Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen.

Autor(en): **Zassenhaus, Hans**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **21 (1948)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18601

Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen

Von HANS ZASSENHAUS, Hamburg

Die diskreten Bewegungsgruppen des euklidischen R_n mit endlichem Fundamentalbereich (Raumgruppen in n Dimensionen) enthalten n unabhängige Translationen. Für $n = 3$ wurde dies von *Schönfließ* [1] durch geometrische Überlegungen gezeigt. *Bieberbach* [2, 3] bewies den Fundamentalsatz auf arithmetischem Wege für beliebige Werte von n. Von *Frobenius* [5] wurde der Beweis vereinfacht.

Aus dem Fundamentalsatz ergibt sich, daß die Translationen in einer gegebenen Raumgruppe $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{T}$ mit endlicher Faktorgruppe bilden, so daß $\mathfrak{T}$ eine freie abelsche Gruppe von n Erzeugenden ist. Die Translationsuntergruppe $\mathfrak{T}$ ist eindeutig bestimmt als größter abelscher Normalteiler. Jede umfassendere Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist nicht mehr abelsch.

Zwei Raumgruppen heißen äquivalent, wenn sie sich durch eine Affinität ineinander transformieren lassen. *Bieberbach* [3] zeigt, daß die Äquivalenz zweier Raumgruppen mit ihrer Isomorphie gleichbedeutend ist.

In dieser Arbeit wird zunächst der Satz bewiesen, daß eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die als Erweiterung einer freien abelschen Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}$ aus endlich vielen Erzeugenden $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_n$ mit endlicher Faktorgruppe konstruiert worden ist, in der nur der Einheitsrestklasse $\overline{\mathfrak{T}}$ selbst der identische Automorphismus von $\overline{\mathfrak{T}}$ (beim Transformieren) entspricht, zu einer Raumgruppe isomorph ist.

Die Bestimmung der Klassen äquivalenter Raumgruppen des R_n läuft gemäß dem bereits Gesagten auf das von *Speiser* [6] gestellte Problem hinaus, alle Typen nicht isomorpher Erweiterungen der freien abelschen Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}$ von n Erzeugenden mit endlicher Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{F}}$ zu finden, so daß nur dem Einheitselement aus $\overline{\mathfrak{F}}$ der identische Automorphismus von $\overline{\mathfrak{T}}$ zugeordnet ist.

Bieberbach [4] zeigt, daß diese Aufgabe nur endlich viele Lösungen hat.

Die Klassifikation der Raumgruppen ist bisher nur für $n \leqslant 3$ durchgeführt, und zwar auf geometrischem Wege.

In dieser Arbeit wird eine algebraische Methode zur Klassifikation der Raumgruppen entwickelt, die es gestattet, die bisher auf geometrischem Wege erhaltenen Resultate rechnerisch zu kontrollieren und einen gangbaren Weg zeigt, die Klassifikation auch für mehr als drei Dimensionen auszuführen.

Wir machen uns zunächst klar, daß sich die den Elementen aus $\bar{\mathfrak{F}}$ zugeordneten Automorphismen von $\bar{\mathfrak{T}}$ als eine zu $\bar{\mathfrak{F}}$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{F}$ von ganzzahligen Substitutionen in n Variabeln darstellen lassen. Dabei ist die Gruppe $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{G}$ bis auf eine Transformation mit einer ganzzahligen Matrix der Determinante ± 1, d. h. bis auf arithmetische Äquivalenz, eindeutig bestimmt.

Vorausgesetzt wird die Kenntnis aller Klassen endlicher ganzzahliger Substitutionsgruppen bei arithmetischer Äquivalenz. Wie *Bieberbach* [4] gezeigt hat, gibt es nur endlich viele Klassen. In einer früheren Arbeit habe ich [7] gangbare Methoden zur Beherrschung dieser Klassen angegeben. Weitere Untersuchungen darüber sind im Gange. Wir denken uns aus jeder Klasse eine Vertretergruppe $\mathfrak{F}$ ausgewählt und lösen für diese das Erweiterungsproblem.

Um die Rechnung zu erleichtern, ist es zweckmäßig, für die Substitutionsgruppe $\mathfrak{F}$ endliche viele Erzeugende $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ mit endlich vielen definierenden Relationen :

$$R_j(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = E_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) ,$$

wobei E_n die n-reihige Einheitsmatrix ist, anzugeben.

Mit Hilfe der Matrizen aus $\mathfrak{F}$ und der Relationen R_j wird eine Matrix $\mathfrak{R}$ mit $r \cdot n$ Zeilen und $n \cdot \nu$ Spalten konstruiert. Das Produkt der von Null verschiedenen Elementarteiler der Matrix $\mathfrak{R}$ ist im wesentlichen gleich der Anzahl der zu $\mathfrak{F}$ gehörenden Raumgruppen. Eine Reduktion kann nur eintreten durch die Existenz von ganzzahligen Substitutionen der Determinante ± 1 (unimodularen Matrizen), die $\mathfrak{F}$ in sich transformieren. Alle Matrizen dieser Art bilden eine Gruppe $N_{\mathfrak{F}}$, die nach einem Satz von *Siegel* endlich viele Erzeugende $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ besitzt. Durch eine zusätzliche Rechnung läßt sich leicht finden, welche Reduktion der oben gefundenen Anzahl durch die X_i eintritt. An Beispielen wird der Gang des Algorithmus klargemacht.

Eine systematische Übersicht über die Rechnungen für $n = 3$ ist als Nachtrag zu dieser Arbeit vorgesehen. Eine Auseinandersetzung mit der bisher in der Mineralogie gebräuchlichen Nomenklatur ist dabei unvermeidlich. Die von *Schönfließ* [1] angegebene Anzahl von 230 Raumgruppen im R_3 bestätigt sich.

§ 1. Es sei $\overline{\mathfrak{T}}$ die freie abelsche Gruppe mit n Erzeugenden $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots \overline{T}_n$, $\overline{\mathfrak{G}}$ sei eine Obergruppe von $\overline{\mathfrak{T}}$, die $\overline{\mathfrak{T}}$ als Normalteiler mit der Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{F}}$ enthalte. Die Elemente $\overline{A}$ aus $\overline{\mathfrak{F}}$ sind Restklassen von $\overline{\mathfrak{G}}$ nach $\overline{\mathfrak{T}}$:

$$\overline{A} = \overline{\mathfrak{T}}\,\overline{S}_{\overline{A}}\ ,$$

wobei die Elemente $\overline{S}_{\overline{A}}$ ein Vertretersystem von $\overline{\mathfrak{G}}$ nach $\overline{\mathfrak{T}}$ bilden. Durch die Festsetzung

$$\overline{A} \rightarrow \left(\overline{S}_{\overline{A}}\,\overset{\overline{T}}{\overline{T}}\,\overline{S}_{\overline{A}}^{-1}\right) \qquad (\overline{T} \text{ aus } \overline{\mathfrak{T}})$$

ist $\overline{A}$ eindeutig ein Automorphismus von $\overline{\mathfrak{T}}$ zugeordnet, so daß dem Produkt zweier Restklassen nach $\overline{\mathfrak{T}}$ das Produkt der ihnen entsprechenden Automorphismen von $\overline{\mathfrak{T}}$ zugeordnet ist. Dabei wird der Einheitsrestklasse $\overline{\mathfrak{T}}$ der identische Automorphismus zugeordnet. Setzen wir

$$\left(\overline{S}_{\overline{A}}\,\overline{T}_k\,\overline{S}_{\overline{A}}^{-1}\right) = \prod_{i=1}^{n} \overline{T}_i^{\alpha_{ik}(\overline{A})}\ ,$$

so finden wir, daß der zugeordnete Automorphismus eindeutig durch die n-reihige Matrix $A = (\alpha_{ik}(\overline{A}))$ bestimmt ist. Man rechnet nach, daß dem Produkt zweier Automorphismen das Produkt der Matrizen entspricht. Alle Matrizen A bilden eine zu $\overline{\mathfrak{F}}$ homomorphe Gruppe $\mathfrak{F}$ von unimodularen Matrizen.

Satz 1. *Wenn die Gruppe $\mathfrak{F}$ endlich und zu $\overline{\mathfrak{F}}$ isomorph ist, so ist $\overline{\mathfrak{G}}$ zu einer Raumgruppe in n Dimensionen isomorph.*

Beweis: Nach Voraussetzungen besteht der Isomorphismus

$$\overline{A} \rightarrow A$$

zwischen $\overline{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{F}$. Wir stellen einen weiteren Isomorphismus zwischen $\mathfrak{T}$ und der Gruppe $\overline{\mathfrak{T}}$ der ganzzahligen Translationen im R_n her durch die Zuordnung

$$T = (E_n, \mathfrak{t}) \to \overline{T}_1^{t_1} \overline{T}_n^{t_2}, \ldots, \overline{T}_n^{t_n} = \overline{T}\ , \quad \text{wobei}$$

$$\mathfrak{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_1\ , \ t_2\ , \ldots , t_n \quad \text{ganz rational ist.}$$

Dann ist

$$\overline{T}^{\overline{S}_{\overline{A}}} = \overline{S}_{\overline{A}} \overline{T} \overline{S}_{\overline{A}}^{-1} = \prod_{k=1}^{n} (\overline{S}_{\overline{A}} \overline{T}_k \overline{S}_{\overline{A}}^{-1})^{t_k} = \prod_{i=1}^{n} \overline{T}_i^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(A) t_k} = \overline{(E_n, A\mathfrak{t})}$$

$$\mathfrak{T}\overline{S}_{\overline{A}} \cdot \mathfrak{T}\overline{S}_{\overline{B}} = \mathfrak{T}\overline{S}_{\overline{AB}}$$

$$\overline{S}_{\overline{A}} \cdot \overline{S}_{\overline{B}} = \overline{T}_{A,B} \overline{S}_{\overline{AB}} \quad \text{mit} \quad T_{A,B} \quad \text{aus} \quad \mathfrak{T}$$

Aus dem Assoziativgesetz $\overline{S}_{\overline{A}}(\overline{S}_{\overline{B}}\overline{S}_{\overline{C}}) = (\overline{S}_{\overline{A}}\overline{S}_{\overline{B}})\overline{S}_{\overline{C}}$ ergeben sich für das Faktorensystem aus den Elementen $\overline{T}_{A,B}$ die *Assoziativitätsrelationen*

$$\overline{T}_{B,C}^{\overline{S}_{\overline{A}}} \overline{T}_{A,BC} = \overline{T}_{A,B} \overline{T}_{AB,C}\ .$$

Setzen wir $T_{A,B} = (E_n, \mathfrak{t}_{A,B})$, so folgt

$$\mathfrak{t}_{A,BC} + A\,\mathfrak{t}_{B,C} = \mathfrak{t}_{A,B} + \mathfrak{t}_{AB,C}\ .$$

Die Mittelbildung über $\mathfrak{F}$ ergibt:

$$\mathfrak{m}_A + A\,\mathfrak{m}_B = \mathfrak{t}_{A,B} + \mathfrak{m}_{AB}\ , \tag{1}$$

wobei

$$\mathfrak{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{C \in \mathfrak{F}} \mathfrak{t}_{X,C}$$

gesetzt ist und die Ordnung der Faktorgruppe $\mathfrak{F}$ mit N bezeichnet ist. Die Zuordnung

$$\overline{T}\overline{S}_{\overline{A}} \to T \cdot (A, \mathfrak{m}_A) = (A, \mathfrak{t} + \mathfrak{m}_A)$$

bildet $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorph auf eine affine Gruppe $\mathfrak{G}$ ab. Als Homomorphie Bedingung ergibt sich, daß der Gleichung

$$\overline{T}\overline{S}_{\overline{A}} \cdot \overline{T}'\overline{S}_{\overline{A'}} = \overline{T}\overline{T}'^{\overline{S}_{\overline{A}}} \overline{T}_{A,A'} \overline{S}_{\overline{AA'}}$$

gemäß jener Zuordnung die Gleichung

$$(A, \mathfrak{t} + \mathfrak{m}_A) \cdot (A', \mathfrak{t}' + \mathfrak{m}_{A'}) = (AA', \mathfrak{t} + A\,\mathfrak{t}' + \mathfrak{t}_{A,A'} + \mathfrak{m}_{AA'})$$

entsprechen muß, die in der Tat aus (1) folgt. Als Isomorphie-Bedingung ergibt sich, daß aus

$$T \cdot (A, \mathfrak{m}_A) = (E_n, 0)$$

folgen muß, daß $\overline{T}\overline{S}_{\overline{A}} = 1$. In der Tat ergibt sich $A = E_n$, $\overline{S}_{\overline{A}} \in \overline{\mathfrak{T}}$, $\mathfrak{t} + \mathfrak{m}_A = 0$.

Die affine Gruppe $\mathfrak{G}$ ist aber affin verwandt zu einer Raumgruppe. Sie ist nämlich diskret und enthält n unabhängige Translationen. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß sie in eine Bewegungsgruppe transformiert werden kann. Nach dem Satz von Maschke kann die endliche Gruppe $\mathfrak{F}$ von n-reihigen reellen Matrizen durch eine reelle Matrix X in eine Gruppe aus orthogonalen Matrizen transformiert werden. Also ist $(X, 0) \cdot \mathfrak{G} \cdot (X, 0)^{-1}$ eine Bewegungsgruppe, womit alles gezeigt ist.

Jede Raumgruppe ist affin verwandt zu einer der Gruppen aus allen Affinitäten $(A, \mathfrak{S}_A + \mathfrak{g})$, wobei $\mathfrak{g}$ den Modul Γ aller ganzzahligen Vektoren durchläuft und

$$\mathfrak{S}_{AB} \equiv \mathfrak{S}_A + A\,\mathfrak{S}_B \pmod{\Gamma} \tag{2}$$

ist, während A die endliche unimodulare Gruppe $\mathfrak{F}$ durchläuft, und umgekehrt gibt es zu jeder Gruppe dieser Art eine affin verwandte Raumgruppe. Da nun zwei Raumgruppen genau dann isomorph sind, wenn sie affin verwandt sind, so gilt dasselbe auch für die Gruppen der letztgenannten Art. Welches sind aber die Bedingungen für affine Verwandtschaft zweier Gruppen:

$\mathfrak{G}$ erzeugt aus $\mathfrak{T}$ und den Vertretern $(A, \mathfrak{S}_A)$ von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{T}$

$\mathfrak{G}^*$ erzeugt aus $\mathfrak{T}$ und den Vertretern $(A^*, \mathfrak{S}^*_{A^*})$ von $\mathfrak{G}^*$ nach $\mathfrak{T}$?

Wir prüfen also, wann

$$(X, \mathfrak{S})\,\mathfrak{G}\,(X, \mathfrak{S})^{-1} = \mathfrak{G}^*$$

ist. Da $\mathfrak{T}$ gekennzeichnet ist als maximaler abelscher Normalteiler, so muß

$$(X, \mathfrak{S})\,\mathfrak{T}(X, \mathfrak{S})^{-1} = \mathfrak{T}$$

sein. Folglich muß die Matrix X unimodular sein. Ferner ergibt sich die Bedingung:

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{T} \simeq \mathfrak{G}^*/\mathfrak{T}$$
$$\mathfrak{F} \simeq \mathfrak{F}^* ;$$

ja, es muß sogar bei passender Bezeichnung

$$(X, \mathfrak{S})(A, \mathfrak{S}_A)(X, \mathfrak{S})^{-1} = (A^*, \mathfrak{S}^*_{A^*} + \mathfrak{g}_A)$$

mit $\mathfrak{g}_A$ aus Γ und

$$A^* = XAX^{-1}$$
$$\mathfrak{F}^* = X\mathfrak{F}X^{-1}$$

sein. Folglich ist die Gruppe $\mathfrak{F}^*$ unimodular äquivalent zu $\mathfrak{F}$, und es ist

$$\mathfrak{S}^*_{A^*} \equiv X\,\mathfrak{S}_A + (E_n - XAX^{-1})\,\mathfrak{S} \qquad (\mathrm{mod}\ \Gamma)\ .$$

Wir haben nun aus jeder Klasse arithmetisch äquivalenter ganzzahliger endlicher Substitutionsgruppen eine Vertretergruppe $\mathfrak{F}$ gewählt. Wenn $\mathfrak{G}^*$ zu $\mathfrak{G}$ affin verwandt ist, so können wir $\mathfrak{G}^*$ so affin transformieren, daß auch die transformierte Gruppe noch zu $\mathfrak{F}$ gehört. Gesucht werden alle untereinander nicht isomorphen zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Raumgruppen.

Es gehöre also $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ zu $\mathfrak{F}$. Dann müssen wir uns die Frage stellen, wann

$$(X, \mathfrak{S})\,\mathfrak{G}\,(X, \mathfrak{S})^{-1} = \mathfrak{G}^*$$

ist. Als notwendige Bedingung erhalten wir gemäß den oben schon ausgeführten Rechnungen:

$$X\mathfrak{F}X^{-1} = \mathfrak{F}\ , \qquad \text{a)}$$

d. h. X muß zu der Gruppe $N_{\mathfrak{F}}$ aller unimodularen Matrizen, die $\mathfrak{F}$ auf sich transformieren (Normalisator von $\mathfrak{F}$ in der Gruppe aller unimodularer Substitutionen) gehören. Ferner muß

$$\mathfrak{S}^*_{A^*} \equiv X\,\mathfrak{S}_A + (E_n - XAX^{-1})\,\mathfrak{S} \qquad (\mathrm{mod}\ \Gamma)$$

sein. Etwas anders ausgedrückt ergibt sich die Bedingung:

$$\mathfrak{S}^*_A \equiv X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}} + (E - A)\,\mathfrak{S} \qquad (\mathrm{mod}\ \Gamma)\ . \qquad \text{b)}$$

Ersichtlich sind die angegebenen Bedingungen auch hinreichend für die affine Verwandtschaft zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$.

Wenn wir also zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ zu der gegebenen Gruppe $\mathfrak{F}$ bestimmt haben durch Angabe eines Vektorsystemes $(\mathfrak{S}_A)$ bzw. $(\mathfrak{S}^*_{A^*})$, so findet Äquivalenz genau dann statt, wenn sich die unter b) angegebene Kongruenz mit Hilfe eines festen Vektors $\mathfrak{S}$ und einer Matrix aus $N_{\mathfrak{F}}$ lösen läßt. Dabei ist noch zu bedenken, daß die Vektorensysteme nicht ganz beliebig sind, sondern an die Kongruenzbedingungen

$$\mathfrak{S}_{AB} \equiv \mathfrak{S}_A + A\,\mathfrak{S}_B \qquad (\text{mod } \Gamma)$$

gebunden sind. Wir sprechen in diesem Falle von (gewöhnlicher) Äquivalenz zwischen (zulässigen) Vektorsystemen. Diese Äquivalenz hat offenbar die drei üblichen Eigenschaften. Dasselbe gilt auch für die *starke* Äquivalenzbeziehung, von der wir dann sprechen, wenn sich sogar die Kongruenzen

$$\mathfrak{S}^*_A \equiv \mathfrak{S}_A + (E - A)\,\mathfrak{S} \qquad (\text{mod } \Gamma)$$

simultan lösen lassen. Aus der starken Äquivalenz folgt natürlich die Äquivalenz im gewöhnlichen Sinne, während das Umgekehrte nicht notwendig der Fall ist. Unsere Aufgabe ist es, die Klassen äquivalenter Vektorensysteme anzugeben. Wir wollen aber zunächst die Klassen stark äquivalenter Vektorensysteme mit Hilfe eines explicit zu bestimmenden Vertretersystemes aufstellen.

§ 2. Wir suchen irgendein System von Erzeugenden $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ mit endlich vielen Relationen

$$R_j(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = E_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu)$$

der Gruppe $\mathfrak{F}$ auf. Zum Beispiel können wir einfach die endlich vielen Elemente aus $\mathfrak{F}$ als Erzeugende nehmen und als definierende Relation die aus der Gruppentafel folgenden N^2 Relationen. Um aber überflüssige Rechenarbeit zu ersparen, ist es zweckmäßig, ein System von möglichst wenig Erzeugenden mit möglichst wenig definierenden Relationen aufzusuchen.

Sei zunächst ein zulässiges Vektorensystem $(\mathfrak{S}_A)$ gegeben. Wir behaupten, daß sich alle Vektoren des Systemes mod Γ ausrechnen lassen, wenn die Vektoren $\mathfrak{S}_{A_1}, \mathfrak{S}_{A_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{A_\nu}$ bekannt sind. Nämlich aus

$$\mathfrak{S}_{E_n} = \mathfrak{S}_{E_n E_n} \equiv \mathfrak{S}_{E_n} + E_n \mathfrak{S}_{E_n} \equiv 2\,\mathfrak{S}_{E_n} \qquad (\text{mod } \Gamma)$$

folgt
$$\mathfrak{S}_{E_n} \equiv 0 \;,$$

und aus $$0 \equiv \mathfrak{S}_{E_n} \equiv \mathfrak{S}_{A A^{-1}} \equiv \mathfrak{S}_A + A\,\mathfrak{S}_{A^{-1}}$$

folgt $\mathfrak{S}_{A^{-1}} \equiv -A^{-1}\mathfrak{S}_A$, insbesondere $\mathfrak{S}_{A_i^{-1}} \equiv -A_i^{-1}\mathfrak{S}_{A_i}$.

Wenn ferner $$W = A_{i_1}^{\varepsilon_1} A_{i_2}^{\varepsilon_2}, \ldots, A_{i_s}^{\varepsilon_s} \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

ein Potenzwort in den Erzeugenden $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ ist, und

$$W_1 = A_{i_2}^{\varepsilon_2} A_{i_3}^{\varepsilon_3} \ldots\ldots A_{i_s}^{\varepsilon_s}$$

den durch Weglassung des vordersten Faktors entstehenden Abschnitt bezeichnet, so ergibt sich

$$\mathfrak{S}_W \equiv \mathfrak{S}_{A_{i_1}^{\varepsilon_1}} + A_{i_1}^{\varepsilon_1}\mathfrak{S}_{W_1} \quad (\mathrm{mod}\ \Gamma)\,, \tag{3}$$

und daraus ergeben sich durch vollständige Induktion Formeln von der Bauart

$$\mathfrak{S}_W = \sum_{i=1}^{\nu} W^{(i)}\,\mathfrak{S}_{A_i}\,, \tag{4}$$

wobei die Matrix $W^{(i)}$ außer von den Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ nur von W und i abhängt. Ferner zeige man durch vollständige Induktion nach der Länge des Wortes W, das bei der eben angegebenen Konstruktion von $\mathfrak{S}_W$ sich ergibt, daß die Bedingungen

$$\mathfrak{S}_{WW'} \equiv \mathfrak{S}_W + W\,\mathfrak{S}_{W'}$$

von selbst miterfüllt sind. Welche Bedingungen ergeben sich aber für die Vektoren $\mathfrak{S}_{A_1}, \mathfrak{S}_{A_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{A_\nu}$, wenn wir fordern, daß sie ein zulässiges Vektorensystem im Sinne der eben angegebenen Konstruktion erzeugen? Notwendige Bedingungen sind jedenfalls, daß

$$\mathfrak{S}_{R_j(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)} = \sum_{i=1}^{\nu} R_j^{(i)}\,\mathfrak{S}_{A_i} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \ldots \nu)\,. \tag{5}$$

Diese r Bedingungen sind aber auch hinreichend. Wenn nämlich

$$W(A_1, A_2, \ldots, A_\nu) = W'(A_1, A_2, \ldots, A_\nu)$$

ist, so ist dies gleichbedeutend mit

$$W \equiv W'\,\Pi\, W_\lambda R_{i_\lambda}^{\varepsilon_\lambda} W_\lambda^{-1}$$

und hier ist $\qquad \mathfrak{S}_{R_j} \equiv 0$

$$\mathfrak{S}_{R_j^{-1}} \equiv -R_j^{-1}\,\mathfrak{S}_{R_j} \equiv 0$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{W'' R_j^{\varepsilon} W''^{-1}} &\equiv \mathfrak{S}_{W''} + W''\,\mathfrak{S}_{R_j^{\varepsilon}} + W'' R_j^{\varepsilon}\,\mathfrak{S}_{W''^{-1}} \\ &\equiv \mathfrak{S}_{W''} + W''\,\mathfrak{S}_{R_j^{\varepsilon}} - W'' R_j^{\varepsilon} W''^{-1}\,\mathfrak{S}_{W''} \\ &\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \Gamma)\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_{W} \equiv \mathfrak{S}_{W'} + W'\,\mathfrak{S}_{\Pi W_\lambda R_{j_\lambda}^{\varepsilon_\lambda} W_\lambda^{-1}} \equiv \mathfrak{S}_{W'} \ .$$

Man beachte, daß sich bei Kürzungen in einem Wort, z. B. $W = W_1 W_2 W_2^{-1} W_3 \to W_1 W_3$ der gemäß (4) gebildete Vektor mod Γ nicht ändert:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_W &\equiv \mathfrak{S}_{W_1} + W_1\,\mathfrak{S}_{W_2} + W_1 W_2\,\mathfrak{S}_{W_2^{-1}} + W_1 W_2 W_2^{-1}\,\mathfrak{S}_{W_3} \equiv \\ &\equiv \mathfrak{S}_{W_1} + W_1\,\mathfrak{S}_{W_3} \equiv \mathfrak{S}_{W_1 W_3} \ !\end{aligned}$$

Wir bemerken noch einmal, daß sich vermöge der Formel (3) und der Formel (4) zu jedem Wort W ein Vektor $\mathfrak{S}_W$ eindeutig aus der Kenntnis der Vektoren $\mathfrak{S}_{A_1}, \mathfrak{S}_{A_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{A_\nu}$ heraus konstruieren läßt, wobei die charakteristische Bedingung für zulässige Vektoren sicher erfüllt ist. Eben wurde noch gezeigt, daß die Konstruktion in dem Sinne eindeutig ist, daß für zwei Worte aus den Erzeugenden $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$, die in der Gruppe $\mathfrak{F}$ dasselbe Element darstellen, auch derselbe Vektor herauskommt.

Zum Beispiel finden wir ausgehend von den Vektoren

$$\mathfrak{S}_{A_i} = (E - A_i)\,\mathfrak{S}$$

das zulässige Vektorensystem

$$\mathfrak{S}_W = (E - W)\,\mathfrak{S} \ .$$

Wir können uns dies entweder durch Induktion nach der Länge von W klarmachen oder auch uns überlegen, daß die aus den Elementen

$$\mathfrak{T} \quad \text{und} \quad (A, 0) \quad (A \text{ aus } \mathfrak{F})$$

erzeugte Gruppe durch Transformation mit der Translation $(E_n, \mathfrak{S})$ in die aus den Elementen

$$\mathfrak{T} \quad \text{und} \quad (A, (E-A)\,\mathfrak{S}) \qquad (A \text{ aus } \mathfrak{F})$$

erzeugte Gruppe übergeht.

Durch die vorherigen Überlegungen haben wir uns klargemacht, daß wir ein vollständiges System von zulässigen Vektoren $(\mathfrak{S}_A)$ ersetzen dürfen durch ein Teilsystem bestehend aus den Vektoren $\mathfrak{S}_{A_1}, \mathfrak{S}_{A_2}, \ldots, \mathfrak{S}_{A_\nu}$, das durch die Bedingungen (5) eingeschränkt ist. Gewöhnliche Äquivalenz findet zwischen diesen Teilsystemen $(\mathfrak{S}_{A_i})$ und $(\mathfrak{S}^*_{A_i})$ genau dann statt, wenn die Kongruenzen

$$\mathfrak{S}^*_{A_i} \equiv X\,\mathfrak{S}_{A_i^{X^{-1}}} + (E - A_i)\,\mathfrak{S} \qquad (\text{mod } \Gamma)$$

mit X aus $N_{\mathfrak{F}}$ und einem festen Vektor $\mathfrak{S}$ lösbar sind, während starke Äquivalenz zwischen zulässigen Teilsystemen mit der simultanen Lösbarkeit der Kongruenzen

$$\mathfrak{S}^*_{A_i} \equiv \mathfrak{S}_{A_i} + (E - A_i)\,\mathfrak{S} \qquad (\text{mod } \Gamma)$$

gleichbedeutend ist.

Wir behandeln zunächst die starke Äquivalenz.

Alle zulässigen Vektorsysteme $(\mathfrak{S}_A)$ bilden einen Modul M gemäß der Addition

$$(\mathfrak{S}_A) + (\mathfrak{S}_{A'}) = (\mathfrak{S}_A + \mathfrak{S}_{A'}) \;,$$

denn die charakteristischen Kongruenzbedingungen sind ja linear in den Argumenten $\mathfrak{S}_A, \ldots$ Alle Vektorensysteme

$$((E-A)\,\mathfrak{S} + \mathfrak{g}_A) \qquad (\mathfrak{g}_A \text{ aus } \Gamma)$$

bilden einen Untermodul M_0 von M. Die starke Äquivalenz zulässiger Vektorsysteme ist ersichtlich gleichbedeutend mit der Kongruenz der Vektorsysteme nach dem Teilmodul M_0. Unsere Aufgabe ist es, ein Vertretersystem von M nach M_0 zu bestimmen.

Hilfssatz 1: M_0 besteht aus allen zulässigen Vektorensystemen $(\mathfrak{S}_A)$, für die es ein System $(\mathfrak{g}_A)$ von Gittervektoren mit der Eigenschaft, daß auch noch das System $\lambda(\mathfrak{S}_A - \mathfrak{g}_A)$ mit beliebigem reellen λ zulässig ist, gibt.

Beweis des Hilfssatzes: Wenn

$$\mathfrak{S}_A = (E - A)\,\mathfrak{S} + \mathfrak{g}_A \qquad \text{mit } \mathfrak{g}_A \qquad \text{aus } \Gamma \text{ ist,}$$

so bilden die Vektoren

$$\lambda(\mathfrak{S}_A - \mathfrak{g}_A) = (E - A)\,\lambda\mathfrak{S}$$

ebenfalls ein zulässiges Vektorensystem. Wenn aber das Vektorensystem $(\mathfrak{S}_A)$ zulässig ist und ein System von Gittervektoren $\mathfrak{g}_A$ existiert, so daß auch das System der Vektoren $\lambda(\mathfrak{S}_A - \mathfrak{g}_A)$ (λ beliebig reell) noch ein zulässiges System ist, so setzen wir

$$\mathfrak{t}_A = \mathfrak{S}_A - \mathfrak{g}_A$$

und finden

$$\lambda\mathfrak{t}_{AB} \equiv \lambda\mathfrak{t}_A + A \cdot \lambda\mathfrak{t}_B \;,$$

$$\lambda(\mathfrak{t}_{AB} - \mathfrak{t}_A - A\,\mathfrak{t}_B) \in \Gamma \;,$$

und da λ eine beliebige reelle Zahl sein darf, so muß der Vektor $\mathfrak{t}_{AB} - \mathfrak{t}_A - A\,\mathfrak{t}_B$ verschwinden. Man bilde über die so entstehenden Gleichungen den Mittelwert über alle B! Setzen wir noch

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{N} \sum_{B \in \mathfrak{F}} \mathfrak{t}_B$$

so erhalten wir

$$\mathfrak{m} - \mathfrak{t}_A - A\,\mathfrak{m} = 0 \;,$$

$$\mathfrak{t}_A = (E - A)\,\mathfrak{m}$$

w. z. b. w.

Wir bilden das Vektorensystem $(\mathfrak{S}_A)$ durch die Zuordnung

$$(\mathfrak{S}_A) \to (\mathfrak{S}_{A_i})$$

auf ein Teilsystem ab und erhalten dadurch eine isomorphe Abbildung von M auf einen anderen Modul $\overline{M}$. Dabei wird M_0 isomorph auf die Menge $\overline{M}_0$ der Vektorensysteme

$$((E - A_i)\,\mathfrak{S} + \mathfrak{g}_{A_i}) \qquad (\mathfrak{g}_{A_i} \text{ aus } \Gamma)$$

abgebildet. Nun führen wir an Stelle eines Systemes von ν Vektoren mit n Komponenten einen Übervektor mit $n \cdot \nu$ Komponenten ein:

$$S = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{A_1} \\ \mathfrak{S}_{A_2} \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_{A_\nu} \end{pmatrix}$$

Um die Bedingung der Zulässigkeit für diese Übervektoren auszudrücken, führen wir die $rn, \nu n$-Matrix

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} R_1^{(1)} R_1^{(2)} \dots R_1^{(\nu)} \\ R_2^{(1)} R_2^{(2)} \dots R_2^{(\nu)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ R_r^{(1)} R_r^{(2)} \dots R_r^{(\nu)} \end{pmatrix}$$

ein und erhalten als Bedingung:

$$\mathfrak{R}\, S \qquad \text{ist ganzzahlig.}$$

Alle Übervektoren S, für die $\mathfrak{R}S$ ganzzahlig ist, bilden einen zu $\bar{M}$ isomorphen Modul $\bar{\bar{M}}$. Insbesondere enthält $\bar{\bar{M}}$ alle ganzzahligen Übervektoren. Bei dem Isomorphismus zwischen M und $\bar{\bar{M}}$ wird M_0 gemäß dem Hilfssatz auf jenen Untermodul $\bar{\bar{M}}_0$ von $\bar{\bar{M}}$ abgebildet, der aus allen Übervektoren S_0 besteht, für die es einen ganzzahligen Übervektor G mit der Eigenschaft, daß auch alle Übervektoren $\lambda(S_0 - G)$ mit beliebigem reellen λ noch zulässig sind, gibt. Gleichbedeutend damit ist offenbar die Lösbarkeit der Gleichung

$$\mathfrak{R}(S_0 - G) = 0$$

durch einen ganzzahligen Übervektor G. Man bringe nun die Matrix $\mathfrak{R}$ durch elementare Umformungen in Elementarteilergestalt:

$$\mathfrak{R} \to \mathfrak{P}\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} e_1 & & & & \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_\varrho & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$e_1 / e_2 / \dots / e_\varrho > 0$$

wobei $\mathfrak{P}$ eine nr-reihige unimodulare Matrix und $\mathfrak{Q}$ eine $n\nu$-reihige unimodulare Matrix ist.

Dieser Umformung entspricht der Übergang von $\overline{\overline{M}}$ zu dem isomorphen Modul $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}$. Denn aus der Tatsache, daß $\mathfrak{R}S$ ganzzahlig ist, folgt, daß $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Q}^{-1}S$ ganzzahlig ist und umgekehrt. $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}$ besteht aber aus allen Übervektoren der Form

$$\begin{pmatrix} g_1 e_1^{-1} \\ g_2 e_2^{-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_\varrho e_\varrho^{-1} \\ * \\ * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \end{pmatrix}$$

wobei die Zahlen g_i ganzrational sind und die Sterne beliebige reelle Zahlen bedeuten sollen. Der Modul $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}_0$ besteht aus allen Vektoren, die sich als Summe eines ganzzahligen Übervektors und eines von $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ annullierten Vektors darstellen lassen, das sind aber die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_\varrho \\ * \\ * \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ * \end{pmatrix}$$

Als Vertretersystem von $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}$ nach $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}_0$ erhalten wir demgemäß die $e_1 \cdot e_2 \ldots e_\varrho$ Übervektoren

$$P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho} = \begin{pmatrix} l_1 e_1^{-1} \\ l_2 i_2^{-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ l_\varrho e_\varrho^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} l_i = 0, 1, 2 \ldots e_i - 1 \\ i = 1, 2, \ldots \varrho \end{array}$$

Entsprechend finden wir als Vertretersystem von $\overline{M}$ nach $\overline{M}_0$ die $e_1 e_2 \ldots e_\varrho$ Vektoren

$$\mathfrak{Q}\, P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho}\,,$$

die sich auf Grund der Kenntnis der elementaren Spaltenumformungen, die von $\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ führten, leicht berechnen lassen. Übrigens ist es nicht absolut notwendig, grade die Elementarteilergestalt herzustellen. Es genügt schon die Herstellung einer *monomialen Gestalt*, wobei also in jeder Zeile und Spalte von $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ höchstens eine von Null verschiedene Zahl steht. Das Produkt der von Null verschiedenen Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_\varrho$ in der Matrix $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ ist dann die gesuchte Anzahl der Restklassen von $\overline{M}$ nach $\overline{M}_0$, und die Vertreter erhalten wir in der Form

$$\mathfrak{Q}\cdot\begin{pmatrix} \vdots \\ l_1 d_1^{-1} \\ \vdots \\ l_2 d_2^{-1} \\ \vdots \\ l_\varrho d_\varrho^{-1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} l_i &= 0, 1, \ldots d_i - 1 \\ i &= 1, 2, \ldots \varrho \end{aligned}$$

wobei durch die Punkte Nullen angedeutet werden. Die Zahl ϱ ist gleich dem Rang der Matrix $\mathfrak{R}$. Die Zahl $e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_\varrho = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_\varrho$ ist gleich dem g. g. T. aller ϱ-reihigen Unterdeterminanten von $\mathfrak{R}$. Wenn keine von Null verschiedenen Elementarteiler vorkommen, so ist $\overline{M} = \overline{M}_0$, und es gibt nur den Nullübervektor als Vertreter.

§ 3. Es ist uns jetzt möglich, vermöge elementarer Umformungen einer gewissen Matrix die starke Äquivalenz zulässiger Vektorensysteme vollständig zu beherrschen. Wir wenden uns nun der gewöhnlichen Äquivalenz zu.

In der Gruppe $N_{\mathfrak{F}}$, die aus allen unimodularen Matrizen X besteht, für die $X \mathfrak{F} X^{-1} = \mathfrak{F}$ ist, liegt der Normalteiler $Z_{\mathfrak{F}}$, der aus allen unimodularen Matrizen X besteht, für die sogar $XAX^{-1} = A$ für alle A aus $\mathfrak{F}$ ist. $Z_{\mathfrak{F}}$ ist aber gerade die Einheitengruppe des Ringes $V_{\mathfrak{F}}$ aller mit $\mathfrak{F}$ elementweise vertauschbaren ganzzahligen n-reihigen Matrizen. $V_{\mathfrak{F}}$ besitzt eine Basis über dem Ring $\mathfrak{o}$ der ganzen rationalen Zahlen. Diese Basis ist zugleich eine Basis des Vertauschungsringes V aller rationalen mit $\mathfrak{F}$ elementweise vertauschbaren Matrizen bezüglich des Körpers R

der rationalen Zahlen. $V_{\mathfrak{F}}$ ist also eine Ordnung des hyperkomplexen Systemes V über R. Da V aber zugleich der Vertauschungsring des von den Matrizen aus $\mathfrak{F}$ erzeugten R-Schiefringes $\mathfrak{F}^*$ ist, und $\mathfrak{F}^*$ über R voll reduzibel ist, so ist $\mathfrak{F}^*$ halb einfach. Und daher ist der Vertauschungsring V nach einem bekannten Satze von *E. Noether* ebenfalls halb einfach. $Z_{\mathfrak{F}}$ ist also die Einheitengruppe in einer Ordnung eines halbeinfachen Systemes über R. *Siegel* [8] hat eine Methode skizziert, um ein System von endlich vielen Erzeugenden $X_1, X_2, \ldots, X_\lambda$ von $Z_{\mathfrak{F}}$ anzugeben. Übrigens läßt sich in den Fällen $n \leqslant 3$ dies stets auf sehr einfache Weise tun.

Bei Transformation von $\mathfrak{F}$ mit X aus $N_{\mathfrak{F}}$ entsteht der Automorphismus $\begin{pmatrix} A \\ A^X \end{pmatrix}$ von $\mathfrak{F}$. Die Zuordnung

$$X \to \begin{pmatrix} A \\ A^X \end{pmatrix}$$

bewirkt eine homomorphe Abbildung von $N_{\mathfrak{F}}$ auf eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Automorphismengruppe von $\mathfrak{F}$, welche die Gruppe $\mathfrak{J}$ der inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$ stets enthält, da ja $\mathfrak{F}$ zu $N_{\mathfrak{F}}$ gehört. Bei dieser Zuordnung entsprechen dem identischen Automorphismus von $\mathfrak{F}$ genau die Elemente aus $Z_{\mathfrak{F}}$. Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $Z_{\mathfrak{F}}$ ein Normalteiler von $N_{\mathfrak{F}}$ und die Faktorgruppe isomorph zu $\mathfrak{U}$:

$$N_{\mathfrak{F}} / Z_{\mathfrak{F}} \simeq \mathfrak{U} \ .$$

Da nun $\mathfrak{F}$ endlich ist, so ist auch $\mathfrak{U}$ endlich. Es gibt also endlich viele Matrizen $X_{\lambda+1}, \ldots, X_\mu$ aus $N_{\mathfrak{F}}$, die zusammen mit $Z_{\mathfrak{F}}$ ganz $N_{\mathfrak{F}}$ erzeugen:

$$N_{\mathfrak{F}} = \langle X_1, X_2, \ldots, X_\mu \rangle \ .$$

Wir finden ein Vertretersystem von $N_{\mathfrak{F}}$ nach $Z_{\mathfrak{F}}$ z. B. dadurch, daß wir die arithmetische Äquivalenz zwischen den ganzzahligen Darstellungen $A \to A = \Delta(A)$ und $A \to A^\alpha = \Delta^\alpha(A)$ (α beliebiger Automorphismus von $\mathfrak{F}$) der durch $\mathfrak{F}$ bestimmten abstrakten Gruppe untersuchen. Immer dann, wenn Δ zu Δ^α arithmetisch äquivalent ist, finden wir gemäß der in diesem Falle bestehenden Gleichungen

$$\Delta^\alpha(A) = X \cdot \Delta(A) \cdot X^{-1}$$

eine Matrix X aus $N_{\mathfrak{F}}$. Alle diese Matrizen zusammen bilden aber gerade das gesuchte Vertretersystem.

Hilfssatz 2: Der Übergang

$$(\mathfrak{S}_A) \to (X \mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}}) \qquad (X \text{ aus } N_{\mathfrak{F}})$$

bewirkt einen Automorphismus des Moduls M der zulässigen Vektorensysteme, der den Teilmodul M_0 auf sich abbildet.

Beweis von Hilfssatz 2: Es ist

$$X\mathfrak{S}_{(AB)^{X^{-1}}} = X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}B^{X^{-1}}} \equiv X\left(\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}} + A^{X^{-1}}\mathfrak{S}_{B^{X^{-1}}}\right) \equiv X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}} + AX\mathfrak{S}_{B^{X^{-1}}}$$

$$X\left(\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}} + \mathfrak{S}'_{A^{X^{-1}}}\right) = X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}} + X\mathfrak{S}'_{A^{X^{-1}}}$$

$$X^{-1}\left(X\mathfrak{S}_{\left(A^{X^{-1}}\right)^X}\right) = \mathfrak{S}_A$$

$$\left(X\left((E - A^{X^{-1}})\mathfrak{S} + \mathfrak{g}_{A^{X^{-1}}}\right)\right) = \left((E - A)X\mathfrak{S} + X\mathfrak{g}_{A^{X^{-1}}}\right) \in M_0 ,$$

womit alles gezeigt ist.

Bei der gewöhnlichen Äquivalenz werden also alle diejenigen starken Äquivalenzklassen zusammengefaßt, die durch einen der Übergänge $\left(\mathfrak{S}_A\right) \to \left(X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}}\right)$ mit X aus $N_{\mathfrak{F}}$ aus der zu $(\mathfrak{S}_A)$ gehörigen starken Äquivalenzklasse entstehen. Anders gesagt entspricht jeder Matrix X aus $N_{\mathfrak{F}}$ eine Permutation X^* der endlich vielen starken Äquivalenzklassen, so daß alle diese Permutationen zusammen eine zu $N_{\mathfrak{F}}^*$ homomorphe endliche Permutationsgruppe $N_{\mathfrak{F}}^*$ bilden und die gewöhnlichen Äquivalenzklassen bestehen einfach aus dem System von unter $N_{\mathfrak{F}}$ konjugierten starken Äquivalenzklassen.

Dem Automorphismus

$$(\mathfrak{S}_A) \to \left(X\mathfrak{S}_{A^{X^{-1}}}\right)$$

von M entsprechen nun bei dem Isomorphismus zwischen M und $\overline{\overline{M}}$ bei operator-isomorpher Übertragung der Automorphismus

$$S = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{A_1} \\ \mathfrak{S}_{A_2} \\ \vdots \\ \mathfrak{S}_{\nu_1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X\mathfrak{S}_{A_1^{X^{-1}}} \\ X\mathfrak{S}_{A_2^{X^{-1}}} \\ \vdots \\ X\mathfrak{S}_{A_\nu^{X^{-1}}} \end{pmatrix} = \mathfrak{X}S$$

von $\overline{\overline{M}}$, wobei dem Element X die $n\nu$-reihige Matrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} X\,[A_1^{X^{-1}}]^{(1)} & X\,[A_1^{X^{-1}}]^{(2)} & \dots & X\,[A_1^{X^{-1}}]^{(\nu)} \\ X\,[A_2^{X^{-1}}]^{(1)} & X\,[A_2^{X^{-1}}]^{(2)} & \dots & X\,[A_2^{X^{-1}}]^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X\,[A_\nu^{X^{-1}}]^{(1)} & X\,[A_\nu^{X^{-1}}]^{(2)} & \dots & X\,[A_\nu^{X^{-1}}]^{(\nu)} \end{pmatrix}$$

zuzuordnen ist. Dem Automorphismus $S \to \mathfrak{X} S$ von $\overline{\overline{M}}$ entspricht aber bei dem Übergang von $\overline{\overline{M}}$ zu $\mathfrak{Q}^{-1}\,\overline{\overline{M}}$ im Sinne der operator-isomorphen Übertragung der Automorphismus

$$\mathfrak{Q}^{-1} S \to \mathfrak{Q}^{-1} \mathfrak{X}\, \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}^{-1} S \tag{6}$$

von $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}$. Bei diesem Automorphismus wird $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}_0$ auf sich abgebildet. Wir können der Matrix

$$\mathfrak{Q}^{-1}\mathfrak{X}\mathfrak{Q} = (\gamma_{ik}(X)) = (\gamma_{ik})$$

direkt die zu (6) gehörige Permutation der Restklassen von $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}$ nach $\mathfrak{Q}^{-1}\overline{\overline{M}}_0$ entnehmen.

Wenn etwa $\mathfrak{P}\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ Elementarteilergestalt hat, so ist mit den früheren Bezeichnungen

$$\mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{X}\mathfrak{Q} \cdot P_{l_1 l_2 \dots l_\varrho} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\varrho} \gamma_{1k}\, l_k\, e_k^{-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{\varrho} \gamma_{2k}\, l_k\, e_k^{-1} \\ \dots\dots \\ \sum\limits_{k=1}^{\varrho} \gamma_{\varrho k}\, l_k\, e_k^{-1} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

und dieser Übervektor ist stark äquivalent zu $P_{l_1' l_2' \dots l_\varrho'}$, wobei die Zahlen l_i' eindeutig bestimmt sind durch die Kongruenzbedingung

$$l_i' \equiv e_i \cdot \sum_{k=1}^{\varrho} \gamma_{ik} l_k e_k^{-1} \qquad (\text{mod } e_i)$$

und die Ungleichung

$$0 \leq l_i' < e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varrho) \ .$$

Somit finden wir als die zugeordnete Permutation:

$$\pi_{\mathfrak{X}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho} \\ \mathfrak{Q} P_{l_1' l_2' \ldots l_\varrho'} \end{pmatrix}$$

Es genügt dabei, sich auf die endlich vielen Matrizen $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$, die den Erzeugenden $X_1, X_2, \ldots, X_\mu$ von $N_{\mathfrak{F}}$ zugeordnet sind, zu beschränken, denn die sämtlichen Permutationen $\pi_{\mathfrak{X}}$ entstehen durch endlich oftmalige Zusammensetzung der Permutationen $\pi_{\mathfrak{X}_1}, \pi_{\mathfrak{X}_2}, \ldots, \pi_{\mathfrak{X}_\mu}$. Ausgehend von einer starken Äquivalenzklasse, die etwa durch den Übervektor $\mathfrak{Q} P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho}$ repräsentiert werde, fassen wir alle starken Äquivalenzklassen, die aus ihr durch wiederholte Anwendung der Permutationen $\pi_{\mathfrak{X}_1}, \pi_{\mathfrak{X}_2}, \ldots, \pi_{\mathfrak{X}_\mu}$ entstehen, zu einer gewöhnlichen Äquivalenzklasse zusammen. Die gewöhnlichen Äquivalenzklassen repräsentieren aber genau alle Typen nicht isomorpher zu $\mathfrak{F}$ gehöriger Raumgruppen. Damit ist das Speisersche Problem gelöst.

§ 4. Für die praktische Anwendung ist bemerkenswert, daß die den Elementen X aus $\mathfrak{F}$ zugeordneten Automorphismen

$$(\mathfrak{S}_A) \to \left(X \mathfrak{S}_{A X^{-1}}\right)$$

von M die starken Äquivalenzklassen einzeln festlassen. In diesem Falle ist nämlich

$$\begin{aligned} X \mathfrak{S}_{A X^{-1}} = X \mathfrak{S}_{X^{-1} A X} &\equiv X\left(\mathfrak{S}_{X^{-1}} + X^{-1} \mathfrak{S}_A + X^{-1} A \mathfrak{S}_X\right) \\ &\equiv X \mathfrak{S}_{X^{-1}} + \mathfrak{S}_A + A \mathfrak{S}_X \\ &\equiv \mathfrak{S}_A + A \mathfrak{S}_X - \mathfrak{S}_X \\ &\equiv \mathfrak{S}_A + (E - A) \cdot - \mathfrak{S}_X \qquad (\text{mod } \Gamma) \end{aligned}$$

Also ist $\left(X \cdot \mathfrak{S}_{A X^{-1}}\right)$ stark äquivalent zu $(\mathfrak{S}_A)$. Dieser Bemerkung entnehmen wir nun die nützliche Feststellung, daß die in $\mathfrak{F}$ liegenden Erzeugenden von $N_{\mathfrak{F}}$ bei dem im § 3 erklärten Reduktionsverfahren nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Ferner tragen wir der Existenz von $-E_n$ in $N_{\mathfrak{F}}$ gerade dadurch Rechnung, daß stets der Übervektor $\mathfrak{Q}P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho}$ zu dem Übervektor $\mathfrak{Q}P_{-l_1, -l_2, \ldots, -l_\varrho}$ äquivalent ist.

Als Beispiel behandeln wir die Ebenengruppen. Wir setzen dabei die Kenntnis aller endlichen unimodularen Substitutionsgruppen von zwei Variabeln voraus. Durch den hier geschilderten Allgorithmus finden wir, wie zu erwarten stand, tatsächlich 17 Typen:

Vorerst noch zwei allgemeine Bemerkungen.

Die zu $\mathfrak{Q}P_{00\ldots 0}$ gehörige starke Äquivalenzklasse ist zugleich eine gewöhnliche Äquivalenzklasse.

Man stelle die Matrix $\mathfrak{R}$ und die Matrizen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_\mu$ zu einer kombinierten Matrix zusammen, in der wir den oberen Teil $\mathfrak{R}$ und den unteren Teil

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1 \\ \mathfrak{X}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_\mu \end{pmatrix}$$

unterscheiden.

Man bringe die Matrix $\mathfrak{R}$ durch elementare Umformungen in monomiale Gestalt, beteilige aber zugleich den unteren Teil der kombinierten Matrix an den Spaltenumformungen der Matrix $\mathfrak{R}$. Wenn also in der oberen Matrix das a-fache der j-ten Spalte zur h-ten Spalte addiert wird, so soll dasselbe auch in der unteren Matrix geschehen. Danach aber ist in jedem der μ Teile der unteren Matrix das a-fache der h-ten Zeile von der j-ten Zeile zu subtrahieren. Notiere diese Zeilenumformungen der Reihe nach, wie sie vorkommen, etwa $A_{k_1, j_1}^{-a_1}, A_{k_2, j_2}^{-a_2}, \ldots, A_{k_s, j_s}^{-a_s}$! Suche das Vertretersystem der $P_{l_1 l_2 \ldots l_\varrho}$ auf! Bestimme die Permutationen $\pi_{\mathfrak{X}_1}, \pi_{\mathfrak{X}_2}, \ldots, \pi_{\mathfrak{X}_\mu}$ mit Hilfe der umgeformten unteren Matrix, die ja gemäß Konstruktion gerade

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{X}_1\,\mathfrak{Q} \\ \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{X}_2\,\mathfrak{Q} \\ \vdots \\ \mathfrak{Q}^{-1}\,\mathfrak{X}_\mu\,\mathfrak{Q} \end{pmatrix}$$

ist. Man fasse die Vertreter $\mathfrak{Q}P_{l_1 l_2 \cdots l_\varrho}$ der starken Äquivalenzklassen in Systeme von unter $\langle \pi_{\mathfrak{X}_1}, \ldots, \pi_{\mathfrak{X}_\mu} \rangle$ konjugierten, abgesehen von starker Äquivalenz, zusammen. Wähle aus jedem dieser Systeme einen Übervektor aus! Die erhaltenen Übervektoren bilden gerade ein volles System nicht äquivalenter, zulässiger, zu $\mathfrak{F}$ gehöriger Vektorensysteme. Beachte bei dieser Rechnung, daß der Weg von $P_{l_1 l_2 \cdots l_\varrho}$ nach $\mathfrak{Q}P_{l_1 l_2 \cdots l_\varrho}$ über die vorhin notierten Zeilenumformungen, aber in umgekehrter Reihenfolge und mit entgegengesetzt gleichen Exponenten führen, also über

$$A_{h_s, j_s}^{-a_s}, \quad A_{h_{s-1}, j_{s-1}}^{-a_{s-1}}, \quad \ldots, \quad A_{h_1, j_1}^{-a_1}$$

Beispiel:

$$\mathfrak{F} = \langle A_1, A_2 \rangle, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = A_1^2 = E_2, \quad R_2 = A_2^2 = E_2, \quad R_3 = (A_1 A_2)^2 = E_2$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} A_1 + E_2 & \\ & A_2 + E_2 \\ A_1 A_2 + E_2, & A_1 + A_2 \end{pmatrix}$$

Da $A_2 + E_2 = 0$, so kommen in $\mathfrak{R}$ zwei Nullzeilen vor. Nullzeilen dürfen aber fortgelassen werden, so daß eine Matrix

$$\mathfrak{R}' = \begin{pmatrix} A_1 + E_2 & \\ A_1 A_2 + E_2, & A_1 + A_2 \end{pmatrix}$$

mit nur vier Zeilen übrigbleibt. Ferner ist

$$N_{\mathfrak{F}} = \langle X, \mathfrak{F} \rangle, \quad X = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad X A_1 X^{-1} = A_1 A_2,$$

$$X A_2 X^{-1} = A_2, \quad X \mathfrak{S}_{A_1 A_2} = X \mathfrak{S}_{A_1} + X A_1 \mathfrak{S}_{A_2},$$

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} X & X A_1 \\ & X \end{pmatrix}$$

$$
\frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{T}} = \left|\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
 & 2 & & -2 \\
\hline
 & 1 & & -1 \\
1 & & 1 & \\
 & & & 1 \\
 & & 1 &
\end{array}\right| \to \left|\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
 & & & -2 \\
\hline
 & & & -1 \\
1 & & 1 & \\
 & 1 & & 1 \\
-1 & & &
\end{array}\right|
$$

Addiere die 4. zur 2. Spalte! Notiere die Zeilenumformung $A_{2,4}^{-1}$ von $\mathfrak{T}$! Wir finden

$$
P_{l_1 l_2} = \mathfrak{Q} P_{l_1 l_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} l_1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} l_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q}^{-1} \mathfrak{T} \mathfrak{Q} \cdot P_{l_1 l_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} l_2 \\ \frac{1}{2} l_1 \\ \frac{1}{2} l_2 \\ -\frac{1}{2} l_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq l_i < 2 \\ i = 1, 2 \end{matrix}
$$

$$
\pi_{\mathfrak{T}} = (P_{00})\,(P_{11})\,(P_{10} P_{01}), \quad P_{01} \quad \text{scheidet aus!}
$$

Die drei zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Ebenengruppen werden jeweils aus $\mathfrak{T}_2$ und

a) $(A_1, 0)$, $(A_2, 0)$

b) $(A_1, \frac{1}{2}\mathfrak{e}_1)$, $(A_2, 0)$ $\qquad \mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(A_1, \frac{1}{2}\mathfrak{e}_1)$, $(A_2, \frac{1}{2}\mathfrak{e}_2)$

erzeugt.

Bei der Ableitung der Bewegungsgruppen der Ebene mit endlichem Fundamentalbereich (Symmetriegruppen der Flächenornamente) arbeiten wir mit den folgenden unimodularen Matrizen:

$$
A = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}
$$

Wir geben jeweils die Bezeichnung der Gruppe gemäß *Speiser* [6] § 29 und daneben die Erzeugenden der Gruppe, die zu $\mathfrak{T}_2$ hinzutreten, an.

I. Allgemeines ebenes Gitter:

1) $A_1 = E$; $\quad A_1^1 = E$, $\quad \mathfrak{R} = E$; $\quad \mathfrak{C}_1 : (E, 0)$

2) $A_1 = -E$; $A_1^2 = E$, $\quad \mathfrak{R} = (A_1 + E) = 0$; $\quad \mathfrak{C}_2 : (-E, 0)$.

II. Rechtwinkliges Gitter:

3) bis 4) $A_1 = B$; $\quad A_1^2 = E$, $\quad \mathfrak{R} = (A_1 + E) = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{C}_s^I : (B, 0)$

$\mathfrak{C}_s^{II} : (B, \frac{1}{2} \mathfrak{e}_1)$

5) bis 7) $A_1 = B$, $\quad A_2 = -E$; siehe das zuerst behandelte Beispiel!

$\mathfrak{C}_{2v}^I : (B, 0), \; (-E, 0)$

$\mathfrak{C}_{2v}^{II} : (B, \frac{1}{2} \mathfrak{e}_1), \; (-E, 0)$

$\mathfrak{C}_{2v}^{III} : (B, \frac{1}{2} \mathfrak{e}_1), \; (-E, \frac{1}{2} \mathfrak{e}_2)$.

III. Rhombisches Gitter:

8) $A_1 = A$; $\quad A_1^2 = E$, $\quad \mathfrak{R} = (A_1 + E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{C}_s^{III} : (A, 0)$

9) $A_1 = A$, $\quad A_2 = -E$; Relationen und Bildung von $\mathfrak{R}$ wie unter 5) bis 7)!

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & \\ & \\ & -1 \end{matrix}}$$

$\mathfrak{C}_{2v}^{IV} : (A, 0), (-E, 0)$.

IV. Quadratisches Gitter :

10) $\quad A_1 = D\,; \quad A_1^4 = E\,, \quad \mathfrak{R} = (A_1^3 + A_1^2 + A_1 + E) = 0$

$\mathfrak{C}_4 \; : \; (D, 0)$

11) bis 12) $A_1 = D\,, \quad A_2 = B\,; \quad A_1^4 = E\,, \quad A_2^2 = E\,, \quad (A_1 A_2)^2 = E$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} A_1^3 + A_1^2 + A_1 + E & \\ & A_2 + E \\ A_1 A_2 + E & A_1 + A_2 \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß $A_1^3 + A_1^2 + A_1 + E$ verschwindet. Lasse die beiden ersten Zeilen, die ja Nullzeilen sind, fort!

$$\mathfrak{R}' = \boxed{\begin{array}{cccc} & & 2 & \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{cccc} & & 2 & \\ & & & \\ 1 & & & \\ & & & \end{array}}$$

Notiere :

$A_{2,1}\,, \quad A_{3,1}\,, \quad A_{4,1}^{-1}$!

$$P_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\, l \\ 0 \end{pmatrix} \qquad l = 0, 1 \; .$$

Wende der Reihe nach $A_{4,1}\,, \; A_{3,1}^{-1}\,, \; A_{2,1}^{-1}$ an!

$\mathfrak{C}_{4v}^{I} \; : \; (D, 0)\,, \; (B, 0)$

$\mathfrak{C}_{4v}^{II} \; : \; (D, -\frac{1}{2}\,\mathfrak{e}_1)\,, \; (B, \frac{1}{2}\,\mathfrak{e}_1)\; .$

V. Hexagonales Gitter :

13) $A_1 = C\,; \quad A_1^3 = E\,, \quad \mathfrak{R} = (A_1^2 + A_1 + E) = 0$

$\mathfrak{C}_3 \; : \; (C, 0)$

14) $\quad A_1 = C\,, \quad A_2 = A\,; \quad A_1^3 = E\,, \quad A_2^2 = E\,, \quad (A_1 A_2)^2 = E$

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} A_1^2 + A_1 + E & \\ & A_2 + E \\ A_1 A_2 + E & A_1 + A_2 \end{pmatrix}$$

Lasse die ersten beiden Zeilen, die ja verschwinden, fort !

$$\mathfrak{N}' = \boxed{\begin{matrix} & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} & & 1 & \\ & & & \\ & & & \\ -1 & & & \end{matrix}}$$

$$\mathfrak{C}_{3v}^{I} \; : \; (C\,,0)\,,\; (A\,,0)$$

15) $A_1 = C\,, \quad A_2 = -A\;;$

Relationen und Bildung von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ wie unter 14).

$$\mathfrak{N}' = \boxed{\begin{matrix} & & 1 & -1 \\ & & -1 & 1 \\ 2 & & & -2 \\ 1 & & & -1 \end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} & & & -1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{matrix}}$$

$$\mathfrak{C}_{3v}^{II} \; : \; (C\,,0)\,,\; (-A\,,0)$$

16) $A_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -C,\; A_1^6 = E,\; \mathfrak{N} = (A_1^5 + A_1^4 + A_1^3 + A_1^2 + A_1 + E) = 0$

$\mathfrak{C}_6 = (-C\,,0)$

17) $A_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -C\,, \quad A_2 = A\;; \quad A_1^6 = E\,, \quad A_2^2 = E\,, \quad (A_1 A_2)^2 = E$

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} A_1^5 + A_1^4 + A_1^3 + A_1^2 + A_1 + E & \\ & A_2 + E \\ A_1 A_2 + E & A_1 + A_2 \end{pmatrix}$$

Lasse die beiden ersten Nullzeilen fort !

$$\mathfrak{R}' = \boxed{\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 2 & & & 2 \\ 1 & & & 1 \end{array}} \to \boxed{\begin{array}{cccc} & & & 1 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & & & \end{array}}$$

$$\mathfrak{C}_{6v} : (-C, 0), (A, 0)$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Schoenfließ, A.* Dr., Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig 1891.

[2] *Bieberbach,* Über die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich. Gött. Nachr. 1910, 75.

[3] —, Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. **70**, 297. — II dto. Die Gruppen mit endlichem Fundamentalbereich, Math. Ann. **72**, 400—412.

[4] —, Über die Minkowskische Reduktion der positiven quadratischen Formen und die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen, Gött. Nachr. 1912, 207—216.

[5] *Frobenius,* Über die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Berl. Ber. 1911, 654—665.

[6] *Speiser, A.*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937.

[7] *Zassenhaus, H.*, Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen, Hamb. Abh. **12** (1938) 298—312.

[8] *Siegel, Carl Ludwig,* Discontinuous groups, Annals of Mathematics **44**, 674—689 (1943).

Zusatz bei der Korrektur:

In dem Buche „Die Bewegungsgruppen der Kristallographie“ von *J. J. Burkhardt,* Basel 1947, wird im Prinzip dasselbe Verfahren wie von mir angegeben für die Herleitung der Raumgruppen im R_3.

Zassenhaus

(Eingegangen den 14. Mai 1947.)