Über eine Klasse von Funktionalgleichungen.

Über eine Klasse von Funktionalgleichungen

Von J. Aczél, Budapest

1. *Einleitung.* Das grundlegende Resultat in der Theorie der linearen Funktionalgleichungen rührt von *Cauchy*[1]) her und sagt aus, daß unter allen in $-\infty < x < +\infty$ stetigen Funktionen nur

$$f(x) = a x$$

die Funktionalgleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \tag{1}$$

löst. *Darboux*[2]) bewies, daß man die Stetigkeit nur in einem einzigen Punkte fordern muß, um die Einzigkeit der obigen Lösung zu sichern. Im weiteren werden wir uns nur auf diese Cauchyschen bzw. Darbouxschen Resultate stützen.

Als einen Spezialfall seiner bekannten Ungleichung zeigte *Jensen*, daß falls eine in $-\infty < x < +\infty$ stetige Funktion die Funktionalgleichung

$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) \tag{1*}$$

für jedes positive q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ befriedigt, dann

$$f(x) = a x + b$$

sein muß. Doch gilt das schärfere Resultat, daß wenn (1*) auch nur für ein einziges q_1, q_2 mit $q_1 + q_2 = 1$ durch eine in einem Punkte stetige Funktion befriedigt wird, dieses nur das obige sein kann.

Von selbst drängen sich die folgenden Fragen auf:

a) Wie gestaltet sich die Lösung von (1*) im Falle $q_1 + q_2 \neq 1$?

b) Welche sind die Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2)\ ? \tag{2}$$

---

1) *Cauchy*, Oeuvres, II^{e} série, t. III, pp. 98—105.

2) *Darboux*, Math. Annalen 17 (1880) p. 56.

Sierpinsky bewies sogar, daß $f(x) = a x$ die einzig meßbare Lösung ist. Fundamenta Math. 1 (1920) pp. 116—121.

Es wird sich herausstellen, daß (2) nur im Falle $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Ob zwar die Funktionalgleichung (2) für die meisten Anwendungen hinreicht, behandeln wir mit gleicher Mühe die scheinbar viel verwickeltere

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + p_1(x_1) + p_2(x_2) + p_0 \,, \tag{3}$$

wo α_1, α_2, β_1, β_2 gegebene, von Null verschiedene Konstanten, p_0 eine zu bestimmende Konstante, und $f(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ zu bestimmende, stetige Funktionen sind, mit der Bedingung $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$. Merkwürdigerweise bestimmt (3) nicht nur $f(x)$ bis auf zwei Konstanten, sondern auch $p_1(x)$, $p_2(x)$ und p_0.

Der Fall $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ führt zu der sogenannten verallgemeinerten Poinsotschen Funktionalgleichung[3])

$$f(\alpha x) = \beta f(x) + p(x) \,,$$

doch ist hier $p(x)$ durchaus nicht durch die Funktionalgleichung bestimmt. Das Problem $f(x)$ aus α, β und $p(x)$ zu bestimmen, ist dem Summationsproblem der Differenzenrechnung äquivalent.

Am Ende dieser Arbeit geben wir auch eine andere Verallgemeinerung von (2), sowie Anwendungen auf gewisse, durch *Hardy*, *Littlewood* und *Pólya*[4]) definierte Funktionen.

2. Wir suchen jene in einem Punkte stetige Funktionen $f(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ (und die Konstante p_0) die für jedes $-\infty < x < +\infty$ die Funktionalgleichung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2) + p_1(x_1) + p_2(x_2) + p_0 \tag{3}$$

lösen, mit der Bedingung $p_1(0) = p_2(0) = 0$. Wir setzen $x_1 = x_2 = 0$ ein; dies gibt $f(0) = (\beta_1 + \beta_2) f(0) + p_0$. Mit der Bezeichnung $f(0) = b$ bekommen wir

$$p_0 = (1 - \beta_1 - \beta_2)\, b \,. \tag{4}$$

Wir setzen diesen Wert von p_0 in (3) ein und führen die neue Funktion $F(x) = f(x) - b = f(x) - f(0)$ ein. Dann wird $F(0) = 0$ und $f(x) = F(x) + b$

---

[3]) Vgl. *Pompeiu*, Bull. Math. Phys. Ec. Polytech. Bucuresti 9 (1938) pp. 54—56.

[4]) Inequalities. Cambridge 1934, pp. 65, 84—85.

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + b =$$
$$= \beta_1 F(x_1) + \beta_1 b + \beta_2 F(x_2) + \beta_2 b + p_1(x_1) + p_2(x_2) + b - \beta_1 b - \beta_2 b$$

$$F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 F(x_1) + \beta_2 F(x_2) + p_1(x_1) + p_2(x_2) \,, \tag{5}$$

wo $F(0) = p_1(0) = p_2(0) = 0$ ist. Wir setzen in (5) erst $x_1 = \frac{z_1}{a_1}$, $x_2 = 0$, dann $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{z_2}{\alpha_2}$

$$F(z_1) = \beta_1 F\left(\frac{z_1}{\alpha_1}\right) + p_1\left(\frac{z_1}{\alpha_1}\right) \,, \quad F(z_2) = \beta_2 F\left(\frac{z_2}{\alpha_2}\right) + p_2\left(\frac{z_2}{\alpha_2}\right) . \tag{6}$$

Es sei endlich $x_1 = \frac{z_1}{\alpha_1}$, $x_2 = \frac{z_2}{\alpha_2}$, dann folgt aus (6)

$$F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2) \;. \tag{7}$$

Dies ist die Cauchysche Funktionalgleichung (1), deren einzige in einem Punkte stetige Lösung $F(x) = ax$ ist. Dies gibt

$$f(x) = ax + b \;. \tag{8}$$

Wir setzen $F(x) = ax$ in (5) ein: $\alpha_1 a x_1 + \alpha_2 a x_2 = \beta_1 a x_1 + \beta_2 a x_2 + p_1(x_1) + p_2(x_2)$, also ist

$$p_1(x) = a(\alpha_1 - \beta_1)\, x \,, \qquad p_2(x) = a(\alpha_2 - \beta_2)\, x \;. \tag{9}$$

Wir haben den

Satz I. Die Funktionalgleichung (3) bestimmt $f(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, p_0, bis auf zwei willkürliche Konstanten a und b, indem:

$$f(x) = ax + b \,, \quad p_1(x) = a(\alpha_1 - \beta_1)\, x \,, \quad p_2(x) = a(\alpha_2 - \beta_2)\, x \,,$$
$$p_0 = (1 - \beta_1 - \beta_2)\, b \;.$$

Es ist $p_0 = 0$, wenn entweder $b = 0$ oder $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ist,
es ist $p_1(x) \equiv 0$, wenn entweder $a = 0$ oder $\alpha_1 = \beta_1$ ist
und $p_2(x) \equiv 0$, wenn $a = 0$ oder $\alpha_2 = \beta_2$ ist. Dies gibt den

Satz II. Die Lösungen der Funktionalgleichung (2) sind:

1a) $f(x) \equiv 0$.
1b) $f(x) \equiv b$, falls $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ist.
2a) $f(x) = ax$, falls $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$.
2b) $f(x) = ax + b$, falls $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

3. *Anwendungen.*

A. Die übliche Definition des Mittelwerts ist: [4])

$$\mathfrak{M}(f;\, x_1, x_2;\, q_1, q_2) = f^{-1}[q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)] \;, \quad (q_1 + q_2 = 1) \;, \tag{10}$$

wo $f(x)$ eine stetige, streng monotone Funktion ist. Schon *Leibniz*[5]) kannte die folgende Eigenschaft der Exponentialfunktion: zum arithmetischen Mittel zweier Abszissen $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ gehört immer das geometrische Mittel der Ordinaten $y = \sqrt{y_1 y_2}$. Wir suchen nun die Bedingung für die Existenz einer stetigen Funktion, die dem Werte $x = \mathfrak{M}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2)$ den Wert $y = \mathfrak{M}(\psi\,;\, y_1, y_2\,;\, \beta_1, \beta_2)$ als Funktionenwert zuordnet; also einem Mittelwert der Abszissen einen anderen Mittelwert der Ordinaten:

$$F\{\mathfrak{M}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2)\} = \mathfrak{M}[\psi\,;\, F(x_1), F(x_2)\,;\, \beta_1, \beta_2] \,, \quad \left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \beta_1 + \beta_2 = 1 \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

$$F\varphi^{-1}[\alpha_1\varphi(x_1) + \alpha_2\varphi(x_2)] = \psi^{-1}[\beta_1\psi F(x_1) + \beta_2\psi F(x_2)] \,, \; \big(f[g(x)] = fg(x)\big).$$

Wir bezeichnen $\varphi(x) = z$, $x = \varphi^{-1}(z)$ und setzen beide Seiten der Gleichung in die streng monotone Funktion $\psi(x)$ ein:

$$\psi F \varphi^{-1}(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \beta_1 \psi F \varphi^{-1}(z_1) + \beta_2 \psi F \varphi^{-1}(z_2) \;.$$

Dies ist aber eben die Funktionalgleichung (2) für die Funktion $f(z) = \psi F \varphi^{-1}(z)$, und zwar ist hier $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = 1$, und Satz II, 2b) zeigt, daß (11) *dann und nur dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn* $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ *(die „Gewichte" der beiden Mittelwerte müssen gleich sein).* Die Lösung ist $\psi F \varphi^{-1}(z) = a z + b$, also: $F(x) = \psi^{-1}\big(a\,\varphi(x) + b\big)$.

Weiter folgt: *Zwei Mittelwerte sind einander gleich:*

$$\mathfrak{M}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2) = \mathfrak{M}(\psi\,;\, x_1, x_2\,;\, \beta_1, \beta_2) \tag{12}$$

wenn ihre Gewichte gleich sind: $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ *und wenn* $\psi(x) = a\,\varphi(x) + b$, denn (12) ist der Spezialfall von (11), wo $F(x) = x$ ist.

B. Ist in (10) $q_1 + q_2 \neq 1$, so bezeichnen wir diese Funktion nach *Hardy*, *Littlewood* und *Pólya*[4]):

$$\mathfrak{T}(f\,;\, x_1, x_2\,;\, p_1, p_2) = f^{-1}[p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)] \quad (p_1 + p_2 \neq 1) \;.$$

[5]) Analysis des Unendlichen. Ostwalds Klassiker, Nr. 162, p. 13.

Der Spezialfall $p_1 = p_2 = 1$ ist eine kommutative, assoziative Operation zwischen x_1 und x_2 $(x_1 o\, x_2 = x_2 o\, x_1,\ x_1 o\,(x_2 o\, x_3) = (x_1 o\, x_2) o\, x_3)$:

$$x_1 o\, x_2 = \mathfrak{S}(f\,;\, x_1, x_2) = \mathfrak{T}(f\,;\, x_1, x_2\,;\, 1, 1) = f^{-1}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] .$$

Die Frage, wann $\mathfrak{T}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2) = \mathfrak{T}(\psi\,;\, x_1, x_2\,;\, \beta_1, \beta_2)$ ist, läßt sich analog zu A auf Satz II 2a zurückführen:

$$\mathfrak{T}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, \alpha_1, \alpha_2) = \mathfrak{T}(\psi\,;\, x_1, x_2\,;\, \beta_1, \beta_2) ,$$

wenn $\alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2$ *und* $\psi(x) = a\varphi(x)$;

$$\mathfrak{S}(\varphi;\, x_1, x_2) = \mathfrak{S}(\psi\,; x_1, x_2),\ \textit{wenn}\ \ \psi(x) = a\,\varphi(x).$$

C. Die unmittelbare Verallgemeinerung der Funktionen

$$\mathfrak{M}(f\,;\, x_1, x_2\,;\, q_1, q_2) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{T}(f\,;\, x_1, x_2\,;\, p_1, p_2)$$

ist $\mathfrak{U}(f\,;\, x_1, x_2\,;\, r_1, r_2, r) = f^{-1}[r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2) + r]$. Die Frage, wann $\mathfrak{U}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, A_1, A_2, A) = \mathfrak{U}(\psi\,;\, x_1, x_2\,;\, B_1, B_2, B)$ ist, führt auf eine neue Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (2), und zwar auf:

$$f(A_1 x_1 + A_2 x_2 + A) = B_1 f(x_1) + B_2 f(x_2) + B , \tag{13}$$

die sich aber leicht auf (2) zurückführen läßt. Wir setzen nämlich in (13)

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \alpha_1 ,\quad \frac{A_2}{A_1 + A_2} = \alpha_2 ,\quad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1) ;$$
$$\frac{B_1}{B_1 + B_2} = \beta_1 ,\quad \frac{B_2}{B_1 + B_2} = \beta_2 ,\quad (\beta_1 + \beta_2 = 1)$$

und die Substitution

$$x_1 = x_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} z_1 + \frac{A_2}{A_1 + A_2} z_2 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$$

ergibt:

$$f(A_1 z_1 + A_2 z_2 + A) = (B_1 + B_2) f(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) + B . \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f(x_2)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_2 + \beta_2 = 1)$ und dies ist schon ein Fall der Gleichung (2). Aus Satz II, 2b folgt als *Lösung von* (13) $f(x) = a\,x + b$, und setzen wir dies in (13) ein, so sehen wir, daß es nur dann eine nichttriviale Lösung gibt, wenn $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2,\ B = a\,A + b(1 - A_1 - A_2)$. Daraus folgt nun:

$$\mathfrak{U}(\varphi\,;\, x_1, x_2\,;\, A_1, A_2, A) = \mathfrak{U}(\psi\,;\, x_1, x_2\,;\, B_1, B_2, B)$$

dann und nur dann, falls $\psi(x) = a\,\varphi(x) + b$. $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $B = a\,A + b(1 - A_1 - A_2)$. Ist $A_1 + A_2 \neq 1$ so können wir $B = 0$ machen, wenn wir $b = \dfrac{a\,A}{A_1 + A_2 - 1}$ wählen. Das heißt:

Ist

$$\psi(x) = a\left[\varphi(x) + \frac{A}{A_1 + A_2 - 1}\right]$$

so ist

$$\mathfrak{U}(\varphi\,;\,x_1\,,\,x_2\,;\,A_1\,,\,A_2\,,\,A) = \mathfrak{T}(\psi\,;\,x_1\,,\,x_2\,;\,A_1\,,\,A_2)\ .$$

(Erhalten den 16. Juli 1947).