

# Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale.

Autor(en): **Grioli, Giuseppe**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **19 (1946-1947)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-17346>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Vibrazioni e pressioni critiche delle piastre anulari soggette a pressione radiale \*)

Di GIUSEPPE GRIOLI, Roma

## SOMMARIO

Viene studiato il problema delle vibrazioni trasversali delle piastre anulari soggette a pressioni radiali sui due bordi e viene stabilita una condizione sufficiente di esistenza di autovalori reali del parametro da cui dipendono le autofrequenze. Si collega il problema delle vibrazioni a quello delle pressioni critiche caratterizzando l'andamento delle curve di autofrequenza.

Vengono fatte osservazioni intorno al comportamento dell'energia totale e al lavoro della sollecitazione radiale in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione.

## Introduzione <sup>1)</sup>

Nello studio delle vibrazioni trasversali di una piastra è consuetudine considerare vibrazioni sincrone che nel caso delle piastre anulari si esprimono nella forma

$$w_{ns}(\varrho, \theta; t) = u_{ns}(\varrho) e^{in\theta} \varphi_{ns}(t) \quad (1)$$
$$(n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots; s = 1, 2, \dots),$$

ove  $w_{ns}(\varrho, \theta; t)$  rappresenta lo spostamento elastico dei punti del piano  $\alpha$  della sezione media riferito ad un sistema di coordinate polari  $\varrho, \theta$ , con il polo nel centro della piastra e alla variabile tempo  $t$ . Se  $f_{ns}$  indicano le autofrequenze della struttura vibrante,  $\mu$  e  $N$  la densità superficiale e la rigidità flessionale della piastra, supposte costanti, la quantità

$$\sigma_{ns} = 4\pi^2 \frac{\mu}{N} f_{ns}^2,$$

coincide con un autovalore del problema al contorno che traduce analiticamente quello delle vibrazioni della piastra, mentre  $w_{ns}(\varrho, \theta; t)$  è un'autosoluzione competente a detto autovalore. Se sui bordi esterno ed interno della piastra agiscono, nel piano  $\alpha$  ed in direzione radiale, le pressioni uniformi  $p_e, p_i$  rispettivamente, gli autovalori  $\sigma_{ns}$  risultano funzioni dei parametri  $p_e, p_i$ .

---

\*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma.

<sup>1)</sup> Taluni dei risultati contenuti nel presente lavoro (precisamente quelli di tipo esistenziale) sono alla base di ricerche esposte in alcune altre note che a questa faranno seguito.

Per lo studio delle oscillazioni della piastra intorno alla sua posizione di equilibrio interessa quindi la ricerca degli autovalori  $\sigma_{ns}$  reali e positivi.

La dimostrazione dell'esistenza degli autovalori  $\sigma_{ns}$  si riconnette nel caso d'incastro su entrambi i bordi della piastra alle ricerche di Cimino <sup>2)</sup> e Giunti <sup>3)</sup> sulle equazioni differenziali ordinarie di forma autoaggiunta, ricerche riprese successivamente da Kamke <sup>4)</sup> ed estese a tipi più generali di condizioni al contorno. Con lo scopo di liberarmi da alcune ipotesi restrittive contenute nei lavori citati e invece non sempre soddisfatte nei casi che mi propongo di considerare, farò ricorso alla teoria delle equazioni integrali <sup>5)</sup> per stabilire che — tanto per le piastre anulari, come per quelle piene — tali autovalori effettivamente esistono e sono tutti reali almeno quando è soddisfatta una certa condizione che dirò *condizione S*.

Tale condizione sufficiente di esistenza e realtà, come mostrerò nell'ultimo paragrafo, è collegata direttamente al teorema di reciprocità in Meccanica attraverso considerazioni di simmetria della funzione d'influenza della piastra. Precisamente mostrerò come la condizione *S* non rappresenta altro che la traduzione analitica del teorema di reciprocità. Limitatamente al caso delle piastre anulari mostrerò come tale condizione *S* sia soddisfatta nei casi che più comunemente si presentano [vincolo di appoggio rigido, incastro rigido, assenza di vincolo] riservandomi di esaminare il caso delle piastre piene in una prossima nota.

Il problema delle vibrazioni della piastra in presenza di sollecitazione radiale è collegato a quello delle pressioni critiche. Detto  $\lambda^*$  un comune fattore moltiplicativo dei carichi  $p_e$ ,  $p_i$ , le pressioni critiche corrispondono agli autovalori  $\lambda_{ns}$  del parametro

$$\lambda = \frac{\lambda^*}{N}$$

del problema statico che viene a essere espresso dallo stesso sistema differenziale che regola le vibrazioni della piastra quando si ponga a zero il parametro  $\sigma$  di cui i  $\sigma_{ns}$  sono autovalori. L'esistenza degli autovalori  $\lambda_{ns}$  è assicurata nei casi vincolari più comuni [appoggio rigido, incastro rigido]

---

<sup>2)</sup> *Cimmino*: "Autovalori e autosoluzioni nelle equazioni differenziali lineari autoaggiunte di ordine superiore", *Mathematische Zeitschrift* 32 (1930).

<sup>3)</sup> *Giunti*: "Sviluppi in serie tipo Fourier di un vettore, secondo autovettori di un certo problema, e applicazione all'integrazione dell'equazione lineare a derivate parziali del 4° ordine competente al moto delle sbarre vibranti, dotate d'inerzia rotatoria", *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo* LXIII, 1940—41.

<sup>4)</sup> *Kamke*: "Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen", *Mathematische Zeitschrift* 45, 1939, pag. 759; 46, 1940, pag. 251, pag. 231.

<sup>5)</sup> *M. Picone*: "Appunti di Analisi Superiore", Rondinella, Napoli 1940.



In tali ipotesi mostrerò che la configurazione piana di equilibrio può essere instabile. Con riferimento alle condizioni di vincolo più frequenti [appoggio rigido, incastro rigido] oppure al caso di assenza di vincolo dimostrerò la seguente proprietà — *proprietà A* — delle curve  $\sigma = \sigma_{ns}(\lambda)$  di autofrequenza.

Per ciascun  $n$ , considerata la successione [che chiamerò successione  $\{\sigma\}$ ]

$$\{\sigma\} \quad \sigma_{n1}(\lambda) \leq \sigma_{n2}(\lambda) \leq \dots \leq \sigma_{ns}(\lambda) \leq \dots$$

degli autovalori  $\sigma_{ns}(\lambda)$ , la funzione  $\sigma = \sigma_{ns}(\lambda)$  ha derivata rispetto a  $\lambda$  sempre negativa e si annulla per <sup>9)</sup>  $\lambda = \lambda_{ns}$  [pensare anche i  $\lambda_{ns}$  non decrescenti al crescere di  $s$ ]. In una rappresentazione cartesiana di assi  $\lambda, \sigma$ , la curva di equazione  $\sigma = \sigma_{ns}(\lambda)$  al variare di  $\lambda$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , ha dunque ordinata sempre decrescente e sta nel semipiano positivo per  $\lambda < \lambda_{ns}$ , in quello negativo per  $\lambda > \lambda_{ns}$ . Così degli autovalori del parametro  $\sigma$ , corrispondenti ad un prefissato  $\lambda$ :

- 1°  $s - 1$  e soltanto  $s - 1$  sono negativi, uno nullo e gli altri positivi per  $\lambda = \lambda_{ns}$  ;
- 2°  $s$  e soltanto  $s$  sono negativi e gli altri tutti positivi per  $\lambda_{ns} < \lambda < \lambda_{ns+1}$  ;
- 3° tutti sono positivi per  $\lambda < \lambda_{n1}$ .

In corrispondenza allo spostamento elastico  $u_{ns}(\varrho) \cos n \vartheta$ , ove si pensino normalizzate le autosoluzioni  $u_{ns}(\varrho)$  si ha in più :

- a) la derivata  $\frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda}$  [a meno del fattore  $-\pi$  se  $n \neq 0$ ,  $-2\pi$  se  $n = 0$ ] esprime il lavoro effettuato in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione dagli sforzi che si generano nella piastra quando si pensi alla sollecitazione esterna corrispondente a  $\lambda^* = 1$  ;
- b) l'energia potenziale elastica di deformazione e il lavoro effettuato in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione dalla sollecitazione esterna ( $p_e, p_i$ ) non variano al variare di  $u_{ns}(\varrho)$  nel sistema delle autosoluzioni competenti all'autovalore  $\sigma_{ns}$ .

---

<sup>9)</sup> Come è stato osservato nei due casi d'incastro e appoggio l'esistenza di infiniti autovalori del parametro  $\lambda$  è assicurata dalle ricerche di Cimmino e Kamke [vedi note <sup>2)</sup>; <sup>4)</sup>]. Pur non entrando in merito alla questione analitica dell'esistenza di tali autovalori [assicurata d'altronde dall'intuizione meccanica] nel caso che almeno uno dei due bordi della piastra sia libero, osservo tuttavia che anche nel caso della non esistenza di autovalori reali del parametro  $\lambda$  tutte le considerazioni svolte in questa nota mantengono pienamente la loro validità, salvo modifiche formali nei loro enunciati che risultano bene evidenti e sulle quali non mi soffermo. Aggiungo soltanto che l'assenza di autovalori reali di  $\lambda$  porta di conseguenza la stabilità della configurazione piana di equilibrio della piastra per qualunque  $\lambda$  e le  $\sigma_{ns}(\lambda)$  risultano sempre positive, in base alla circostanza che in tal caso  $V_n[v; \lambda]$  e  $R_n[v; \lambda]$  [vedi (51), (52)] si mantengono sempre positive.

## § 1° Posizione del problema al contorno.

Denoto con  $r$ ,  $R$  i raggi interno ed esterno della piastra e pongo

$$\left. \begin{aligned} p_e &= -\lambda^* q_e , \\ p_i &= -\lambda^* q_i ; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{r^2 R^2}{R^2 - r^2} (q_e - q_i) , \\ B &= \frac{r^2 q_i - R^2 q_e}{R^2 - r^2} ; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_\rho &= \frac{A}{\rho^2} + B , \\ \bar{\sigma}_\theta &= -\frac{A}{\rho^2} + B . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Lo stato tensionale piano creato nella piastra dai carichi uniformi  $p_e$ ,  $p_i$  viene espresso notoriamente dalle formule<sup>10)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\lambda^* \bar{\sigma}_\rho , \\ \sigma_\theta &= -\lambda^* \bar{\sigma}_\theta , \\ \sigma_{\rho\theta} &= 0 , \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ove è evidente il significato dei simboli  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{\rho\theta}$ .

Il lavoro eseguito dalla sollecitazione attiva  $[\sigma_\rho, \sigma_\theta; \sigma_{\rho\theta}]$  in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione valutate con riferimento alla flessione della piastra definita dallo spostamento  $w(\rho, \theta; t)$  è — tenuto conto di (5)

$$L(w) = \frac{1}{2} \lambda^* \int_D \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 \bar{\sigma}_\rho + \left( \frac{\partial w}{\rho \partial \theta} \right)^2 \bar{\sigma}_\theta \right\} \rho d\rho d\theta , \quad (6)$$

l'integrazione essendo estesa al campo  $D$  corrispondente alla sezione media della piastra.

Pongo

$$H(w) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ L(w) - W(w) + \frac{1}{2} \int_D \mu \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \rho d\rho d\theta \right\} dt , \quad (7)$$

ove  $t_0$  e  $t_1$  rappresentano gli istanti iniziale e finale del moto e  $W(w)$  l'energia potenziale elastica: essa ha la solita espressione

<sup>10)</sup> S. Timoshenko: "Théorie de l'élasticité" pag. 59.

$$W(w) = \frac{N}{2} \int_D \left\{ (\Delta w)^2 - \frac{2(1-\nu)}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 w}{\rho \partial \theta^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\partial w}{\rho \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho d\theta, \quad (8)$$

se con  $\nu$  si denota il coefficiente di Poisson.

È noto il procedimento abituale con cui in base al principio di Hamilton si ricavano le equazioni del moto del sistema: nel caso in esame esplicitando il secondo membro di (7) in base a (6) (8) e imponendone la stazionarietà rispetto ad ogni variazione di  $w$  nulla negli istanti  $t_0, t_1$  e soddisfacente alla eventuale condizione di annullarsi lei sola o lei e la sua derivata prima rispetto a  $\rho$ , su quello dei due bordi [o su entrambi] sul quale le condizioni di vincolo lo richiedono per la stessa  $w$ , si ricava l'equazione differenziale

$$N\Delta \Delta w + \lambda^* \left\{ \bar{\sigma}_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\rho} \left[ \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \right\} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

con le relative condizioni al contorno che possono porsi nella forma

$$\left. \begin{aligned} l_1(w) = l_2(w) = 0, & \quad \rho = r, \\ L_1(w) = L_2(w) = 0, & \quad \rho = R, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

se  $l_i, L_i$ , ( $i = 1, 2$ ), denotano operatori differenziali lineari omogenei [includenti al più le derivate terze] la cui struttura caso per caso resta definita, su ciascun bordo, dall'assenza di vincolo o dal tipo di vincolo.

Nei casi qui considerati, detto  $\rho = a$  uno qualunque dei due bordi  $\rho = r, \rho = R$ , le (10) si esplicitano in

$$w = \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0, \quad \rho = a, \quad (11)$$

per il vincolo d'incastro rigido;

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad \rho = a, \quad (12)$$

per il vincolo di appoggio rigido;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \Delta w + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \lambda \bar{\sigma}_\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0, \end{aligned} \right\} \quad \rho = a, \quad (13)$$

in assenza di vincolo.

## § 2° Trasformazione del problema al contorno.

Per ottenere del sistema differenziale (9) (10) soluzioni sincrone occorre cercare di esso soluzioni del tipo  $U(\varrho, \theta)\varphi(t)$  e si constata che si può soddisfare alle (9) (10) assumendo per  $U(\varrho, \theta)$  una soluzione delle equazioni

$$\Delta\Delta U(\varrho, \theta) + \lambda \left\{ \bar{\sigma}_\varrho \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho^2} + \bar{\sigma}_\theta \frac{1}{\varrho} \left[ \frac{\partial U}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] \right\} - \sigma U = 0, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} l_1(U) = l_2(U) = 0, & \quad \varrho = r, \\ L_1(U) = L_2(U) = 0, & \quad \varrho = R, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

e per  $\varphi(t)$  quelle della

$$\varphi''(t) + \frac{\sigma N}{\mu} \varphi(t) = 0.$$

La ricerca delle soluzioni del sistema (14) (15) coincide manifestamente con quella, per ogni fissato  $\lambda$ , degli autovalori del parametro  $\sigma$  per le equazioni omogenee (14) (15). Per la completa ricerca delle soluzioni delle (14) (15) porrò

$$U(\varrho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} u_n(\varrho) e^{in\theta},$$

con

$$u_n(\varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\varrho, \theta) e^{-in\theta} d\theta,$$

e ricercherò le funzioni  $u_n(\varrho)$  nell'intervallo  $(r, R)$ . Dalle (14) (15) si deduce

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l_1(U) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} l_2(U) e^{-in\theta} d\theta = 0, & \quad l = r, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_1(U) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L_2(U) e^{-in\theta} d\theta = 0. & \quad l = R. \end{aligned} \right\}$$

Con facili calcoli si constata che le  $u_n(\varrho)$  devono verificare le equazioni

$$T_n(u_n) + \lambda E_n(u_n) - \sigma \varrho u_n = 0, \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} l_{1n}(u_n) = l_{2n}(u_n) = 0, & \quad \varrho = r \\ L_{1n}(u_n) = L_{2n}(u_n) = 0, & \quad \varrho = R \end{aligned} \right\} \quad (17)$$



ove si è posto

$$T_n = \frac{d^2}{d\rho^2} \left( \rho \frac{d^2}{d\rho^2} \right) - \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + 2n^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) + \frac{n^4 - 4n^2}{\rho^3}, \quad (18)$$

$$E_n = \frac{d}{d\rho} \left[ \bar{\sigma}_\rho \rho \frac{d}{d\rho} \right] - \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\rho} n^2, \quad (19)$$

$$l_{sn}(u_n) = \int_{-\pi}^{\pi} l_s(U) e^{-in\theta} d\theta, \quad \rho = r, \quad (s = 1, 2),$$

$$L_{sn}(u_n) = \int_{-\pi}^{\pi} L_s(U) e^{-in\theta} d\theta, \quad \rho = R.$$

Vediamo dunque che tutti gli indicati autovalori del parametro  $\sigma$  devono ricercarsi proprio tra gli autovalori dello stesso  $\sigma$  nelle (16) (17).

La funzione

$$U(\rho, \theta) = u_{ns}(\rho) e^{in\theta},$$

con  $u_{ns}(\rho)$  autosoluzione del sistema (16) (17) competente all'autovalore  $\sigma_{ns}$  [contenente eventualmente costanti arbitrarie in numero uguale al rango di  $\sigma_{ns}$ ], è autosoluzione delle (14) (15) per  $\sigma = \sigma_{ns}$ , onde si riconosce che tutti e soli gli autovalori di  $\sigma$  nelle (14) (15) si hanno per  $\sigma = \sigma_{ns}$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ ;  $s = 1, 2, \dots$ ).

### § 3° Condizione sufficiente di esistenza S.

Distinguo i due casi:

- a)  $\lambda$  non è autovalore del problema (16) (17), per  $\sigma = 0$ ;
- b)  $\lambda$  coincide con un prefissato autovalore  $\lambda_{ns}$  di tale problema.

Caso a)

Detta  $G_n(\rho, \rho'; \lambda)$  la funzione di Green dell'operatore  $T_n + \lambda E_n$  relativa alle condizioni al contorno espresse da (17), il sistema (16), (17) si traduce nella equivalente equazione integrale

$$u_n(\rho) = \sigma \int_r^R G_n(\rho, \rho'; \lambda) u_n(\rho') \rho' d\rho', \quad \lambda \neq \lambda_{ns}, \quad (s = 1, 2, \dots); \quad (20)$$

Caso b)

La (20) perde significato per il fatto che per  $\lambda = \lambda_{ns}$   $G_n(\rho, \rho'; \lambda)$  presenta una singolarità. Convien allora considerare anzichè il problema (16), (17); l'altro

$$T_n(u_n) + \lambda_{ns} E_n(u_n) + k \varrho u_n = \sigma \varrho u_n, \quad r \leq \varrho \leq R, \quad (16')$$

$$\left. \begin{aligned} l_{1n}(u_n) = l_{2n}(u_n) &= 0, & \varrho = r, \\ L_{1n}(u_n) = L_{2n}(u_n) &= 0, & \varrho = R, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ove  $k$  è una costante soddisfacente unicamente alla condizione che  $\lambda_{ns}$  non sia autovalore relativo alle equazioni (16'), (17) considerate per  $\sigma = 0$ .

Detta  $G_n^*(\varrho, \varrho', k)$  la funzione di Green dell'operatore  $T_n + \lambda_{ns} E_n + k \varrho$  relativa alle condizioni al contorno (17), il sistema (16'), (17) si traduce nell'equazione integrale

$$u_n(\varrho) = \sigma \int_{-r}^R G_n^*(\varrho, \varrho'; k) u_n(\varrho') \varrho' d\varrho'. \quad (20')$$

È evidente allora che gli autovalori  $\sigma_{nr}(\lambda_{ns})$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ), del parametro  $\sigma$  nel problema (16), (17) sono dati dalla formula

$$\sigma_{nr}(\lambda_{ns}) = \sigma_{nr}^* - k, \quad (r = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

se con  $\sigma_{nr}^*$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ), si denotano gli autovalori forniti da (20').

### *Enunciato della condizione S.*

Per equazioni integrali del tipo (20), (20') esiste tutta una teoria<sup>11)</sup> che assicura l'esistenza di autovalori reali ogni qualvolta il nucleo reale è simmetrico o almeno simmetrizzabile. Nei casi che qui considererò determinerò addirittura la condizione di simmetria rispetto alle variabili  $\varrho, \varrho'$  delle funzioni  $G_n(\varrho, \varrho'; \lambda)$ ,  $\lambda \neq \lambda_{ns}$ ;  $G_n^*(\varrho, \varrho'; k)$ .

Tale condizione di simmetria porta a stabilire una stessa equazione che vincola i dati al contorno espressi da (17) e che fornisce proprio la menzionata condizione sufficiente di esistenza S.

Negli sviluppi seguenti mi riferirò alla funzione  $G_n(\varrho, \varrho'; \lambda)$ ,  $\lambda \neq \lambda_{ns}$ , risultando evidente che identiche considerazioni possono ripetersi per  $G_n^*(\varrho, \varrho'; k)$ .

Detti  $\xi$  e  $\eta > \xi$  due valori di  $\varrho'$  interni all'intervallo  $r \leftrightarrow R$ , chiamo per semplicità  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$  le funzioni

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(\varrho) &= G_n(\varrho, \xi; \lambda), \\ \psi_n(\varrho) &= G_n(\varrho, \eta; \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

<sup>11)</sup> Vedi nota <sup>5)</sup>.

Pongo

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_n(\varrho) &= \varrho [\varphi_n \psi_n''' - \psi_n \varphi_n''' + \varphi_n'' \psi_n' - \varphi_n' \psi_n''] + \\ &\quad + \varphi_n \psi_n'' - \psi_n \varphi_n'' + \frac{1+2n^2}{\varrho} (\varphi_n' \psi_n - \psi_n' \varphi_n) , \\ \tau_n(\varrho) &= \varrho \bar{\sigma}_\varrho (\varphi_n \psi_n' - \varphi_n' \psi_n) , \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ove per semplicità di scrittura ho indicato con l'apice la derivazione rispetto a  $\varrho$ .

*Condizione necessaria e sufficiente per la simmetria della funzione  $G_n(\varrho, \varrho'; \lambda)$  è — come dimostrerò — che sia soddisfatta l'equazione<sup>12)</sup>*

$$\Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \lambda \{ \tau_n(R) - \tau_n(r) \} = 0 . \quad (24)$$

La condizione  $S$  si può dunque enunciare :

*Condizione sufficiente per l'esistenza di autovalori reali del parametro  $\sigma$  del problema (16), (17) è che sia soddisfatta la (24) per ogni coppia di funzioni  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$  verificanti le condizioni al contorno (17).*

*Giustificazione della (24).*

Le funzioni  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$ , in quanto espresse da (22), soddisfano al sistema (16), (17), posto ivi  $\sigma = 0$ , e sono continue con tutte le derivate nell'intervallo  $r \leq \varrho \leq R$  ad eccezione del punto  $\varrho = \xi$  la  $\varphi_n(\varrho)$ , del punto  $\varrho = \eta$  la  $\psi_n(\varrho)$ , ove le derivate terze presentano le discontinuità espresse da<sup>13)</sup>

<sup>12)</sup> Per operatori del quarto ordine del tipo

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} \left\{ \eta(\varrho) \frac{d^2}{d\varrho^2} \right\} + \eta(\varrho) ,$$

risultato analogo è già ottenuto: *M. Picone*, "Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine.", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*; vol. XI; pag. 132.

<sup>13)</sup> Che la discontinuità della derivata terza rispetto a  $\varrho$  della funzione  $\varphi_n(\varrho, \xi)$  sia quella espressa da (25) si constata immediatamente osservando che la funzione

$$u_n^*(\varrho) = \int_r^R \varphi_n(\varrho, \xi) f(\xi) d\xi$$

soddisfa all'equazione

$$T_n(u_n^*) + \lambda E_n(u_n^*) = f(\varrho)$$

e alle condizioni al contorno (17), qualunque sia  $f(\varrho)$ . Analogamente dicasi per la  $\psi_n(\varrho, \xi)$ .

$$\left. \begin{aligned} [\varphi_n''']_{\varrho=\xi^+} - [\varphi_n''']_{\varrho=\xi^-} &= \frac{1}{\xi}, \\ [\psi_n''']_{\varrho=\eta^+} - [\psi_n''']_{\varrho=\eta^-} &= \frac{1}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Pongo

$$A_n = \int_r^R [\varphi_n T_n(\psi_n) - \psi_n T_n(\varphi_n)] d\varrho + \lambda \int_r^R [\varphi_n E_n(\psi_n) - \psi_n E_n(\varphi_n)] d\varrho. \quad (26)$$

Tenendo conto delle (25) con facili calcoli si ricava come espressione di  $A_n$

$$A_n = \Gamma_n(\xi^-) - \Gamma_n(\xi^+) + \Gamma_n(\eta^-) - \Gamma_n(\eta^+) + \Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \\ + \lambda \{ \tau_n(\xi^-) - \tau_n(\xi^+) + \tau_n(\eta^-) - \tau_n(\eta^+) + \tau_n(R) - \tau_n(r) \}. \quad (27)$$

Data la continuità delle funzioni  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$  e delle loro derivate prime e seconde, nel calcolo dei termini in  $\xi^-$ ,  $\xi^+$ ,  $\eta^-$ ,  $\eta^+$  contenuti in (27), solo i termini contenenti le derivate terze danno un effettivo contributo. Tenendo presenti le (23) e mettendo in evidenza le variabili da cui  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  dipendono si ottiene così da (27):

$$A_n = \xi \varphi_n(\xi, \xi) \{ [\psi_n''']_{\varrho=\xi^-} - [\psi_n''']_{\varrho=\xi^+} \} - \\ - \xi \psi_n(\xi, \eta) \{ [\varphi_n''']_{\varrho=\xi^-} - [\varphi_n''']_{\varrho=\xi^+} \} + \\ + \eta \varphi_n(\eta, \xi) \{ [\psi_n''']_{\varrho=\eta^-} - [\psi_n''']_{\varrho=\eta^+} \} - \\ - \eta \psi_n(\eta, \eta) \{ [\varphi_n''']_{\varrho=\eta^-} - [\varphi_n''']_{\varrho=\eta^+} \} + \\ + \Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \lambda [\tau_n(R) - \tau_n(r)]. \quad (28)$$

Osservando che le discontinuità che le derivate terze di  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  presentano sono esclusivamente quelle espresse dalle (25), da (28) si ricava in definitiva

$$A_n = \psi_n(\xi, \eta) - \varphi_n(\eta, \xi) + \Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \lambda [\tau_n(R) - \tau_n(r)]. \quad (29)$$

In base alla definizione (26) di  $A_n$  e al fatto che  $\varphi_n$  e  $\psi_n$  soddisfano al sistema (16), (17) posto ivi  $\sigma = 0$ , il primo membro di (29) è certamente nullo.

Di conseguenza, tenendo presenti le definizioni (22) di  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  si ha

$$-G_n(\xi, \eta; \lambda) + G_n(\eta, \xi; \lambda) = \Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \lambda [\tau_n(R) - \tau_n(r)],$$

da cui segue evidentemente che la cercata condizione necessaria e sufficiente per la simmetria della funzione  $G_n(\varrho, \varrho'; \lambda)$  è proprio espressa dalla (24).

*Condizioni di vincolo particolari.*

Mostrerò subito che ogni qualvolta sul bordo  $\varrho = a$  valgono condizioni di incastro rigido, di appoggio rigido o di assenza di vincolo, risulta

$$\Gamma_n(a) + \lambda \tau_n(a) = 0 \quad (30)$$

comunque si scelgano le funzioni  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$ , purchè verificanti le condizioni al contorno.

Con ciò la (24) viene ad essere soddisfatta. Distinguerò a tal fine i tre casi :

Caso a) : *Incastro rigido.*

Le condizioni al contorno a cui soddisfa lo spostamento elastico  $u_n(\varrho)$  sul bordo  $\varrho = a$  sono quelle che si deducono da (11), tenendo presente la forma (1) di  $w(\varrho, \theta; t)$ .

Poichè  $\varphi_n(\varrho)$  e  $\psi_n(\varrho)$ , devono verificare le medesime condizioni, esse soddisferanno alle equazioni :

$$\varphi_n(a) = \varphi'_n(a) = \psi_n(a) = \psi'_n(a) . \quad (31)$$

Basta allora osservare la forma delle (23) per constatare che la (30) è soddisfatta insieme a

$$\Gamma_n(a) = \tau_n(a) = 0 . \quad (32)$$

Caso b) : *Appoggio rigido.*

$\varphi_n(\varrho)$  e  $\psi_n(\varrho)$  verificano insieme a  $u_n(\varrho)$  le equazioni :

$$\varphi_n(a) = \psi_n(a) = 0 , \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n'' + \frac{\nu}{\varrho} \left( \varphi_n' - \frac{n^2 \varphi_n}{\varrho} \right) &= 0 , & \varrho = a , \\ \psi_n'' + \frac{\nu}{\varrho} \left( \psi_n' - \frac{n^2 \psi_n}{\varrho} \right) &= 0 , & \varrho = a . \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Moltiplicando la (34.1) per  $\psi_n'$  e sottraendo da essa la (34.2) moltiplicata per  $\varphi_n'$  si ottiene [tenendo presente le (33)] :

$$\varphi_n'' \psi_n' - \varphi_n' \psi_n'' = 0 , \quad \varrho = a . \quad (35)$$

In base alle (33), (35), le (23) danno ancora le (30) e la (24) risulta anche ora verificata.

Caso c): *Assenza di vincolo.*

Le condizioni al contorno a cui soddisfano insieme con la  $u_n(\varrho)$  le funzioni  $\varphi_n(\varrho)$ ,  $\psi_n(\varrho)$  sono

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n'' + \frac{\nu}{\varrho} \left( \varphi_n' - \frac{n^2 \varphi_n}{\varrho} \right) &= 0 \\ \varphi_n''' + \frac{\varphi_n''}{\varrho} - \frac{1 + n^2(2 - \nu)}{\varrho^2} \varphi_n' + \frac{3 - \nu}{\varrho^3} n^2 \varphi_n + \lambda \bar{\sigma}_\varrho \varphi_n' &= 0 \end{aligned} \right\} \varrho = a, \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_n'' + \frac{\nu}{\varrho} \left( \psi_n' - \frac{n^2 \psi_n}{\varrho} \right) &= 0, \\ \psi_n''' + \frac{\psi_n''}{\varrho} - \frac{1 + n^2(2 - \nu)}{\varrho^2} \psi_n' + \frac{3 - \nu}{\varrho^3} n^2 \psi_n + \lambda \bar{\sigma}_\varrho \psi_n' &= 0. \end{aligned} \right\} \varrho = a, \quad (37)$$

Moltiplicando la (36.1) per  $\psi_n'$ , la (36.2) per  $\psi_n$  e sottraendo da esse le corrispondenti (37) dopo averle moltiplicate rispettivamente per  $\varphi_n'$  e  $\varphi_n$ , si ricava:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n'' \psi_n' - \psi_n'' \varphi_n' - \frac{n^2 \nu}{\varrho^2} (\varphi_n \psi_n' - \varphi_n' \psi_n) &= 0, \quad \varrho = a, \\ \varphi_n''' \psi_n - \psi_n''' \varphi_n + \frac{\varphi_n'' \psi_n - \varphi_n \psi_n''}{\varrho} - \frac{1 + n^2(2 - \nu)}{\varrho^2} (\varphi_n' \psi_n - \varphi_n \psi_n') + \\ + \lambda \bar{\sigma}_\varrho (\varphi_n' \psi_n - \varphi_n \psi_n') &= 0, \quad \varrho = a. \end{aligned} \right\} (38)$$

Tenendo presenti le (23), la (38.2), moltiplicata per  $a$ , si scrive

$$- \Gamma_n(\varrho) + \varrho (\varphi_n'' \psi_n' - \varphi_n' \psi_n'') - \frac{n^2 \nu}{\varrho} (\varphi_n \psi_n' - \varphi_n' \psi_n) - \lambda \tau_n(\varrho) = 0, \quad \varrho = a,$$

e in base a (38.1) dà

$$\Gamma_n(a) + \lambda \tau_n(a) = 0$$

che è proprio la (30).

#### § 4° Pressioni critiche.

La ricerca delle pressioni critiche si riduce in realtà a quella degli autovalori del parametro  $\lambda$  nel problema al contorno cui danno luogo le (16), (17) per  $\sigma = 0$ .

Siano  $\lambda_{nr}$ ,  $\lambda_{ns}$  due autovalori distinti del parametro  $\lambda$  e  $\bar{u}_{nr}(\rho)$ ,  $\bar{u}_{ns}(\rho)$  le corrispondenti autofunzioni. Tenuto presente che per ora si suppone  $\sigma = 0$ , da (16), (17) si ricava facilmente

$$\int_r^R [\bar{u}_{nr} T_n(\bar{u}_{ns}) - \bar{u}_{ns} T_n(\bar{u}_{nr})] \rho d\rho = -\lambda_{ns} \int_r^R \bar{u}_{nr} E_n(\bar{u}_{ns}) \rho d\rho + \\ + \lambda_{nr} \int_r^R \bar{u}_{ns} E_n(\bar{u}_{nr}) \rho d\rho \quad (39)$$

e da questa, tenendo conto di (23.1) e dell'espressione (19) di  $E_n$ , si ottiene

$$\Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) = (\lambda_{ns} - \lambda_{nr}) \int_r^R \left\{ \bar{\sigma}_\rho \bar{u}'_{nr} \bar{u}'_{ns} + \right. \\ \left. + \bar{\sigma}_\theta \frac{n^2}{\rho^2} \bar{u}_{nr} \bar{u}_{ns} \right\} \rho d\rho - \left| \rho \bar{\sigma}_\rho (\lambda_{ns} \bar{u}_{nr} \bar{u}'_{ns} - \lambda_{nr} \bar{u}'_{nr} \bar{u}_{ns}) \right|_r^R, \quad (40)$$

ove  $\Gamma_n(\rho)$  si pensi costituita mediante le funzioni  $\bar{u}_{nr}(\rho)$ ,  $\bar{u}_{ns}(\rho)$  anzichè  $\varphi_n(\rho)$  e  $\psi_n(\rho)$  come nella (23.1).

In modo del tutto analogo a quello che si fece per dimostrare la (30) si constata che — tenuto presente che  $\bar{u}_{nr}(\rho)$  e  $\bar{u}_{ns}(\rho)$  verificano le condizioni al contorno espresse o da (31), o da (33), (34), o da (36) — si ha

$$\Gamma_n(a) + a \bar{\sigma}_\rho(a) [\lambda_{ns} \bar{u}_{nr}(a) \bar{u}'_{ns}(a) - \lambda_{nr} \bar{u}'_{nr}(a) \bar{u}_{ns}(a)] = 0. \quad (41)$$

Da (40), (41) si osserva che due qualunque autosoluzioni  $\bar{u}_{nr}(\rho)$ ,  $\bar{u}_{ns}(\rho)$  corrispondenti ad autovalori distinti verificano la relazione di ortogonalità

$$\int_r^R \left\{ \bar{\sigma}_\rho \bar{u}'_{nr} \bar{u}'_{ns} + \bar{\sigma}_\theta \frac{n^2}{\rho^2} \bar{u}_{nr} \bar{u}_{ns} \right\} \rho d\rho = 0, \quad (r \neq s).$$

Pongo

$$W_n^*(v) = \int_r^R \left\{ \left( v'' + \frac{v'}{\rho} - \frac{n^2 v}{\rho^2} \right)^2 - \frac{2(1-v)}{\rho} \left[ v'' \left( v' - \frac{n^2 v}{\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho} \left( v' - \frac{v}{\rho} \right)^2 \right] \right\} \rho d\rho, \quad (42)$$

$$L_n^*(v) = \int_r^R \left\{ v'^2 \bar{\sigma}_\rho + \frac{n^2}{\rho^2} v^2 \bar{\sigma}_\theta \right\} \rho d\rho, \quad (43)$$

$$V_n[v, \lambda] = W_n^*(v) - \lambda L_n^*[v, \lambda]. \quad (44)$$

A meno del fattore  $\pi N$  se  $n \neq 0$ ,  $2\pi N$  se  $n = 0$ ,  $W_n^*(v)$  rappresenta manifestamente l'energia potenziale elastica di flessione e  $\lambda L^*(v)$  il

lavoro effettuato dalla sollecitazione attiva  $[\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta} = 0]$  in corrispondenza ai termini quadratici delle caratteristiche di deformazione, quando si identifichi lo spostamento elastico con  $\frac{1}{2}v(\rho)(e^{in\theta} + e^{-in\theta})$ . Di conseguenza  $V_n[v, \lambda]$  denota (sempre a meno del fattore  $\pi N$  o  $2\pi N$ ) l'energia potenziale totale.

Se  $\gamma_n$  è la classe delle funzioni  $v(\rho)$  per le quali risultano calcolabili le espressioni a secondo membro di (42), (43), chiamo  $\gamma_{n1}$  quella delle funzioni di  $\gamma_n$  che sui bordi della piastra seguono le stesse circostanze di annullamento imposte allo spostamento elastico e alla sua derivata prima rispetto<sup>14)</sup> a  $\rho$ . Per  $r = 2, 3$ , ecc. chiamo poi classe  $\gamma_{nr}$  quella costituita dalle funzioni  $v(\rho)$  di  $\gamma_{n1}$  verificanti le relazioni di ortogonalità<sup>15)</sup>

$$\int_0^R \left\{ \bar{\sigma}_\rho \bar{u}'_{ns} v' + \sigma_\theta \frac{n^2}{\rho^2} \bar{u}_{ns} v \right\} \rho d\rho = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r-1), \quad (45)$$

rispetto a tutte le autofunzioni  $\bar{u}_{n1}, \bar{u}_{n2}, \dots, \bar{u}_{nr-1}$ .

Notoriamente<sup>16)</sup> l'autovalore  $\lambda_{nr}$  è definito dalla relazione

$$\lambda_{nr} = \min. \frac{W_n^*(v)}{L_n^*(v)} \quad (46)$$

al variare di  $v(\rho)$  nella classe<sup>17)</sup>  $\gamma_{nr}$ .

Mi pongo nell'ipotesi che  $q_e, q_i$  verificino una delle coppie di disuguaglianze

$$q_e < 0, \quad q_i = 0, \quad (III')$$

oppure

$$\left. \begin{aligned} q_e &\leq \frac{R^2 + r^2}{2R^2} q_i, & q_i &< 0, & \text{se } n &\neq 0, \\ q_e &\leq 0, & q_i &< 0, & \text{se } n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (IV')$$

<sup>14)</sup> Se ad es. la piastra è incastrata sul bordo interno, appoggiata sull'altro,  $\gamma_{n1}$  è la classe delle funzioni di  $\gamma_n$  nulle su entrambi i bordi e con derivata prima nulla sul bordo interno.

<sup>15)</sup> Tale proprietà di ortogonalità delle autosoluzioni del sistema (16), (17) — posto ivi  $\sigma = 0$  — risulta dal citato lavoro di *Giunti* [loco cit. nota <sup>3</sup>] nel caso che le condizioni si specificino in quelle d'incastro e in generale — se il parametro non interviene nelle condizioni al contorno — da quella di *Kamke* [loc. cit. nota <sup>4</sup>].

<sup>16)</sup> *G. Krall*: "Meccanica tecnica delle vibrazioni., parte II, pag. 30.

<sup>17)</sup> Tale proprietà di minimo [e così pure quella espressa da (51)] per il caso dell'incastro è indicata nelle ricerche di *Cimmino* e più in generale, ma limitatamente al caso che  $\lambda$  non intervenga nelle condizioni al contorno, in quelle di *Kamke* al variare di  $v(\rho)$  nella classe [più ristretta di  $\gamma_{nr}$ ] delle funzioni che oltre alla relazione di ortogonalità (45) [o alla (50) se ci si riferisce alla (51)] verificano le condizioni al contorno. La possibilità che si ha qui di considerare le classi più vaste di funzioni  $\gamma_{nr}$  [o  $\gamma'_{nr}$ ] permette di dimostrare la proposizione I', più avanti espressa, nel caso che su almeno uno dei due bordi valgano condizioni di libertà.



e osservo innanzitutto che in base alle disuguaglianze (III'), (IV') risultano sicuramente verificate [vedi (3), (4)] le relazioni

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_\rho > 0, \\ \bar{\sigma}_\theta > 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

al variare di  $\rho$  tra  $r$  e  $R$ .

Di conseguenza è pure [vedi (43)]

$$L_n^*(v) > 0 \quad (48)$$

e poichè  $W_n^*(v)$  è per sua natura definita positiva gli autovalori  $\lambda_{nr}$  espressi da (46) non possono che risultare positivi.

Ne segue che ogni qualvolta  $\lambda$  è negativo e si è quindi [in base a (2), (III'), (IV')] nel caso delle ipotesi (I), (II), la configurazione piana di equilibrio della piastra è stabile.

In effetti, in base a (5), (47) si verifica la circostanza che gli sforzi  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  hanno carattere di trazione con tendenza ad opporsi ad ogni perturbazione dell'equilibrio piano [eccettuato, se mai, il caso (IV', 2) o, se si vuole (II, 2) in cui se la trazione interna  $p_i$  è sufficientemente elevata di fronte a quella esterna, i  $\sigma_\theta$  hanno carattere di pressione].

Da (44), (46) risulta immediatamente

$$\left. \begin{aligned} V_n[\bar{u}_{nr}, \lambda_{nr}] &= 0, \\ V_n[v, \lambda_{nr}] &> 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

al variare di  $v(\rho) \neq \bar{u}_{nr}(\rho)$  nella classe  $\gamma_{nr}$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ).

Metterò in evidenza il seguente comportamento dell'energia potenziale totale  $V_n[v; \lambda]$ :

I<sup>o</sup> — al variare di  $v(\rho)$  nella classe  $\gamma_{ns}$ , ( $s = 1, 2, \dots, r$ ),  $V_n[v, \lambda]$  può assumere valori negativi per  $\lambda > \lambda_{nr}$ ;

II<sup>o</sup> — al variare di  $v(\rho)$  nella classe  $\gamma_{nr}$ ,  $V_n[v, \lambda]$  risulta sempre positiva per  $\lambda < \lambda_{nr}$ .

La proposizione I<sup>^</sup> è immediata: essa risulta verificata non appena si prenda<sup>18)</sup>  $v(\rho) \equiv \bar{u}_{ns}(\rho)$ .

---

<sup>18)</sup> È evidente che se la proprietà di minimo espressa da (46) valesse soltanto nella classe delle funzioni verificanti le condizioni al contorno [oltre quella di ortogonalità espressa da (45)], come quella messa in luce nei citati lavori di Kamke, la dimostrazione data della proposizione I<sup>^</sup> cadrebbe in difetto nel caso che almeno uno dei due bordi della piastra fosse esente da vincolo (e in genere tutte le volte che il parametro  $\lambda$  interviene nei dati al contorno). Infatti in tal caso la classe delle funzioni in cui vale la proprietà di minimo (46) dipenderebbe da  $\lambda$  in quanto da tale parametro dipenderebbero gli operatori che esprimono le condizioni al contorno e conseguentemente non si potrebbe assumere per la dimostrazione

Infatti in tal caso per  $\lambda > \lambda_{nr}$  da (46) risulta ovviamente

$$\lambda > \frac{W_n^*(\bar{u}_{ns})}{L_n^*(\bar{u}_{ns})}$$

e dall'essere  $\lambda_{nr} \geq \lambda_{ns}$ , ( $s = 1, 2, \dots, r$ ) segue

$$V_n[\bar{u}_{ns}, \lambda] < 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r), \quad (\lambda > \lambda_{nr}).$$

La proposizione II<sup>^</sup> si può dimostrare considerando la differenza

$$V_n[v, \lambda] - V_n[v, \lambda_{nr}] = -(\lambda - \lambda_{nr}) L_n^*(v)$$

da cui si ottiene :

$$V_n[v, \lambda] = V_n[v, \lambda_{nr}] - (\lambda - \lambda_{nr}) L_n^*(v).$$

Tenendo conto di (48), della (49.2) e della disuguaglianza

$$\lambda - \lambda_{nr} < 0$$

segue immediatamente la proposizione II<sup>^</sup>.

### § 5° Proprietà A.

Stabilita la condizione (24) sufficiente per l'esistenza di autovalori reali del parametro  $\sigma$  contenuto nelle (16), (17) in corrispondenza ad ogni valore dei parametri  $\lambda, q_i, q_e$  [o, se si vuole, di  $p_i, p_e$ ], e ad ogni  $n$ , occorre esaminare il segno di tali autovalori.

Considero la successione di elementi non decrescenti

$$\sigma_{n1}(\lambda) \leq \sigma_{n2}(\lambda) \leq \dots \leq \sigma_{ns}(\lambda) \leq \dots$$

degli autovalori del parametro  $\sigma$  e quella delle corrispondenti autofunzioni

$$u_{n1}(\varrho), u_{n2}(\varrho), \dots, u_{ns}(\varrho), \dots$$

Chiamo classe  $\gamma'_{nr}$ , ( $r = 2, 3, \dots$ ), quella delle funzioni di  $\gamma_{n1}$  verificanti le relazioni di ortogonalità

$$\int_r^R u_{ns}(\varrho) v(\varrho) \varrho d\varrho = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, r-1), \quad (r > 1). \quad (50)$$

della proposizione I<sup>^</sup>  $v(\varrho) \equiv \bar{u}_{ns}(\varrho)$  per il fatto che quest'ultima funzione verificando le condizioni al contorno soltanto per  $\lambda = \lambda_{ns}$ , non apparterebbe alla stessa classe a cui appartiene  $v(\varrho)$  se  $\lambda \neq \lambda_{ns}$ .

Riportando un risultato valido in generale in teoria di elasticità<sup>19)</sup> e conformemente alla moderna teoria delle equazioni integrali, si ha

$$\sigma_{nr} = \min. R_n[v, \lambda], \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (51)$$

con

$$R_n[v_n, \lambda] = \frac{V_n[v; \lambda]}{\int_r v^2 \varrho d\varrho}, \quad (52)$$

al variare di  $v(\varrho)$  nella classe  $\gamma'_{nr}$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ).

Il segno di  $\sigma_{nr}$  dipende così da quello di  $V_n[v, \lambda]$  al variare di  $v(\varrho)$  in  $\gamma'_{nr}$ .

Analiticamente il problema di rendere minimo  $R_n[v, \lambda]$  porta, come è ben noto, ad un determinato problema al contorno e nel caso in esame — tenuto conto della forma dei secondi membri di (42); (43), (44) — proprio al sistema (16), (17) con le specificate condizioni (31) o (33), (34); oppure (36). La configurazione piana della piastra è di equilibrio instabile ogni qualvolta  $\lambda$  [per gli assegnati valori di  $n, q_i, q_e$  rende nulla o negativa  $V_n[v, \lambda]$  in corrispondenza a qualche  $v(\varrho)$  della classe  $\gamma'_{nr}$ , ( $r = 1, 2, \dots$ ). Lo studio del segno degli autovalori  $\sigma_{nr}$  risulta così direttamente collegato a quello delle pressioni critiche.

L'andamento delle curve di autofrequenza è pienamente illustrato dalla conoscenza della derivata  $\frac{d\sigma_n}{d\lambda}$ .

$$\text{Derivata } \frac{d\sigma_n}{d\lambda}.$$

Per valutarla, penso fissati due valori  $\lambda$  e  $\lambda + \varepsilon$  del parametro  $\lambda$ .

Siano<sup>20)</sup>  $\sigma_{ns}(\lambda)$ , e  $\sigma_{ns}(\lambda + \varepsilon)$  gli autovalori corrispondenti con riferimento ad una medesima prefissata ma arbitraria classe  $\gamma_{ns}$  di funzioni e  $u_{ns}(\varrho; \lambda)$ ,  $u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)$  le relative autofunzioni [segnando in tal modo le autofunzioni intendo mettere in evidenza il valore di  $\lambda$  da cui esse dipendono]. Tali funzioni soddisfano alle equazioni

$$\left. \begin{aligned} T_n[u_{ns}(\varrho; \lambda)] + \lambda E_n[u_{ns}(\varrho; \lambda)] &= \varrho \sigma_{ns}(\lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda), \\ T_n[u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)] + (\lambda + \varepsilon) E_n[u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)] &= \\ &= \varrho \sigma_{ns}(\lambda + \varepsilon) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon), \end{aligned} \right\} \quad (16'')$$

e alle relative condizioni al contorno.

<sup>19)</sup> Vedi ad es., *Krall* loco cit. nota <sup>16)</sup> vol. II, pag. 56.

<sup>20)</sup> Non è escluso che  $\lambda$  coincida con l'autovalore  $\lambda_{ns}$  e  $\sigma_{ns}(\lambda)$  sia nullo.

Moltiplicando la prima delle (16'') per  $u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)$ , sottraendovi la seconda moltiplicata per  $u_{ns}(\varrho; \lambda)$  e integrando tra  $r$  e  $R$  si ottiene subito

$$\begin{aligned} & \int_r^R \{u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) T_n[u_{ns}(\varrho; \lambda)] - u_{ns}(\varrho; \lambda) T_n[u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)]\} d\varrho + \\ & + \lambda \int_r^R u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) E_n[u_{ns}(\varrho; \lambda)] d\varrho - (\lambda + \varepsilon) \int_r^R u_{ns}(\varrho; \lambda) E_n[u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)] d\varrho = \\ & = \{\sigma_{ns}(\lambda) - \sigma_{ns}(\lambda + \varepsilon)\} \int_r^R u_{ns}(\varrho; \lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) \varrho d\varrho . \end{aligned}$$

Con l'identico procedimento seguito per passare dalla (39) alla (40) si ricava

$$\begin{aligned} & \Gamma_n(R) - \Gamma_n(r) + \lambda \left| \varrho \bar{\sigma}_\varrho [\lambda u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) u'_{ns}(\varrho; \lambda) - (\lambda + \varepsilon) u_{ns}(\varrho; \lambda) u'_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)] \right|_r^R + \\ & + \varepsilon \int_r^R \left\{ \varrho \bar{\sigma}_\varrho u'_{ns}(\varrho; \lambda) u'_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) + \frac{n^2}{\varrho} \bar{\sigma}_\varrho u_{ns}(\varrho; \lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) \right\} d\varrho = \\ & = \{\sigma_{ns}(\lambda) - \sigma_{ns}(\lambda + \varepsilon)\} \int_r^R u_{ns}(\varrho; \lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) \varrho d\varrho . \quad (53) \end{aligned}$$

La (53) tenuto conto delle condizioni al contorno a cui soddisfano  $u_{ns}(\varrho; \lambda)$ ,  $u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)$  dà facilmente

$$\frac{\sigma_{ns}(\lambda) - \sigma_{ns}(\lambda + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\int_r^R \left\{ \varrho \bar{\sigma}_\varrho u'_{ns}(\varrho; \lambda) u'_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) + \frac{n^2}{\varrho} \bar{\sigma}_\varrho u_{ns}(\varrho; \lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) \right\} \varrho d\varrho}{\int_r^R \varrho u_{ns}(\varrho; \lambda) u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon) d\varrho} . \quad (54)$$

Al tendere a zero di  $\varepsilon$ ,  $u_{ns}(\varrho; \lambda + \varepsilon)$  tende a  $u_{ns}(\varrho; \lambda)$  ed esiste il limite del secondo membro di (54). In base a (43) si può quindi scrivere senz'altro

$$\frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda} = - \frac{L_n^*[u_{ns}(\lambda)]}{\int_r^R u_{ns}^2(\lambda) \varrho d\varrho} . \quad (55)$$

La (55) in base alla (48) dà come conseguenza

$$\frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda} < 0 \quad (56)$$

qualunque sia  $\lambda$  .

*Dimostrazione della proprietà A.*

Per  $\lambda = \lambda_{ns}$  il sistema (16), (17) ammette la soluzione rappresentata dalla coppia

$$\left. \begin{aligned} u_{ns}(\varrho; \lambda_{ns}) &\equiv \bar{u}_{ns}(\varrho) , \\ \sigma &= 0 . \end{aligned} \right\}$$

Di conseguenza, tenuto conto di (56), le curve  $\sigma_{ns} = \sigma_{ns}(\lambda)$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ), attraversano una sola volta l'asse delle  $\lambda$  e ciò nel punto  $\lambda = \lambda_{ns}$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ) dove esse passano dal semipiano positivo a quello negativo.

Risultano allora immediate le constatazioni fatte nell'enunciato della proprietà A intorno alla distribuzione degli autovalori  $\sigma_{ns}$ , ( $s = 1, 2, \dots$ ) su ogni retta  $\lambda = \text{cost}$ . Il significato di  $\frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda}$  è evidente in base a (55).

Da (44), (51), (52), (55) risulta immediatamente

$$\sigma_{ns}(\lambda) = W_n^*(u_{ns}) + \lambda \frac{d\sigma_{ns}}{d\lambda}$$

e poichè le curve  $\sigma = \sigma_{ns}(\lambda)$  non si attraversano, si conclude che ogni qualvolta un autovalore  $\sigma_{nr}$  è multiplo di ordine  $\nu$  per  $\lambda = \bar{\lambda}$  e le autofunzioni  $u_{nr}(\varrho)$  sono normalizzate, si ha

$$W_n^*(u_{nr}) = W_n^*(u_{nr+1}) = \dots = W_n^*(u_{nr+\nu-1}) .$$

$$L_n^*(u_{nr}) = L_n^*(u_{nr+1}) = \dots = L_n^*(u_{nr+\nu-1}) .$$

La proprietà A rimane così completamente dimostrata.

## § 6° Condizione sufficiente S e teorema di reciprocità in Meccanica.

La condizione (24) sufficiente per l'esistenza di autovalori reali del parametro  $\sigma$  contenuto nelle (16), (17) è direttamente collegata al teorema di reciprocità in Meccanica. Precisamente dimostrerò come tale teorema richieda necessariamente il verificarsi della condizione (24) che, anzi, risulta sufficiente per la validità del teorema stesso.

Il problema dell'equilibrio della piastra anulare soggetta oltre che alle sollecitazioni  $p_e, p_i$ , al carico ortogonale al suo piano medio di entità  $F(\varrho, \theta)$  per unità di superficie, si traduce nel sistema

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta w + \lambda \left\{ \bar{\sigma}_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{\bar{\sigma}_\theta}{\rho} \left[ \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \right\} - \frac{1}{N} F(\rho, \theta) &= 0, \\ l_1(w) = l_2(w) &= 0, \quad \rho = r, \\ L_1(w) = L_2(w) &= 0, \quad \rho = R, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

come si deduce imponendo la stazionarietà all'espressione dell'energia totale.

Osservo intanto che se  $\lambda$  è autovalore del problema omogeneo associato al sistema (57),  $[F(\rho, \theta) \equiv 0]$ , la configurazione piana di equilibrio della piastra è instabile e un carico ortogonale genera uno spostamento infinito nei punti della piastra <sup>21)</sup>. Ha quindi interesse solo il caso che  $\lambda$  non sia autovalore nel problema accennato e in tale ipotesi mi pongo:

Lo spostamento  $w(\rho, \theta)$  e la sollecitazione  $F(\rho, \theta)$  possono esprimersi mediante gli sviluppi in serie di Fourier

$$w(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n^*(\rho) e^{in\theta}, \quad (58)$$

$$F(\rho, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(\rho) e^{in\theta}, \quad (59)$$

con  $u_n^*(\rho)$ ,  $f_n(\rho)$  espressa da

$$\left. \begin{aligned} u_n^*(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta, \\ f_n(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Moltiplicando le (57) per  $e^{-in\theta} d\theta$  e integrando tra  $-\pi$  e  $+\pi$  si ricava, tenendo presenti le (60), il sistema che determina  $u_n^*(\rho)$

$$\left. \begin{aligned} T_n(u_n^*) + \lambda E_n(u_n^*) - \frac{1}{N} \rho f_n(\rho) &= 0, \quad r \leq \rho \leq R, \\ l_{1n}(u_n^*) = l_{2n}(u_n^*) &= 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \rho = r, \\ L_{1n}(u_n^*) = L_{2n}(u_n^*) &= 0, \quad \rho = R. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

<sup>21)</sup> Beninteso, nel senso che se  $\lambda$  tende ad un autovalore del sistema omogeneo associato a (57), la funzione  $w(\rho, \theta; \lambda)$  tende ad infinito.

Tenuto presente che si suppone  $\lambda$  diverso da ogni autovalore del problema omogeneo associato a (57) e quindi da ogni autovalore del sistema omogeneo associato a (61), le soluzioni del problema (61) possono porsi nella forma

$$u_n^*(\varrho) = \int_r^R G_n(\varrho, \varrho') f_n(\varrho') d\varrho' \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (62)$$

Tenendo presente le (60.2), da (58), (62) si ricava facilmente

$$w(\varrho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_r^R \int_{-\pi}^{\pi} G_n(\varrho, \varrho') e^{in\theta} e^{-in\theta'} F(\varrho', \theta') \varrho' d\varrho' d\theta'$$

e da questa, posto

$$K(\varrho, \theta; \varrho', \theta') = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} G_n(\varrho, \varrho') e^{in\theta} e^{-in\theta'} \quad (63)$$

segue :

$$w(\varrho, \theta) = \int_r^R \int_{-\pi}^{\pi} K(\varrho, \theta; \varrho', \theta') F(\varrho', \theta') \varrho' d\varrho' d\theta' \quad (64)$$

Dall'espressione (64) dello spostamento elastico si deduce immediatamente che la funzione  $K(\varrho, \theta; \varrho', \theta')$  esprime lo spostamento che la forza unitaria concentrata nel punto  $(\varrho', \theta')$  genera nel punto  $(\varrho, \theta)$ .

In base al teorema di reciprocità in Meccanica dovrà risultare

$$K(\varrho, \theta; \varrho', \theta') = K(\varrho', \theta'; \varrho, \theta) ;$$

cioè la funzione  $K(\varrho, \theta; \varrho', \theta')$  dovrà essere simmetrica rispetto alle coppie di variabili  $(\varrho, \theta)$ ,  $(\varrho', \theta')$ . Lo sviluppo (63) indica che tale proprietà di simmetria della  $K(\varrho, \theta; \varrho', \theta')$  viene goduta quando e solo quando risultino simmetriche rispetto alle variabili  $\varrho, \varrho'$ , le funzioni  $G_n(\varrho, \varrho')$ .

Si conclude quindi che la condizione  $S$  sufficiente per l'esistenza di autovalori reali del problema (16), (17) ed espressa da (24) è necessaria e sufficiente per la validità del teorema di reciprocità in Meccanica.

## § 7° Piastra piena.

Per un tale sistema materiale sollecitato dal carico uniforme  $p_e = p^*$  agente in direzione radiale sul bordo si ha lo stato tensionale costante  $\sigma_\varrho = \sigma_\theta = -p^*$ ,  $\sigma_{\varrho\theta} = 0$ , espresso dalle medesime (3), (4), (5) quando in esse si ponga  $r = A = 0$  e si faccia coincidere  $\lambda^*$  con  $-1$  e  $q_e$  con  $+p^*$ .

Di conseguenza com'è noto le equazioni (9), (10) vanno pensate e scritte nella forma

$$N\Delta\Delta w + p^*\Delta w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (9')$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} l_1(w) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} l_2(w) = 0, \\ L_1(w) = L_2(w) = 0, \quad (\varrho = R), \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

e ad esse, posto  $\frac{p^*}{N} = p$ , corrisponde per ogni  $n$ , il sistema

$$T_n(u_n) + pE_n^*(u_n) - \varrho\sigma u_n = 0, \quad (0 \leq \varrho \leq R),$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varrho \rightarrow 0} l_{1n}(u_n) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} l_{2n}(u_n) = 0, \\ L_{1n}(u_n) = L_{2n}(u_n) = 0, \quad \varrho = R, \end{aligned} \right\}$$

con

$$E_n^* = \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{d}{d\varrho} \right) - \frac{n^2}{\varrho}.$$

Le considerazioni svolte per ricavare la condizione sufficiente di esistenza  $S$ , (24), si possono ripetere integralmente solo che al simbolo  $f(r)$  si sostituisca  $\lim_{\varrho \rightarrow 0} f(\varrho)$  e si valutino gli integrali che intervengono tra 0 e  $R$ .

Si ottiene come condizione  $S$  la seguente:

$$\Gamma_n(R) - \lim_{\varrho \rightarrow 0} \Gamma_n(\varrho) + p[\tau_n(R) - \lim_{\varrho \rightarrow 0} \tau_n(\varrho)] = 0,$$

analoga alla (24).

Anche la validità della proprietà  $A$  si conserva inalterata, ma di tale verifica mi occuperò brevemente in una prossima nota.

(Reçu le 14 août 1946.)