiger aber fester Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

---

[8]) *H. Hahn* (I), pp. 623—643. Der Einfachheit halber hat *Hahn* solche Einerkerne nur für den Fall benutzt, daß k über die Werte der natürlichen Zahlenreihe nach unendlich strebt. Von dieser unwesentlichen Beschränkung wollen wir absehen und k stetig nach unendlich wachsen lassen. Ferner wurde $\chi(u)$ bei *Hahn* als eine nicht-negative Funktion vorausgesetzt, eine Forderung, auf die man bei den von *Hahn* hier noch zu zitierenden Sätzen verzichten kann.

[9]) Hier und im folgenden soll $n = k$ bedeuten, daß in den betreffenden Ausdrücken an Stelle des diskreten Parameters n der stetig nach unendlich wachsende Parameter k zu setzen ist.

[10]) Wie oben sind auch die Sätze VII und VIII der Einfachheit halber für zwei Dimensionen formuliert worden. Aus ihren Beweisen ist aber ersichtlich, daß sich ohne neue Schwierigkeiten ähnliche Sätze auch für mehrere Dimensionen beweisen lassen.

α) Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, *die auf* R_l *zu* F_1 *gehört, und in* Q_0 *stetig ist und daselbst ein totales Differential oder eine H-Ableitung nach* ξ *besitzt, die Relationen* (3.3), (3.4) *mit* $n = k$ *gelten, ist hinreichend, daß* $p \geqq 1$ *ist*[11]).

β) Diese letzte Voraussetzung ist notwendig, wenn

$$u\,\omega'(u) \to 0 \qquad (u \to 0,\ u \not< \mathfrak{N}) \tag{6.2}$$

gilt, wobei u für Punkte einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ *außer acht gelassen wird.*

γ) Ersetzt man in α) die Klasse F_1 *durch die Klasse* F_2, *so ist (bereits)* $p > 0$ *hinreichend.*

δ) Es sei $\psi_0(u, k)$ *ein weiterer Einerkern auf (L) jedoch bloß vom Stieltjesschen Typus, der im einzelnen durch die Größen* C_0, p_0, α_0, χ_0, ω_0 *charakterisiert sei. — Unter den Voraussetzungen* $p_0 \geqq p$ *und* (6.2) *kann die Relation* (3.2) *mit* $\varphi = \psi_0$, $n = k$ *nicht für jede auf* R_l *stetige Funktion* $f(\xi, \eta)$ *gelten, die in* Q_0 *(bloß) eine O-Ableitung nach* ξ *besitzt.*

22. Folgerungen aus δ). Ist $f(\xi, \eta)$ nach einer beliebigen der beiden Variablen ξ, η O-differenzierbar in Q_0, und soll die entsprechende partielle Ableitung von f in Q_0 durch ein singuläres Integral mit einem Produktkern approximiert werden, der aus zwei *Stieltjes-Hahnschen* Einerkernen gebildet ist, für welche (6.2) gilt, so darf laut Satz δ) weder $p_0 \geqq p$ noch $p \geqq p_0$ sein. Es existiert also kein Produktkern mit der gewünschten Eigenschaft, womit die in Nummer 3 über *Stieltjessche* Kerne aufgestellte Behauptung im Fall $m = 2$ bewiesen ist. Für $m > 2$ ist aber jene Behauptung auch wahr. Andernfalls müßten zufolge des Satzes in Nummer 18 für die m *Hahn-Stieltjesschen* Einerkerne die Relationen (4.3) gelten. Die Unmöglichkeit dieser Ungleichungen wird aber gerade im Beweis zu Satz δ) erkannt werden.

23. Beim Beweis des Satzes VII wird das Verhalten der Integrale von der Gestalt

$$K_k(\beta, h, p, q) = \int_0^h u^q (1 - \beta\, u^p)^k\, du \qquad (\beta, h, p > 0;\ q > -1) \tag{6.3}$$

für $k \to \infty$ eine entscheidende Rolle spielen. Eine für unsere Zwecke ge-

[11]) Ein Beweis für die Behauptung *a*), soweit es sich um das *totale Differential* handelt, für den Fall $a = 1$, $p = 2$, $\omega(u) \equiv 0$, jedoch für *n* Variable, findet sich in *O. Haupt* und *G. Aumann* (I), pp. 164—169.

eignete asymptotische Auswertung ist bereits von *Hahn* vorgenommen worden. Nach *Hahn*[12]) gilt für $\beta h^p < 1$:

$$K_k(\beta, h, p, q) \sim C(p, q, \beta) \cdot k^{-\frac{q+1}{p}} \qquad (k \to \infty) \,, \tag{6.4}$$

wobei

$$C(p, q, \beta) = \frac{1}{p} \beta^{-\frac{q+1}{p}} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) \tag{6.5}$$

ist.

Dem Beweis unseres Satzes sei noch die Bemerkung vorausgeschickt, daß der Buchstabe C, mit diversen Indizes versehen, im folgenden ausschließlich für Größen benutzt wird, die bloß von gewissen Parametern, und zwar nur solchen abhängen können, welche im Laufe der Diskussion konstant gehalten werden.

§ 7. Beweis des Satzes VII: Behauptungen α) und β)

24. Beweis. Es wird genügen, unsere Behauptungen für den Fall zu beweisen, daß der Parameter k über eine beliebige Zahlenfolge $k_n > 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nach unendlich strebt.

Zunächst überzeugen wir uns, daß $\psi(u, k_n)$ wegen $\operatorname{Sup} |\chi(u)| < 1$ $(u \prec L^*)$ die Relation (2.1) mit $\varphi = \psi$ für jedes $p > 0$ erfüllt. $\psi(u, k_n)\, \psi(v, k_n)$ ist also ein symmetrischer Produktkern.

Behauptung α) wird bewiesen sein, wenn die Voraussetzungen des Satzes II für die Klasse F_1 als zutreffend erkannt sind. Mit den Voraussetzungen von Satz II treffen nämlich für den Kern auch die Voraussetzungen des Satzes IV zu, wie ein Vergleich der Sätze II und IV zeigt.

II a°) für F_1 ist erfüllt: In der Tat gilt fast überall

$$|\chi(u)|' = \chi'(u) \operatorname{sgn} \chi \qquad (u \prec L' \prec (L)) \tag{7.1}$$

und also unter Beachtung von (6.1)

$$|\psi'(u, k_n)| \leq C_1 k_n^{1+\frac{1}{p}} |\chi(u)|^{k_n - 1} \cdot |u|^{p-1} \qquad (u \prec L' \prec (L)) \,. \tag{7.2}$$

---

[12]) *H. Hahn* (I), pp. 628—629. An jener Stelle ist die Formel, die hier unter (6.4) steht, bloß für $q > 0$ angegeben. Sie gilt aber auch für alle $q > -1$, was aus der bekannten Formel

$$\int_0^1 t^x (1-t)^y \, dt = \frac{\Gamma(x+1)\, \Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \qquad (x > -1, \; y > -1)$$

analog wie bei *Hahn* folgt.

Daher gilt in jedem Rechteck $R' \prec (R_{2l}(O))$ mit Ausnahme einer Nullmenge $\mathfrak{N}_n$ für jedes k_n:

$$|\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)| \leqq C_2\, k_n^{1+\frac{2}{p}}\, |\chi(u)|^{k_n-1}\, |\chi(v)|^{k_n}\, |u|^{p-1} \qquad (P(u,v) \prec R') \,. \tag{7.3}$$

Ist $p \geqq 1$, so ist der letzte Ausdruck für $k_n \to \infty$ in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* \prec (R_{2l}(O))$ gleichmäßig beschränkt. Also ist II a°) für F_1 erfüllt. — Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß $p \geqq 1$ beim Beweis von α) nur an dieser Stelle benutzt wird.

Die Voraussetzungen II b$_1$) und II c) sind bereits von *Hahn*[13]) (bei der Behandlung des Problems in einer Dimension) für alle $p > 0$ als erfüllt nachgewiesen worden.

25. Wir weisen jetzt II b$_2$) nach. Wegen $\omega \to 0\,(u \to 0)$ kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h' > 0$ angeben, so daß für alle $u \prec \langle -h', h' \rangle$

$$0 < 1-(\alpha+\varepsilon)\,|u|^p < \chi(u) < 1-(\alpha-\varepsilon)\,|u|^p \quad (u \prec \langle -h', h' \rangle) \tag{7.4}$$

ist. Setzt man $\alpha - \varepsilon = \beta$, so gilt daher für $q \geqq 0$, $s \geqq 1$ und hinreichend kleine $h > 0$

$$\int_{-h}^{h} |u|^q\, |\chi(u)|^s\, du < 2 \int_0^h u^q (1 - \beta\, u^p)^s\, du \,.$$

Unter Beachtung von (7.3) ergibt sich daher

$$\int_{-h}^{h} |\psi'(u, k_n)|\, du \cdot \int_{-h}^{h} |v\psi(v, k_n)|\, dv \leqq$$

$$\leqq C_3\, k_n^{1+\frac{2}{p}} \int_0^h u^{p-1} (1-\beta u^p)^{k_n-1}\, du \cdot \int_0^h v (1-\beta v^p)^{k_n}\, dv \,,$$

und dies ist wegen (6.3), (6.4) für hinreichend kleine $h > 0$ äquivalent

$$C_4\, k_n^{1+\frac{2}{p}}\, (k_n - 1)^{-1}\, k_n^{-\frac{2}{p}} \sim C_4 \qquad (k_n \to \infty) \,.$$

Da C_4 eine von k_n unabhängige Konstante bedeutet, ist II b$_2$) erfüllt und damit auch die Behauptung α) bewiesen.

26. Die Behauptung β) beweisen wir, indem wir zeigen, daß der zu $\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)$ gehörige gelochte Kern auf $R' \prec (R_{2l}(O))$ für $p < 1$

[13]) *H. Hahn* (I), pp. 628—629, 631—632.

nicht fast beschränkt ist und also IIa°) für F_1 nicht erfüllt sein kann. In der Tat gilt, wie man leicht für $u \geqq 0$ und $u < 0$ verifiziert, fast überall

$$|\chi'(u)| = \alpha p\,|u|^{p-1} \left| 1 - \frac{\omega(u)}{\alpha} - \frac{\omega'(u)}{\alpha p} u \right| \qquad (u < L' < (L)),$$

und wegen (7.1) und (6.2) ist daher für hinreichend kleine $|u|$ fast überall

$$\big|\,|\chi(u)|'\,\big| = |\chi'(u)| > \frac{\alpha p}{2}\,|u|^{p-1} \qquad (u < \mathfrak{U}(O)), \tag{7.5}$$

wobei $\mathfrak{U}(O)$ eine gewisse Umgebung des Nullpunktes bezeichnet.

Sei $p < 1$. Wir wählen jetzt $h > 0$ so klein, daß neben (7.5) auch

$$|\chi(u)| = \chi(u) \geqq \tfrac{1}{2} \qquad (u < \langle -h, h\rangle) \tag{7.6}$$

gilt. Ferner sei R^* ein achsenparalleles Rechteck, welches in $(R_{2h}(O))$ gelegen ist, von der v-Achse halbiert wird und den Nullpunkt weder im Inneren noch auf dem Rande enthält. Wegen (7.5) und (7.6) kann man sodann für jedes n ein symmetrisch zur v-Achse liegendes, von n abhängiges Teilrechteck $R_n^* < R^*$ finden, für dessen Punkte — bis auf eine Nullmenge —

$$|\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)| \geqq C_5\, k^{1+\frac{2}{p}}\, |\chi(u)|^{k_n - 1}\, |\chi(v)|^{k_n} \cdot \frac{1}{|u|^{1-p}} \geqq k_n$$

ist. Daher kann $\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)$ auf R^* unmöglich fast beschränkt sein. Der dazugehörige gelochte Kern erfüllt also die Voraussetzung IIa°) für F_1 nicht. Damit ist Behauptung β) bewiesen.

§ 8. Fortsetzung des Beweises: Behauptungen γ) und δ)

27. Um γ) zu beweisen, braucht jetzt bloß noch unter der Voraussetzung $0 < p < 1$ die Eigenschaft IIa°) für F_2, d. h. die gleichgradige Totalstetigkeit des zu $\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)$ gehörigen gelochten Kerns auf $R' < (R_{2l}(O))$ nachgewiesen zu werden. Der Beweis wird erbracht sein, wenn gezeigt werden kann, daß für jedes Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält,

$$J_n \equiv \int_{R^*} |\psi'(u, k_n)\,\psi(v, k_n)|\, du\, dv \to 0 \qquad (k_n \to \infty)$$

gilt.

Seien a, b und c, d $(a<b, c<d)$ die u- bzw. v-Koordinaten der Eckpunkte von R^*. Wegen (7.2) ist

$$S_n \equiv \int_a^b |\psi'(u, k_n)|\, du \leqq C_1 \int_a^b k_n^{1+\frac{1}{p}} \, |u|^{p-1} \, |\chi(u)|^{k_n-1} du \equiv S_n^* \; .$$

Für $0 \not< \langle a, b\rangle$ strebt der Integrand des letzten Integrals mit $k_n \to \infty$ gleichmäßig nach 0. Also gilt

$$S_n^* \to 0\,, \quad S_n \to 0 \qquad (n \to \infty)\; . \tag{8.1}$$

Für $a \leqq 0 < b$ oder $a < 0 \leqq b$ ist wegen (7.4) für jedes hinreichend kleine $h > 0$ und ein geeignetes $\beta > 0$ unter Beachtung von (8.1)

$$S_n^* < S_n^{**} \equiv C_1 \, k_n^{1+\frac{1}{p}} \int_{-h\sigma_2}^{h\sigma_1} |u|^{p-1} \left(1-\beta |u|^p\right)^{k_n-1} du + \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \to 0, n \to \infty)\,,$$

wobei $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ oder $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ oder $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ ist und ε_n ein oder zwei Integrale vom Typus S_n^* darstellt. Mit Hilfe von (6.3), (6.4) erkennt man, daß für hinreichend kleine $h > 0$

$$S_n^{**} \sim C_6 \, k_n^{1+\frac{1}{p}} (k_n - 1)^{-1} \sim C_6 \, k_n^{\frac{1}{p}} \qquad (n \to \infty) \tag{8.2}$$

ist.

Andererseits setzen wir

$$T_n \equiv \int_c^d |\psi(v, k_n)|\, dv \begin{cases} = \eta_n & \text{für} \quad 0 < c < d \quad \text{oder} \quad c < d < 0 \\ = e_n & \text{für} \quad c < 0 \leqq d \quad \text{oder} \quad c \leqq 0 < d\,, \end{cases}$$

wobei im ersten Fall

$$\eta_n \leqq C \, k_n^{\frac{1}{p}} \, \vartheta^{k_n} \qquad (0 < \vartheta < 1\,; \;\; n = 1, 2, \ldots) \tag{8.3}$$

und im zweiten Fall wegen der Eins-Strebigkeit von ψ in O, der Positivität von ψ und (8.3)

$$0 < e_n < C_7 \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8.4}$$

gilt.

Falls jetzt R^* die v-Achse trifft, so gilt wegen (8.2) und (8.3)

$$J_n = S_n T_n < S_n^{**} \, T_n \sim C_6 \, k_n^{\frac{1}{p}} \, \eta_n \to 0 \qquad (n \to \infty) \;\; .$$

Trifft R^* jedoch die u-Achse, so gilt wegen (8.1) und (8.4)

$$J_n = S_n T_n = S_n e_n \to 0 \qquad (n \to \infty) .$$

Trifft R^* keine der beiden Achsen, so strebt J_n erst recht nach 0. Also gilt in jedem Fall $J_n \to 0$ $(n \to \infty)$, womit γ) bewiesen ist.

28. Wir wenden uns jetzt der Behauptung δ) zu und zeigen zunächst, daß es für deren Beweis genügt, die Bedingung c) von Satz V als nicht erfüllt nachzuweisen. Satz V bezieht sich auf Funktionen aus der Klasse F_1 bzw. F_2. Wir haben aber bereits in Nummer 1,55 darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung 1,VIIId), mit welcher ja Vc) äquivalent ist, für die Gültigkeit von (1; 10.2) notwendig ist, sogar wenn an die Stelle von F_i $(i = 1, 2)$ bloß die Klasse der auf R_i durchweg stetigen Funktionen zur Konkurrenz zugelassen wird.

Ferner beachte man, daß auf Grund der Anmerkung in Nummer 14 die Voraussetzung Vc) auch im Falle von nicht geraden Glockenkernen notwendig ist.

Da in jedem Intervall $L^* \prec (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält, $\operatorname{Sup} |\chi| < 1$, $\operatorname{Sup} |\chi_0| < 1$ gilt, ist (2.1) für unsere Einerkerne ψ, ψ_0 erfüllt. Somit ist $\psi(u, k_n)\, \psi_0(v, k_n)$ ein Produktkern auf $\big(R_{2i}(O)\big)$. Nach Definition ist $\psi > 0$, $\psi_0 > 0$, und wir haben bloß noch nachzuweisen, daß ψ in $\mathfrak{U}(O)$ ein Glockenkern ist.

In der Tat gilt, wie man für $u \geqq 0$ und $u < 0$ sofort verifiziert, fast überall in $L' \prec (L)$:

$$u\psi'(u, k_n) = -C \alpha p k_n^{1+\frac{1}{p}} |\chi(u)|^{k_n - 1} |u|^p \left(1 - \frac{\omega}{\alpha} - \frac{u\omega'}{\alpha p}\right).$$

Dies ist aber in $\mathfrak{U}(O)$ wegen (6.2) sicherlich bis auf eine Nullmenge nicht positiv. Also ist $\psi(u, k_n)$ in $\mathfrak{U}(O)$ ein positiver Glockenkern.

29. Wir zeigen jetzt, daß Vc) nicht zutrifft. Zu diesem Zweck bilden wir für ein kleines $h > 0$ den Ausdruck E_n:

$$E_n = C C_0 k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} \int_0^h \{ |\chi_0(u)|^{k_n} - |\chi(u)\, \chi_0(u)|^{k_n} \} \, du =$$

$$= C C_0 k_n^{\frac{1}{p} + \frac{1}{p_0}} \int_0^h \{ |1 - \alpha_0 u^{p_0} + \omega_0 u^{p_0}|^{k_n} - |1 - (\alpha + \alpha_0 u^{p_0 - p}) u^p + \Omega(u) u^p|^{k_n} \} \, du . \tag{8.5}$$

Wegen $p_0 \geqq p$ gilt $\Omega(u) \to 0$ $(u \to 0)$.

Zunächst behandeln wir den Fall $p_0 > p$. Es sei ein positives $\varepsilon < \alpha$ vorgegeben. Sodann wähle man ein $h > 0$ so klein, daß

$$E_n \geqq C C_0 k_n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p_0}} \left\{ \int_0^h (1-(\alpha_0+\varepsilon)\, u^{p_0})^{k_n} du - \int_0^h (1-(\alpha-\varepsilon)\, u^p)^{k_n} du \right\}$$

ist. Die Produkte dieser beiden Integrale mit $k_n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p_0}}$ sind zufolge (6.3), (6.4) äquivalent

$$C_8 k_n^{\frac{1}{p}} \qquad \text{bzw.} \qquad C_9 k_n^{\frac{1}{p_0}} \qquad (C_8\,,\ C_9 > 0\,,\ n \to \infty)\ .$$

Da unter der Annahme $p_0 > p$ diese Ausdrücke für $n \to \infty$ einander nicht äquivalent sind und ihre Differenz nach unendlich strebt, folgt $E_n \to \infty$ $(n \to \infty)$.

Ist hingegen $p_0 = p$, so wähle man $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\alpha + \alpha_0 - \varepsilon > 0$ und

$$\frac{1}{(\alpha_0+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} > \frac{1}{(\alpha+\alpha_0-\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \tag{8.6}$$

ist. Dann folgt für jedes hinreichend kleine $h > 0$ aus (8.5) für $p_0 = p$:

$$E_n \geqq C C_0 k_n^{\frac{2}{p}} \left\{ \int_0^h (1-(\alpha_0+\varepsilon)\, u^p)^{k_n} du - \int_0^h (1-(\alpha+\alpha_0-\varepsilon)\, u^p)^{k_n} du \right\}.$$

Die Produkte dieser beiden Integrale mit $k_n^{\frac{2}{p}}$ sind vermöge (6.3), (6.4), (6.5) äquivalent

$$C C_0 \frac{1}{(\alpha_0+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{p} \Gamma\!\left(\frac{1}{p}\right) k_n^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad C C_0 \frac{1}{(\alpha+\alpha_0-\varepsilon)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{p} \Gamma\!\left(\frac{1}{p}\right) k_n^{\frac{1}{p}}$$
$$(n \to \infty).$$

Diese Ausdrücke sind für $n \to \infty$ wegen (8.6) einander nicht äquivalent, und da ihre Differenz nach unendlich strebt, folgt wiederum $E_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. — Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

30. Anmerkung. *Sämtliche Behauptungen des Satzes VII lassen sich aufrecht erhalten, wenn* (3.4) *bzw.* (3.2) *unter Vertauschung von Integration und Differentiation angesetzt wird.*

Für den Beweis ziehen wir die im ersten Teil in § 13 aufgestellten Vertauschbarkeitskriterien heran. Bezeichnet ψ_0 einen beliebigen *Stieltjesschen* und ψ einen beliebigen *Stieltjes-Hahnschen* Einerkern auf (L), so folgt unter Benutzung von (7.2) für fast alle Punkte irgendeines Rechtecks $R' \prec (R_{2l}(O))$

$$|\psi'(u, k_n)\, \psi_0(v, k_n)| \leqq C_1 C_0 k_n^{1+\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p}} |\chi(u)|^{k_n - 1} |\chi_0(v)|^{k_n} |u|^{p-1} .$$

Zu jedem Wertepaar $p, p_0 > 0$ und jedem Index n existiert eine Größe C_n, so daß der letzte Ausdruck überall auf R' kleiner ist als C_n für $p \geqq 1$ und kleiner als $C_n\,|\,u\,|^{p-1}$ für $0 < p < 1$. Daher ist im ersten dieser beiden Fälle (1 ; 13.2) und im zweiten (1 ; 13.9) mit $\Phi'_u(u, v ; n) = \psi'(u, k_n)\, \psi_0(v, k_n)$ fast überall auf $R' \prec (R_{2l}(O))$ erfüllt. Auf Grund der Kriterien I und II in den Nummern 58 und 61 des ersten Teils erkennt man jetzt die Richtigkeit obiger Behauptung für jeden der Teilsätze VII α) bis δ).

§ 9. Produktkerne vom Poisson-Hahnschen Typus

31. Als *Poissonsche* Einerkerne bezeichnen wir mit *Hahn* Einerkerne von folgendem Typus: Es sei für jeden Parameterwert $k \geqq 1$

$$\psi(u, k) = C k^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1 + k\tau(u)} ,$$

$$C = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Omega(p)} , \qquad \alpha > 0 , \qquad p > 1 , \qquad \Omega(p) = \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^p} ,$$

$$\tau(u) = \alpha\,|\,u\,|^p + \omega(u)\,|\,u\,|^p , \qquad u \prec (-l, l) \equiv (L) ,$$

$$\lim_{u \to 0} \omega(u) = 0 .$$

ω sei meßbar auf L, und es gelte in jedem Teilintervall $L^* \prec (L)$, das den Nullpunkt nicht enthält

$$\operatorname{Inf} \tau(u) > 0 \text{ [14])} .$$

Hahn [14]) hat insbesondere gezeigt, daß für jede Funktion $f(\xi)$ $(\xi \prec (L))$ aus der Klasse F_1 in jedem Stetigkeitspunkt die Relation (1 ; 1.1) mit $J = L$ und dem *Poissonschen* Einerkern $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$ gilt.

---

[14]) *H. Hahn* (I), pp. 647—655.

Ist $\psi(u, k)$ ein *Poissonscher* Einerkern, für welchen in jedem (abgeschlossenen) Intervall $L' \prec (L)$ die Funktion $\tau(u)$ totalstetig ist und fast überall der Ungleichung

$$|\tau'(u)| < A\,|u|^{p-1} \qquad (u \prec L', \quad A = \text{Const.}) \tag{9.1}$$

genügt, so wollen wir ψ einen *Poisson-Hahnschen* Einerkern nennen.

Für einen Einerkern letzterer Art gelten nach *Hahn*[14]) insbesondere die Relationen (1 ; 1.2) mit $K = \psi(\xi - x, k)$, $n = k$, $J = L$, $s = 1$ in jedem Punkt $x \prec (L)$ einer beliebigen Funktion $f(\xi)$, die auf L zu F_1 gehört und für $\xi = x$ differenzierbar ist.

32. Es seien jetzt mit ψ_1, ψ_2 *Poissonsche* Einerkerne bezeichnet, zu welchen bzw. die Größen C_i, p_i, $\tau_i(u)$, α_i, $\omega_i(u)$ $(i = 1, 2)$ gehören mögen. Im Falle von zwei Variablen wollen wir nunmehr als Beispiel zu den Sätzen I, III, V über beliebige (nicht notwendig symmetrische) Produktkerne den folgenden Satz beweisen:

Satz VIII. *Es sei $\psi_2(v, k)$ ein Poissonscher und $\psi_1(u, k)$ ein Hahn-Poissonscher Einerkern auf (L). $Q_0(x, y)$ bezeichne einen beliebigen aber festen Punkt aus dem Inneren eines vorgegebenen Quadrates R_l der $\xi\eta$-Ebene.*

α) *Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i $(i = 1, 2)$ gehört und in Q_0 ein totales Differential besitzt, die Relationen* (3.1), (3.2) *mit $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$, $n = k$ gelten, ist hinreichend:*

A] *für F_1: Es ist $p_1 \geqq p_2$ und* $\dfrac{2}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} \leqq 1$;

B] *für F_2: Es ist $p_1 \geqq p_2$ und* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} < 1$.

β) *Die beiden Voraussetzungen A] bzw. B] sind notwendig, wenn*

$$u\,\omega_1'(u) \to 0 \qquad (u \to 0, \quad u \not\prec \mathfrak{N}) \tag{9.2}$$

gilt, wobei u für Punkte einer Nullmenge $\mathfrak{N}$ außer acht gelassen wird.

γ) *Damit für jede Funktion $f(\xi, \eta)$, die auf R_l zu F_i $(i = 1, 2)$ gehört und in Q_0 stetig und H-differenzierbar nach ξ ist, die Relationen* (3.1), (3.2) *mit $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$, $n = k$ gelten, ist unter der Annahme* (9.2) *notwendig und hinreichend, daß $\dfrac{2}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} \leqq 1$ im Falle von F_1 und $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} < 1$ im Falle von F_2 ist.*

δ) *Damit für jede Funktion* $f(\xi, \eta)$, *die auf* R_l *zu* F_i $(i = 1, 2)$ *gehört und in* Q_0 *stetig und O-differenzierbar nach* ξ *ist, die Relationen* (3.1), (3.2) *mit* $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$, $n = k$ *gelten, ist unter den Annahmen* $\omega_i(u) = \omega_i(-u)$ $\left(u \prec \mathfrak{U}(O);\ i = 1, 2\right)$ *und* (9.2) *notwendig und hinreichend:*

C] *für* F_1: *Es gilt* $\dfrac{2}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} \leqq 1$ *und* $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$;

D] *für* F_2: *Es gilt* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} < 1$ *und* $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$.

Zusatz zu δ). *Die Voraussetzung* $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$ *ist auch notwendig, wenn* $\omega_i(u) \neq \omega_i(-u)$ *ist und wenn an die Stelle von* F_i $(i = 1, 2)$ *die Klasse der auf* R_l *stetigen Funktionen tritt.*

33. Vorgängig dem Beweis des Satzes VIII sollen in dieser und der nächsten Nummer einige darin oft vorkommende Integrale abgeschätzt werden. Dabei werden wir immer wieder Integrale von der Gestalt

$$J = \int\limits_0^h \frac{u^q}{(1 + k\beta u^p)^m}\, du \tag{9.3}$$

vermöge der Substitution $z = 1 + k\beta u^p$ überführen in

$$J = \frac{C}{k^{\frac{q+1}{p}}} \int\limits_1^{1+k\beta h^p} \frac{(z-1)^{\frac{q}{p} + \frac{1}{p} - 1}}{z^m}\, dz \qquad (C > 0)\,. \tag{9.4}$$

Allgemein werden hier und im folgenden mit C, C_1', C_2''' usw. Größen bezeichnet, die nur von Parametern abhängen, welche im Laufe unserer Diskussion konstant gehalten werden. Insbesondere seien diese Größen stets von den mit h und k bezeichneten Parametern unabhängig.

34. Zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ existiert ein $h' > 0$, so daß für alle $u \prec \langle -h', h' \rangle$ und alle $k \geqq 1$

$$\frac{1}{1 + k(\alpha_i + \varepsilon)\,|u|^{p_i}} < \frac{1}{1 + k\tau_i(u)} < \frac{1}{1 + k(\alpha_i - \varepsilon)\,|u|^{p_i}}$$
$$\left(u \prec \langle -h', h' \rangle;\ i = 1, 2\right) \tag{9.5}$$

gilt. Daher ist für alle hinreichend kleinen $h > 0$

$$J_1 = \int_{-h}^{h} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k\tau_1(u))^2}\,du \gtrless 2\int_0^h \frac{u^{p_1-1}}{(1+k\beta u^{p_1})^2}\,du \ ,$$

worin $\gtrless$ bedeuten soll, daß für eine geeignete Konstante $\beta > 0$ das obere und für eine andere Konstante $\beta > 0$ das untere Zeichen für alle $k \geqq 1$ gilt. Unter Benutzung von (9.3), (9.4) ergibt sich daher für geeignete Konstanten C_1'

$$J_1 \gtrless \frac{C_1'}{k} \int_1^{1+k\beta h^{p_1}} \frac{dz}{z^2} = \frac{C_1'}{k}\, g(h,k)\ ,\quad g(h,k) = \frac{k\beta h^{p_1}}{1+k\beta h^{p_1}}\ ,$$

wobei $g(h,k)$ für $h > 0$, $k \geqq 1$ positiv und < 1 ist. Wir notieren noch, daß für jedes feste $h > 0$

$$\lim_{k\to\infty} g(h,k) = 1 \tag{9.6}$$

gilt.

Es seien wiederum $\varepsilon > 0$ und $h'(\varepsilon) \equiv h'$ so gewählt, daß (9.5) gilt. Mit Hilfe obiger Substitution und unter Verwendung geeigneter Konstanten erhält man sodann für irgendein $h \prec (0, h')$:

$$J_2 = \int_{-h}^{h} \frac{|v|}{1+k\tau_2(v)}\,dv \gtrless 2\int_0^h \frac{v}{1+k\beta v^{p_2}}\,dv = C_2' k^{-\frac{2}{p_2}} \int_1^{1+k\beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{2}{p_2}-1}}{z}\,dz =$$

$$= C_2'' k^{-\frac{2}{p_2}} + C_2' k^{-\frac{2}{p_2}} \int_2^{1+k\beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{2}{p_2}-1}}{z}\,dz\ . \tag{9.7}$$

Wir schätzen J_2 zuerst nach unten ab und erhalten für ein gewisses C_2'' und alle $k > k_1(h) \equiv \beta^{-1} h^{-p_2}$:

$$0 < C_2'' k^{-\frac{2}{p_2}} < J_2 \qquad (k > k_1(h))\ . \tag{9.8}$$

Eine Abschätzung nach oben führen wir für $k \leqq k_1$ und $k > k_1$ getrennt durch. Im ersten Fall ist $J_2 < C_2'' k^{-\frac{2}{p_2}}$ für ein passendes C_2'', und im zweiten ist der Ausdruck (9.7) kleiner als

$$k^{-\frac{2}{p_2}}\left(C_2'' + C_2' \int_2^{1+k\beta h^{p_2}} (z-1)^{\frac{2}{p_2}-2}\,dz\right) = \begin{cases} k^{-\frac{2}{p_2}}\left(C_2^{(3)} + s_1(h)\,k^{\frac{2}{p_2}-1}\right) & \text{für } p_2 \neq 2 \\ k^{-1}\left(s_2(h) + C_2' \lg k\right) & \text{für } p_2 = 2 \end{cases}$$

Somit ergibt sich als eine obere Schranke von J_2 für jedes $h < (0, h')$ und alle $k \geqq 1$

$$J_2 < A \cdot \operatorname{Max}\left(\frac{1}{k^\gamma}, \frac{1}{k^{\frac{2}{p_2}}}\right).$$

Hierin bedeutet γ eine beliebige Zahl aus dem Intervall $(0, 1)$ und A eine Größe, die von ε, h und p_2 abhängt.

Analog erhält man, wieder unter Verwendung von (9.3), (9.4) für alle $p_1 > 1$:

$$J_3 = \int_{-h}^{h} \frac{|u|^{p_1}}{(1 + k\tau_1(u))^2}\, du < 2 \int_0^h \frac{u^{p_1}}{(1 + k\beta u^{p_1})^2}\, du =$$

$$= \frac{C_3}{k^{1+\frac{1}{p_1}}} \int_1^{1+k\beta h^{p_1}} \frac{(z-1)^{\frac{1}{p_1}}}{z^2}\, dz < \frac{C_3'}{k^{1+\frac{1}{p_1}}}$$

und für alle $p_2 > 1$:

$$J_4 = \int_{-h}^{h} \frac{dv}{1 + k\tau_2(v)} < 2 \int_0^h \frac{dv}{1 + k\beta v^{p_2}} = \frac{C_4}{k^{\frac{1}{p_2}}} \int_1^{1+k\beta h^{p_2}} \frac{(z-1)^{\frac{1}{p_2}-1}}{z}\, dz < \frac{C_4'}{k^{\frac{1}{p_2}}}.$$

Bezeichnen schließlich c, d Größen, für welche $|c|, |d| < l$, $0 \not< \langle c, d\rangle$ ist, so gilt, wie man sich an Hand der Definition von $\tau_2(v)$ direkt überlegt:

$$J_5 = \int_c^d \frac{dv}{1 + k\tau_2(v)} \gtrless \frac{C_5}{k} > 0. \text{ —}$$

§ 10. Beweis des Satzes VIII, erste Hälfte

35. Wieder wird es genügen, unsere Behauptungen für den Fall zu beweisen, daß k über eine beliebige Zahlenfolge $k_n \geqq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ nach unendlich strebt.

Aus den Voraussetzungen in α), γ) oder δ) für irgendeine der Funktionsklassen F_i $(i = 1, 2)$ folgt, daß in jedem dieser Fälle $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ gilt. Daher gilt gleichmäßig in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* < (R_{2l}(O))$:

$$\psi_1(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n) = C^* k_n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{1}{1 + k_n\tau_1(u)} \cdot \frac{1}{1 + k_n\tau_2(v)} \Longrightarrow 0 \quad (k_n \to \infty).$$

(2.1) ist also für $\psi=\psi_1$ und $\varphi=\psi_2$ erfüllt, und somit ist $\psi_1(u,k_n)\psi_2(v,k_n)$ ein Produktkern auf $\bigl(R_{2l}(O)\bigr)$.

36. Beweis der Behauptungen α) und β). Um Satz I für den Beweis von α) anwenden zu können, werden jetzt die Voraussetzungen dieses Satzes unter den Annahmen von α) als erfüllt nachgewiesen.

Wir beginnen mit I a°) für F_1 und haben also zu zeigen, daß der zu $\psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n)$ gehörige gelochte Kern auf jedem Rechteck $R' \prec \bigl(R_{2l}(O)\bigr)$ fast beschränkt ist, oder — was dasselbe bedeutet — daß $\psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n)$ diese Eigenschaft auf jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Rechteck $R^* \prec \bigl(R_{2l}(O)\bigr)$ besitzt. Für $\psi_1(u, k_n)$ ergibt sich mit Hilfe von (9.1) die fast überall in $L' \prec (L)$ gültige Abschätzung

$$|\psi_1'(u, k_n)| = C_1 k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|\tau_1'(u)|}{\bigl(1+k_n \tau_1(u)\bigr)^2} < C_1'' k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \tau_1(u))^2} .$$

Daher gilt für jedes Rechteck $R' \prec \bigl(R_{2l}(O)\bigr)$ fast überall

$$|\psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n)| < C_0 k_n^{1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \tau_1(u))^2} \cdot \frac{1}{1+k_n \tau_2(v)} (k_n \geqq 1) . \tag{10.1}$$

Der letzte Ausdruck ist wegen $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<1$ gleichmäßig beschränkt für alle $k_n \geqq 1$ und alle Punkte jedes Rechtecks $R^* \prec \bigl(R_{2l}(O)\bigr)$, das die v-Achse nicht trifft. Also ist fast überall

$$|\psi_1'(u,k_n)\psi_2(v,k_n)| < C_0' \quad \bigl(P(u,v) \prec R^*,\ P(0,v) \not\prec R^*,\ k_n \geqq 1\bigr). \tag{10.2}$$

Wir dürfen uns daher auf Rechtecke R_0^* beschränken, deren Ecken die Koordinaten

$$(-h, a),\ (h, a),\ (h, b),\ (-h, b) \quad \bigl(0 \not\prec \langle a, b\rangle;\ |a|, |b| < l\bigr) \tag{10.3}$$

für ein kleines $h>0$ besitzen. In einem derartigen Rechteck ist die rechte Seite von (10.1) kleiner als

$$C_0'' k_n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \beta\, |u|^{p_1})^2} \tag{10.4}$$

für geeignete Konstanten $\beta, C_0''>0$. Durch Nullsetzen der Ableitung dieses Ausdrucks nach $|u|$ erhält man für $|u|^{p_1}$ den einzigen von 0 verschiedenen Wert $C_0^{(3)} k_n^{-1}$, durch den die Ableitung selbst fallend hindurchgeht, so daß diesem Wert das absolute Maximum des Bruchfaktors in (10.4) entspricht. Der Wert des Maximums von (10.4) ergibt sich daher zu

$$C_0^{(4)} k_n^{\frac{2}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1}, \tag{10.5}$$

und dies ist wegen der zweiten Voraussetzung A] gleichmäßig beschränkt für alle $k_n \geqq 1$. Daher ist die linke Seite von (10.1) auf R_0^* fast beschränkt, und damit ist bewiesen, daß I a°) für F_1 zutrifft.

37. Wir schließen hier gleich den Beweis der Behauptung in β) an, daß im Falle von F_1 die zweite Voraussetzung A] notwendig ist.

Es gilt fast überall in $L' \prec (L)$, wie man für $u \geqq 0$ und $u < 0$ leicht verifiziert:

$$|\tau_1'(u)| = \alpha_1 p_1 |u|^{p_1-1} \left| 1 + \frac{\omega_1(u)}{\alpha_1} + \frac{\omega_1'(u)}{\alpha_1 p_1} u \right| .$$

Unter Benutzung von (9.2) folgt hieraus, daß in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes fast überall

$$|\tau_1'(u)| > \frac{\alpha_1 p_1}{2} |u|^{p_1-1}$$

ist. Daher gilt fast überall in einem Rechteck R_0^* von der Gestalt (10.3) mit hinreichend kleinem $h > 0$:

$$|\psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n)| > C_0^{(5)} k_n^{1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{|u|^{p_1-1}}{(1+k_n \tau_1(u))^2} \cdot \frac{1}{1+k_n \tau_2(v)} \quad (k_n \geqq 1), \tag{10.6}$$

wobei $C_0^{(5)}$ eine von h unabhängige Konstante ist. Dabei mögen für R_0^* die Größen $|a|$ und $|b|$ von vornherein so klein angenommen werden, daß $|\tau_2(v)| <$ const. für $v \prec \langle a, b \rangle$ gilt. Für geeignete $\beta, C_0'' > 0$ ist sodann (10.4) auf R_0^* kleiner als der letzte Ausdruck, und für eine geeignete Konstante $C_0^{(4)}$ stellt (10.5) wieder das Maximum der bei konstant gehaltenem k_n stetigen Funktion (10.4) in $|u|$ dar. Unter der Voraussetzung $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$ wächst aber dieses Maximum mit $k_n \to \infty$ über alle Grenzen, so daß also $|\psi_1' \psi_2|$ auf R_0^* nicht gleichmäßig für fast alle Punkte und alle $k_n \geqq 1$ beschränkt sein kann. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der zweiten Voraussetzung in A].

38. Wir beweisen jetzt, daß $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ für das Zutreffen von I a°) für F_2 hinreichend und notwendig ist. I a°) für F_2 ist mit der Forderung gleichbedeutend, daß $\int | \psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n) |\, dP$ gleichgradig totalstetig ist auf jedem Rechteck $R^* \prec (R_{2l}(O))$, das den Nullpunkt nicht enthält. Diese Eigenschaft ist wegen (10.2) sicher auf jedem Rechteck $R^* \prec (R_{2l}(O))$ erfüllt, das die v-Achse nicht trifft. Wir können uns daher von vornherein auf das Rechteck R_0^* von der Gestalt (10.3) beschränken. Unsere Voraussetzungen sind also als hinreichend erkannt, wenn wir zeigen können, daß zu jedem $\mu > 0$ ein $k(h, \mu)$ existiert, so daß für alle $k_n > k(h, \mu)$

$$G_h \equiv \int_{R_0^*} | \psi_1'(u, k_n)\, \psi_2(v, k_n) |\, du\, dv < \mu \qquad (k_n > k(h, \mu)) \qquad (10.7)$$

gilt.

Ein Blick auf (10.1) lehrt, daß

$$G_h < C_0\, k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1\, J_5$$

ist, so daß man unter Berücksichtigung der in Nummer 34 für J_1, J_5 gefundenen Abschätzungen

$$G_h < C_0\, C_1'\, C_5\, g(h, k_n)\, k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}\, k_n^{-2} \qquad (k_n \geqq 1)$$

erhält. Wegen $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ und der gleichmäßigen Beschränktheit von $g(h, k_n)$ folgt $G_h \to 0$ $(k_n \to \infty)$, womit (10.7) bewiesen ist.

39. Um die Notwendigkeit der Bedingung $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ zu beweisen, werden wir unter der Annahme $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geqq 1$ zeigen, daß es ein $\mu > 0$ und Rechtecke R_0^* beliebig kleinen Inhaltes gibt, für welche (10.7) nicht erfüllt ist. Zu diesem Zweck mögen die Koordinaten a, b in (10.3) konstant gehalten werden, während wir h nach 0 abnehmen lassen.

Wegen (10.6) ist

$$G_h > C_0^{(5)}\, k^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1\, J_5 > C_0^{(5)}\, C_1'\, C_5\, g(h, k_n)\, k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1} \qquad (k_n \geqq 1)\,,$$

und zufolge (9.6) existiert eine von h abhängige Größe $k_0(h)$, so daß man unter Beachtung von $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1 \geqq 0$ für alle $k_n > k_0$

$$G_h > \frac{C_0^{(5)} C_1' C_5}{2} \qquad (k_n > k_0(h))$$

erhält. Für $\mu = \frac{1}{2} C_0^{(5)} C_1' C_5$ ist (10.7) nicht erfüllt, wie klein auch $h > 0$ gewählt wurde. Also ist $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$ eine notwendige Bedingung.

Das Erfülltsein von I c_1) und c_2) für $\varrho = 1$ und $p_i > 1$ $(i = 1, 2)$ ist bereits von *Hahn*[15]) (bei der Diskussion des eindimensionalen Problems) nachgewiesen worden.

40. Wir beweisen nunmehr das Zutreffen von I b_1) und b_2). Unter Beachtung von (10.1) erhält man für alle $k_n \geqq 1$

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} |u \psi_1'(u, k_n) \psi_2(v, k_n)| \, du \, dv < C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_3 J_4 \quad (k_n \geqq 1) ,$$

und dies ist für $k_n \to \infty$ beschränkt. — Andererseits erhält man wieder wegen (10.1) für alle $k_n \geqq 1$

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} |\psi_1'(u, k_n) \, v \psi_2(v, k_n)| \, du \, dv < C_0 k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_2 <$$

$$< k_n^{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} C_0 C_1' g(h, k_n) A \cdot \operatorname{Max} \left(\frac{1}{k_n^{\gamma}}, \frac{1}{k_n^{\frac{2}{p_2}}} \right) \qquad (k_n \geqq 1) .$$

Wählt man jetzt γ so, daß $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < \gamma < 1$ ist, so ist der letzte Ausdruck wegen (9.6) und $p_1 \geqq p_2$ beschränkt, gleichmäßig für alle $k_n \geqq 1$. Damit ist I b_1) und b_2), und somit auch Behauptung α) unseres Satzes bewiesen. — Wir wollen noch bemerken, daß hier beim Nachweis von I b_2) zum erstenmal $p_1 \geqq p_2$ benötigt wurde.

41. Behauptung β) wird vollständig bewiesen sein, wenn noch die Notwendigkeit der Bedingung $p_1 \geqq p_2$ erkannt ist. Da (10.6) auch auf einem Quadrat $R_{2h}(O)$ mit einem hinreichend kleinen $h > 0$ richtig ist, erhält man unter Beachtung von (9.8):

$$\int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} |\psi_1'(u, k_n) \, v \psi_2(v, k_n)| \, du \, dv > C_0^{(5)} k_n^{1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} J_1 J_2 > C_0^{(6)} g(h, k_n) \, k_n^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} > 0$$
$$(k_n > k_1) .$$

Für $k_n \to \infty$ gilt $g(h, k_n) \to 1$, und somit strebt der ganze Ausdruck nach unendlich, so daß I b_2) nicht gelten könnte.

---

[15]) *H. Hahn* (I), pp. 647—649.

§ 11. Beweis des Satzes VIII, zweite Hälfte

42. Beweis der Behauptungen γ) und δ). Für den Beweis von γ) haben wir uns auf Satz III zu beziehen. Da im obigen I a°), b_1), c_1), c_2) als zutreffend befunden wurden, und zwar ohne Benutzung der Voraussetzung $p_1 \geqq p_2$ und da andererseits, wie gezeigt wurde, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < 1$, $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqq 1$ für die Gültigkeit von I a°) im Falle von F_1 bzw. F_2 notwendig ist, ist Behauptung γ) somit bewiesen.

Um δ) zu beweisen, haben wir Satz V anzuwenden. Zunächst wollen wir feststellen, daß (4.1), (4.2) für ψ_2 bzw. ψ_1 erfüllt ist. Die Geradheit dieser Einerkerne in $\mathfrak{U}(O)$ haben wir vorausgesetzt. Nach Definition ist $\psi_2 \geqq 0$.

Andererseits gilt fast überall in $L' \prec (L)$, wie man für $u \geqq 0$ und $u < 0$ verifiziert:

$$u\, \psi_1'(u, k_n) = -C_1 \alpha_1 p_1 k_n^{1+\frac{1}{p_1}} \frac{|u|^{p_1}}{(1 + k_n \tau_1(u))^2} \left(1 + \frac{\omega_1}{\alpha} + \frac{\omega_1'}{\alpha p} u\right),$$

und dies ist fast überall in $\mathfrak{U}(O)$ wegen (9.2) nicht positiv. ψ_2 ist also in $\mathfrak{U}(O)$ positiv und gerade und ψ_1 ein gerader Glockenkern, wie in Satz V verlangt wird.

43. Daß V a°) für F_1 und F_2 sowie V b_1) und b_2) zutreffen, wurde bereits unter α) bewiesen. Wir haben dort allerdings $p_1 \geqq p_2$ vorausgesetzt, eine Relation, die jetzt aus der zweiten Voraussetzung in C] bzw. D] folgt. Es ist also noch V c) nachzuweisen, wozu wir das Konvergenzverhalten von

$$E_n = \int_0^h \psi_2(u, k_n) \left[\psi_1(0, k_n) - \psi_1(u, k_n)\right] du$$

zu untersuchen haben.

Es gilt

$$\psi_1(0, k_n)\, \psi_2(u, k_n) - \psi_1(u, k_n)\, \psi_2(u, k_n) =$$

$$= C^* k_n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \left\{\frac{1}{1 + k_n \tau_2} - \frac{1}{(1 + k_n \tau_1)(1 + k_n \tau_2)}\right\} =$$

$$= C^* k_n^{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \frac{k_n \tau_1}{(1 + k_n \tau_1)(1 + k_n \tau_2)}.$$

Wir wählen jetzt ein $\varepsilon > 0$. Dann kann für hinreichend kleine $h > 0$ vermöge (9.5) stets erreicht werden, daß E_n für gewisse positive Konstanten β_1, β_2, C_6 größer bzw. für andere positive Konstanten β_1, β_2, C_6 kleiner ist als

$$C_6\, k_n^{1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}} \int\limits_0^h \frac{u^{p_1}}{(1+k_n\beta_1 u^{p_1})\,(1+k_n\beta_2 u^{p_2})}\, du \, .$$

Die Substitution

$$z = k_n u^{p_1}\,, \qquad u = z^{\frac{1}{p_1}}\, k_n^{-\frac{1}{p_1}}\,, \qquad du = \frac{1}{p_1}\, z^{\frac{1}{p_1}-1}\, k_n^{-\frac{1}{p_1}}\, dz$$

führt diesen Ausdruck über in

$$C_6'\, k_n^{\frac{1}{p_2}} \int\limits_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1+\beta_1 z)\left(1+\beta_2 k_n^{1-\frac{p_2}{p_1}} z^{\frac{p_2}{p_1}}\right)}\, dz\,,$$

so daß wir schreiben können:

$$E_n \gtrless C_6'\, k_n^{\frac{1}{p_2}+\frac{p_2}{p_1}-1} \int\limits_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1+\beta_1 z)\left(k_n^{\frac{p_2}{p_1}-1}+\beta_2 z^{\frac{p_2}{p_1}}\right)}\, dz\,. \tag{11.1}$$

Das letzte Integral ist kleiner als

$$S_n = \int\limits_0^{k_n h^{p_1}} \frac{1}{\beta_2 (1+\beta_1 z)\, z^{\frac{p_2-1}{p_1}}}\, dz\,.$$

Aus $\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$ folgt erstens, daß $0 < \dfrac{p_2-1}{p_1} < 1$ gilt und also S_n beschränkt ist für $k_n \to \infty$, und zweitens, daß daher die rechte Seite von (11.1) ebenfalls beschränkt ist für $k_n \to \infty$. Die Voraussetzungen in δ) sind also für die Behauptung δ) hinreichend.

44. Die Notwendigkeit der ersten Bedingung in C] bzw. D] für die Gültigkeit von Va°) ist bereits unter β) bewiesen worden. — Wäre die zweite Bedingung C] bzw. D] nicht erfüllt und also $\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{p_2}{p_1} > 1$, so betrachte man zunächst den Fall $p_1 \geqq p_2$. Unter dieser Annahme ist der Wert des Integrals in (11.1) größer als

$$T_n = \int\limits_0^{k_n h^{p_1}} \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{(1+\beta_1 z)\left(C_7 + \beta_2 z^{\frac{p_2}{p_1}}\right)}\, dz\,.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} T_n \neq 0$ ist, divergiert die rechte Seite von (11.1) nach unendlich und daher für geeignete Konstanten auch E_n, so daß Vc) nicht erfüllt sein kann.

Sei endlich $p_2 > p_1$. Das Integral in (11.1) ist jetzt für hinreichend große k_n größer als

$$C_8 \int\limits_1^2 \frac{z^{\frac{1}{p_1}}}{k_n^{\frac{p_2}{p_1}-1}}\, dz = \frac{C_8'}{k_n^{\frac{p_2}{p_1}-1}}\,,$$

und daher ist die rechte Seite von (11.1) und somit für geeignete Konstanten auch E_n wenigstens wie Const. $\cdot\, k_n^{\frac{1}{p_2}}$ divergent. Wieder könnte Vc) nicht erfüllt sein. —

45. Beweis des Zusatzes zu δ). Wir haben soeben festgestellt, daß $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$ für das Bestehen von Vc) notwendig ist, und nach Nummer 14 ist dies auch noch der Fall, wenn $\omega_i(u) \neq \omega_i(-u)$ gilt. Ferner sei daran erinnert, daß Vc) mit 1,VIIId) äquivalent ist. In Nummer 1, 55 haben wir aber festgestellt, daß 1,VIIId) für das Bestehen von (1; 10.2) bzw. (3.2) auch dann notwendig ist, wenn F_i $(i = 1, 2)$ durch die Klasse der auf R_l stetigen Funktionen ersetzt wird. — Damit ist Satz VIII in allen Teilen bewiesen.

46. Anmerkung. Alle Behauptungen des Satzes VIII bleiben wahr, wenn in (3.4) die Integration mit der Differentiation vertauscht angesetzt wird. Dies ergibt sich sofort daraus, daß (1; 13.2) mit $\Phi(u, v; n) = \psi_1(u, k_n)\psi_2(v, k_n)$ wegen (10.1) und $p_1 > 1$ erfüllt ist und somit das Kriterium I in Nummer 58 des ersten Teils Anwendung findet.

47. Folgerungen aus δ). Ist $f(\xi, \eta)$ auf R_l stetig und nach einer beliebigen der beiden Variablen ξ, η O-differenzierbar in Q_0, so hätte man für einen in bezug auf ξ und η symmetrisch formulierten Satz δ) neben $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{p_2}{p_1} \leqq 1$ auch $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{p_1}{p_2} \leqq 1$ vorauszusetzen, was offenbar nicht miteinander verträglich ist. Es existiert also kein aus zwei *Poisson*-

Hahnschen Einerkernen gebildeter Produktkern mit der gewünschten Eigenschaft.

Analog verhalten sich auch drei- und mehrdimensionale *Poisson-Hahnsche* Produktkerne. Es seien z. B. im Falle von $m = 3$ Dimensionen die Einerkerne mit ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezeichnet. Für die Gültigkeit des dem Satze δ) entsprechenden Differentiationssatzes müßte die Relation (5.1) mit $m = 3$ vorausgesetzt werden, oder — wie der Satz in Nummer 18 besagt — zwei Relationen (4.3), nämlich mit $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_2$ und $\psi = \psi_1$, $\varphi = \psi_3$. Diese Ungleichungen könnten aber, wie wir in Nummer 44 für die eine von ihnen gesehen haben, nur gelten, wenn $\frac{1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \leqq 1$, $\frac{1}{p_3} + \frac{p_3}{p_1} \leqq 1$ ist. Für einen in bezug auf drei Variable symmetrischen Differentiationssatz im Falle der O-Ableitung müßte man daher die sämtlichen Relationen $\frac{1}{p_i} + \frac{p_i}{p_k} \leqq 1$ $(i, k = 1, 2, 3)$ voraussetzen. Da sich diese aber teilweise widersprechen, ist unser Ansatz zum Scheitern verurteilt.

Verzeichnis der besonderen Termini

Die Zahlenpaare hinter den angeführten Bezeichnungen sind so zu verstehen, daß die erste Zahl auf den 1. oder 2. Teil dieser Beiträge verweist, während die zweite sich auf die Nummer am Rande des Textes bezieht.

(Eingegangen den 20. Oktober 1947.)