# Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome.

# Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome

Von Walter Habicht, Stans

## Einleitung

1. Sei $K$ der Körper der reellen Zahlen, $R^n$ der $n$-dimensionale affine Raum mit Koordinaten aus $K$ und $Q$ ein Vollwürfel des $R^n$, d. h. die Menge der Punkte $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des $R^n$, für welche die Ungleichungen $-m \leqq \xi_i \leqq m$ $(m \in K\,;\ i = 1, \ldots, n)$ erfüllt sind. Dann gilt der

*Satz von der unteren Schranke.*
*Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine in $Q$ definierte, daselbst stetige und positive reelle Funktion von $n$ Variablen, so besitzt $\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ auf $Q$ eine positive untere Schranke.*

Offenbar ist dieser Satz enthalten im Weierstraßschen

*Satz vom Minimum.*
*Eine in $Q$ definierte, daselbst stetige reelle Funktion $\varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ nimmt in einem Punkt von $Q$ ihr Minimum an.*

2. Es entsteht nun die Frage, ob diese beiden Sätze ihre Gültigkeit behalten, wenn man anstatt $K$ einen reell-abgeschlossenen Körper $\Omega$[1]) zugrunde legt und anstatt stetigen Funktionen Polynome mit Koeffizienten aus $\Omega$ betrachtet.

Der genannte Weierstraßsche Satz hat topologischen Charakter; bei seinem Beweis spielt die lokale Kompaktheit des Körpers der reellen Zahlen eine wichtige Rolle. Nun existiert in jedem reell-abgeschlossenen Körper $\Omega$ eine bestimmte Anordnung und damit eine natürliche Topologie (in welcher die Intervalle die „Umgebungen" sind); der Koordinatenraum $R^n$ über $\Omega$ ist dann als Cartesisches Produkt von $n$ Räumen $\Omega$ ebenfalls topologisch. Daher liegt der Versuch nahe, den üblichen Beweis des Weierstraßschen Satzes folgendermaßen auf den Fall eines beliebigen reell-abgeschlossenen Körpers $\Omega$ zu übertragen: man bette $\Omega$ in einen lokal-kompakten geordneten Körper $\overline{\Omega}$ ein, beweise den Satz in der üblichen Weise für den Raum $\overline{R^n}$ über $\overline{\Omega}$ und zeige schließlich, daß für den Fall, wo die stetige Funktion $\varphi$ ein Polynom über $\Omega$ ist, die Koordinaten eines Punktes, in dem $\varphi$ den Minimalwert annimmt, schon in $\Omega$ liegt. — Ein solcher Versuch muß aber scheitern; denn wie man leicht sieht, ist die Anordnung eines lokal-kompakten geordneten Körpers $\overline{\Omega}$

[1]) Vgl. dazu: *B. L. v. d. Waerden,* Moderne Algebra (Berlin 1940), Teil 1, Kapitel 10, sowie *Artin-Schreier,* Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamb. Abh. 5 (1927) 85—99.

notwendigerweise archimedisch; also muß auch der Teilkörper $\Omega$ von $\overline{\Omega}$ archimedisch geordnet (und somit einem reellen Zahlkörper stetig-isomorph) sein. Für einen nicht-archimedisch angeordneten Körper $\Omega$ führt also dieser Ansatz nicht zum Ziel.

**3.** Man muß deshalb nach einer andern Beweismethode suchen. Dementsprechend wird in dieser Arbeit der *Satz von der unteren Schranke für Polynome mit Koeffizienten aus einem reell-abgeschlossenen Körper* $\Omega$ (cf. § 5, 4., Satz 11) rein algebraisch bewiesen, d. h. es werden dabei nur benützt:

1. Die Anordnungseigenschaften eines reell-abgeschlossenen Körpers;
2. die Tatsache, daß ein reell-abgeschlossener Körper durch Adjunktion von $i$ algebraisch-abgeschlossen wird;
3. die spezifischen Eigenschaften von *Polynomen* über $\Omega$.

Die ersten beiden Paragraphen enthalten einige vorbereitende Sätze und Definitionen über algebraische Mannigfaltigkeiten resp. Punktmengen des $n$-dimensionalen affinen Koordinatenraumes $R^n$ über $\Omega$. In § 3 wird die gleichmäßige Stetigkeit eines Polynomes in einem beschränkten Bereich des $R^n$ bewiesen. — Der eigentliche Beweis beginnt mit Satz 9 (cf. § 4, 1.); es wird hier eine Reihe von Ungleichungen aufgestellt, welche in § 5 zum Beweis des Satzes 11 führen.

Den Satz vom Minimum beabsichtige ich in einer späteren Arbeit als Spezialfall eines allgemeineren Satzes zu beweisen; zum Beweis des letzteren wird dabei u. a. das Ergebnis der vorliegenden Arbeit benützt.

## § 1. Reelle algebraische Mannigfaltigkeiten.

**1.** Sei $\Omega$ ein reell-abgeschlossener Körper und $R^n$ der $n$-dimensionale affine Raum über $\Omega$, d. h. die Menge der $n$-tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(\xi_i \in \Omega, i = 1, \ldots, n)$. $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ heißt ein *Punkt* des $R^n$.

*Definition* 1.

*Unter einer (reellen affinen) Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des $R^n$ verstehen wir die Menge der Punkte $\xi \subset R^n$, in welchen ein System $\mathfrak{S} = \{p_\rho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ von $r$ Polynomen $p_\rho(x_1, \ldots, x_n)$ in $n$ Variablen mit Koeffizienten aus $\Omega$ verschwindet. $\mathfrak{M}$ heißt die zu $\mathfrak{S}$ zugehörige Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{S}$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System.*

Ist $\{p_\rho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System, so wegen der Realität von $\Omega$ auch $\{p\}$, wo $p = \sum_{\varrho-1}^{r} p_\varrho^2$. $p$ heiße ein *zu $\mathfrak{M}$ gehöriges Polynom.*

2. Sei $A = \Omega(i)$ der aus $\Omega$ durch Adjunktion von $i = \sqrt{-1}$ entstehende algebraisch-abgeschlossene Körper und $P^n$ der $n$-dimensionale affine Raum über $A$. $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ $(\zeta_i \in A,\ i = 1, \ldots, n)$ heißt ein *Punkt* von $P^n$. Weiter verstehen wir unter dem *projektiven* Raum $S^n$ über $A$ die Menge der Klassen untereinander proportionaler $n+1$-tupel $(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ $(Z_i \in A,\ i = 0, \ldots, n,$ nicht alle $Z_i = 0)$. Eine solche Klasse heißt ein *Punkt* des $S^n$; die Menge der Punkte des $S^n$ mit $Z_0 \neq 0$ heißt der *eigentliche Teil* $E^n$ des $S^n$. Die Punkte von $E^n$ lassen sich durch die Zuordnung $\zeta_i = \frac{Z_i}{Z_0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eineindeutig auf $P^n$ abbilden. Dabei gehe eine Teilmenge $N \subseteqq E^n$ über in $N' \subseteqq P^n$.

*Definition* 1a

*Unter einer (komplexen projektiven) Mannigfaltigkeit $M$ des $S^n$ verstehen wir die Menge der Punkte des $S^n$, in welchen ein System $\Sigma = \{P_\rho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ von $r$ Formen $P_\rho(X_0, \ldots, X_n)$ in $n+1$ Variablen mit Koeffizienten aus $A$ verschwindet. $M$ heiße die zu $\Sigma$ gehörige Mannigfaltigkeit, $\Sigma$ ein zu $M$ gehöriges Formensystem. Liegen insbesondere die Koeffizienten der $P_\rho$ schon in $\Omega$, so heiße $M$ eine $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$.*

Ist $M$ eine $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$, so ist offenbar $\mathfrak{M} = (M \cap E^n)' \cap R^n$ eine Mannigfaltigkeit des $R^n$. $\mathfrak{M}$ heiße *die zu $M$ gehörige Mannigfaltigkeit des $R^n$, $M$ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$.*

3. **Satz 1.** *Zu jeder Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des $R^n$ gibt es eine (sogar unendlich viele) zugehörige $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$.*

*Beweis:* Sei $\mathfrak{S} = \{p_\rho\}$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriges System, $p_\rho$ von Grad $l_\rho$[2]) und $m_\rho$ eine beliebige natürliche Zahl $\geqq l_\rho$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Bilden wir das Formensystem $\Sigma = \{P_\rho\}$, wobei $P_\rho(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{m_\varrho} \cdot p_\rho\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right)$ $(\varrho = 1, \ldots, r)$, sowie die zu $\Sigma$ gehörige Mannigfaltigkeit $M$, so gilt offenbar $\mathfrak{M} = (M \cap E^n)' \cap R^n$, q. e. d.

**Satz 2.** *Ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ des $R^n$ echte Teilmannigfaltigkeit einer andern $\mathfrak{M}_1$, d. h. ist $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, und sind $M_2$ resp. $M_1$ zugehörige $\Omega$-Mannigfaltigkeiten des $S^n$, so ist $M_1 \cap M_2 = M_2^*$ ebenfalls eine zu $\mathfrak{M}_2$ gehörige $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$, und $M_2^* \subset M_1$.*

*Beweis:* a) Zunächst ist $M_1 \cap M_2$ wieder eine $\Omega$-Mannigfaltigkeit des $S^n$. Ferner folgt aus der eineindeutigen Zuordnung $E^n \rightleftarrows P^n$:

---

[2]) Der Grad von $p$ ist der Grad des höchsten homogenen Bestandteils.

$$((M_1 \cap M_2) \cap E^n)' = (M_1 \cap E^n)' \cap (M_2 \cap E^n)' , \qquad (1)$$

also weiter

$$((M_1 \cap M_2) \cap E^n)' \cap R^n = ((M_1 \cap E^n)' R^n) \cap ((M_2 \cap E^n)' \cap R^n) = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 .$$

b) Wäre $M_1 \cap M_2 = M_1$, so hätte man nach (1): $\mathfrak{M}_2 = (M_1 \cap E^n)' \cap R^n = \mathfrak{M}_1$, was nicht der Fall ist.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar

**Satz 2a.** *Ist eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_2$ des $R^n$ echter Teil einer andern $\mathfrak{M}_1$,* d. h. $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, *so gibt es zwei zugehörige $\Omega$-Mannigfaltigkeiten $M_1$, $M_2$ des $S^n$, so daß $M_2 \subset M_1$ ist.*

**4. Satz 3 (Kettensatz).** *Eine Folge von Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \cdots$ des $R^n$, in der jedes $\mathfrak{M}_{\nu+1}$ echter Teil von $\mathfrak{M}_\nu$ ist, muß nach endlich vielen Schnitten abbrechen.*

*Beweis.* Nach Satz 3 gibt es eine Kette zugehöriger $\Omega$-Mannigfaltigkeiten des $S^n$ mit $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$. Diese bricht nach dem Kettensatz der algebraischen Geometrie [3]) nach endlich vielen Schritten ab; also muß dasselbe für die Kette $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \cdots$ gelten.

## § 2. Reelle Punktmengen.

**1.** Während § 1 von algebraischen Mannigfaltigkeiten im $R^n$ handelt, beziehen sich die Sätze dieses Paragraphen allgemeiner auf Punktmengen $\mathfrak{M}$ des $R^n$. Bekanntlich kann $\Omega$ auf genau eine Weise angeordnet werden, indem man alle diejenigen von Null verschiedenen Elemente, welche sich in $\Omega$ als Quadrate darstellen lassen, $> 0$ setzt. Unter dem *Betrag* $|a|$ eines Elementes $a \neq 0$ verstehen wir sodann die positive der beiden Zahlen $a$ und $-a$. Wir gehen aus von einem Punkt $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ des $R^n$ und einem Element $\varepsilon > 0$ aus $\Omega$.

*Definition* 2. *Unter der $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(\xi^0)$ des Punktes $\xi^0$ verstehen wir die Menge der Punkte $\xi$ des $R^n$, welche sämtliche Ungleichungen*

$$|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*erfüllen; unter der $\varepsilon$-Umgebung $U_\varepsilon(\mathfrak{M})$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $R^n$ die Vereinigungsmenge $\{U_\varepsilon(\xi)\}_{\xi \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, die leere Menge.*

---

[3]) Vgl.: *B. L. v. d. Waerden*, Einführung in die Algebraische Geometrie (Berlin, Springer 1939), Kap. IV, § 28, p. 109.

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt also $U_\varepsilon(\mathfrak{M}') \subseteqq U_\varepsilon(\mathfrak{M})$, aus $0 < \delta \leqq \varepsilon$ folgt $U_\delta(\mathfrak{M}) \subseteqq U_\varepsilon(\mathfrak{M})$.

*Definition* 3. *Unter dem $\varepsilon$-Komplement $K_\varepsilon(\xi^0)$ des Punktes $\xi^0$ verstehen wir die Menge des Punkte $\xi$ des $R^n$, welche nicht sämtliche Ungleichungen*

$$| \xi_i - \xi_i | < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

*erfüllen; unter dem $\varepsilon$-Komplement $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $R^n$ den Durchschnitt $(K_\varepsilon(\xi))_{\xi \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, den ganzen $R^n$.*

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}') \supseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, aus $\delta \leqq \varepsilon$ folgt $K_\delta(\mathfrak{M}) \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M})$. Aus $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{M})$ folgt $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$; ist umgekehrt $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, so gibt es ein $\varepsilon'$ aus $\Omega$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ und $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{M})$.

**Satz 4a.** *Seien $\delta$, $\varepsilon$ zwei Elemente von $\Omega$ mit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Punktmengen des $R^n$. Dann gilt*

$$U_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) \subseteqq U_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) \, . \tag{2}$$

*Beweis.* Ist $\mathfrak{A}$ leer, so ist der Satz trivial. Sei $\mathfrak{A}$ nicht leer; dann gibt es zu $\xi \subset U_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B})$ einen Punkt $\xi^0 \subset \mathfrak{A}$, so daß

$$| \xi_i - \xi_i^0 | \leqq \varepsilon < \frac{\delta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, n) \, .$$

Wäre $\xi^0 \subset U_{\delta/2}(\mathfrak{B})$, so gäbe es $\xi^* \subset \mathfrak{B}$, so daß

$$| \xi^0 - \xi_i^* | \leqq \frac{\delta}{2} \qquad (i = 1, \ldots, n) \; ;$$

also wäre

$$| \xi_i - \xi_i^* | \leqq | \xi_i - \xi_i^0 | + | \xi_i^0 - \xi_i^* | < \delta \qquad (i = 1, \ldots, n) ,$$

also $\xi \not\subset K_\delta(\mathfrak{B})$, was nicht der Fall ist. Also ist $\xi^0 \subset \mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})$ und folglich $\xi \subset U_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B}))$.

**Satz 4b.** *Seien $\delta$, $\varepsilon$ zwei Elemente von $\Omega$ mit $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zwei Punktmengen des $R^n$. Dann gilt*

$$K_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) = K_\varepsilon(\mathfrak{A}) \cap K_\delta(\mathfrak{B}) \, . \tag{3}$$

*Beweis.* Jedenfalls ist $K_\varepsilon(\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{B})) \supseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Sei

$$\xi \subset K_\varepsilon (\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2} (\mathfrak{B})) ,$$

aber $\xi \not\subset K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Sei $\varepsilon' \in \Omega$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, so daß $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{A})$. Wäre $\xi \subset K_\delta(\mathfrak{B})$, also $\xi \subset U_{\varepsilon'}(\mathfrak{A}) \bar{\cap} K_\delta(\mathfrak{B})$, so wäre nach Satz 4a:

$$\xi \subset U_{\varepsilon'} (\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2} (\mathfrak{B})) , \qquad \text{also} \qquad \xi \not\subset K_\varepsilon (\mathfrak{A} \cap K_{\delta/2} (\mathfrak{B})) .$$

Also kann nicht $\xi \subset K_\delta(\mathfrak{B})$ sein, woraus Satz 4b folgt.

**2.** Im folgenden sei eine der Koordinaten des $R^n$, etwa die erste, ausgezeichnet. Dementsprechend bezeichnen wir die Punkte des $R^n$ mit $(\xi, \eta) = (\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$. Wir betrachten nun neben dem $R^n$ einen $R^{n-1}$ über $\Omega$.

*Definition 4. Unter der Projektion eines Punktes $(\xi, \eta)$ des $R^n$ verstehen wir den Punkt $\eta$ des $R^{n-1}$, unter der Projektion $\mathfrak{M}^*$ einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $R^n$ die Menge der Projektionen sämtlicher Punkte von $\mathfrak{M}$.*

Unter $U_\varepsilon^*(M^*)$ resp. $K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*)$ verstehen wir die Mengen $U_\varepsilon(\mathfrak{M}^*) \cap R^{n-1}$ resp. $K_\varepsilon(\mathfrak{M}^*) \cap R^{n-1}$.

Aus $\mathfrak{M}' \subseteqq \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M}'^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$; für zwei Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ gilt deshalb $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2)^* \subseteqq \mathfrak{M}_1^* \cap \mathfrak{M}_2^*$.

*Definition 5a. Unter dem $\varepsilon$-Supplement $S_\varepsilon(\xi^0, \eta^0)$ des Punktes $(\xi^0, \eta^0)$ von $R^n$ verstehen wir die Menge der Punkte $(\xi, \eta)$ des $R^n$ mit*

$$\eta_i = \eta_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

*und*

$$|\, \xi - \xi^0 \,| \geqq \varepsilon .$$

Die Punkte von $\mathfrak{M}$, die dieselbe Projektion besitzen, seien zu *Fasern* $\mathfrak{F}$ zusammengefaßt.

*Definition 5b. Unter dem $\varepsilon$-Supplement $S_\varepsilon(\mathfrak{F})$ einer Faser $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}$ verstehen wir den Durchschnitt $(S_\varepsilon(\xi))_{\xi \in \mathfrak{F}}$, erstreckt über alle Punkte von $\mathfrak{F}$, unter dem $\varepsilon$-Supplement $S_\varepsilon(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge $\{S_\varepsilon(\mathfrak{F})\}_{\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}}$, erstreckt über alle Fasern von $\mathfrak{M}$, oder, falls $\mathfrak{M}$ leer ist, die leere Menge.*

Danach ist also $(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))^* \subseteqq \mathfrak{M}^*$ .

**Satz 5.** *Ist $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des $R^n$ und $0 < \delta < \varepsilon$, so liegen alle Punkte von $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, deren Projektionen in $U_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$ liegen, in $U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$.*

*Beweis.* Sei $(\xi,\eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{M})$ und $\eta \subset U_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$. Dann gibt es $(\xi^0,\eta^0) \subset \mathfrak{M}$, so daß

$$|\eta_i - \eta_i^0| \leqq \delta < \varepsilon \qquad (i = 1,\ldots,n-1) \tag{4}$$

und

$$|\xi - \xi^0| \geqq \varepsilon$$

ist. Ist weiter $(\bar{\xi}^0, \eta^0)$ ein *beliebiger* Punkt der Faser von $\mathfrak{M}$, auf der $(\xi^0, \eta^0)$ liegt, so ist auch $|\xi - \bar{\xi}^0| \geqq \varepsilon$; also gilt $(\xi, \eta^0) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M})$; also wegen $(\xi, \eta) \subset U_\delta((\xi, \eta^0))$: $(\xi, \eta) \subset U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$.

Danach gilt also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_1 \subseteqq U_\delta(S_\varepsilon(\mathfrak{M}))$, $\mathfrak{N}_2^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}^*)$.

**3.** Im folgenden sei $\Theta$ die Menge der Punkte $(\xi, \eta)$ von $R^n$, deren erste Koordinaten zwischen zwei festen Schranken liegen:

$$\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2 \qquad (\xi_1, \xi_2 \in \Omega)\ . \tag{5}$$

Eine Punktmenge $\mathfrak{C}^\Theta$, die aus lauter *Fasern von* $\Theta$ besteht, heiße eine *zylindrische* Punktmenge von $\Theta$. Für zwei solche gilt $(\mathfrak{C}_1^\Theta \cap \mathfrak{C}_2^\Theta)^* = \mathfrak{C}_1^* \cap \mathfrak{C}_2^*$ (wobei wir zur Abkürzung $\mathfrak{C}^{\Theta *} = \mathfrak{C}^*$ setzen).

**Satz 6.** *Ist $\mathfrak{A}^\Theta$ eine zylindrische Punktmenge von $\Theta$, so ist*

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\Theta) \cap \Theta)^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*)\ .$$

*Beweis. a)* Sei $(\xi, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\Theta) \cap \Theta$. Ist $\eta^0$ ein *beliebiger* Punkt von $\mathfrak{A}^*$, so ist $(\xi, \eta^0) \subset \mathfrak{A}^\Theta$. Es können also nicht alle Ungleichungen $|\eta_i - \eta_i^0| < \varepsilon$ $(i = 1,\ldots,n-1)$ erfüllt sein, also ist $\eta \subset K_\varepsilon^*(\eta^0)$, folglich $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*)$.

*b)* Sei $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{A}^*)$. Dann gilt $(\xi_1, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A}^\Theta) \cap \Theta$.

Schließlich sei $Q$ ein Vollquader des $R^n$, d. h. die Menge der Punkte $(\xi, \eta)$ des $R^n$, welche $n$ Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2 \qquad && (\xi_1, \xi_2, \eta_{1i}, \eta_{2i} \in \Omega; \\ &\eta_{1i} \leqq \eta_i \leqq \eta_{2i} && i = 1,\ldots,n-1) \end{aligned} \tag{5'}$$

erfüllen. Sei $\mathfrak{N}^0$ eine aus lauter *Fasern des* $R^n$ bestehende Punktmenge, $\mathfrak{N}^*$ ihre Projektion, ferner die Vereinigungsmengen $\mathfrak{N}^0 \vee K_1(Q) = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}^* \vee K_1^*(Q^*) = \mathfrak{B}^*$.

**Satz 7.** *Für* $\varepsilon \in \Omega$ *mit* $0 < \varepsilon < 1$ *gilt*

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{A}))^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*) \ .$$

*Beweis.* *a*) Sei $(\xi, \eta) \subset K_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Dann ist erstens $\eta \in K_\varepsilon^*(K_1^*(Q^*))$, zweitens $\eta \in K_\varepsilon^*(\mathfrak{N}^*)$, also $\eta \in K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*)$.

*b*) Sei $\eta \subset K_\varepsilon^*(\mathfrak{B}^*)$, ferner $\xi$ ein beliebiges Element von $\Omega$ mit $\xi_1 - 1 + \varepsilon \leqq \xi \leqq \xi_2 + 1 - \varepsilon$. Dann liegt offenbar $(\xi, \eta)$ in $K_\varepsilon(\mathfrak{A})$.

## § 3. Eine Stetigkeitseigenschaft reeller Polynome.

1. Wir bezeichnen die Koordinaten des $R^n$ wieder gleichmäßig mit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Im $R^n$ sei ein Vollquader $Q$ gegeben durch die Ungleichungen

$$\xi_{1i} \leqq \xi_i \leqq \xi_{2i} \qquad (\xi_{1i}, \xi_{2i} \in \Omega,\ i = 1, \ldots, n) \ . \tag{5''}$$

Ferner sei $p(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom in $n$ Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten aus $\Omega$.

**Satz 8.** *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *aus* $\Omega$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *aus* $\Omega$, *so daß für zwei beliebige Punkte* $\xi \subset Q$, $\eta \subset Q$ *mit* $|\xi_i - \eta_i| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$|p(\xi_1, \ldots, \xi_n) - p(\eta_1, \ldots, \eta_n)| \leqq \varepsilon$$

wird.

*Beweis.* Ist $y_1, \ldots, y_n$ eine neue Reihe von Unbestimmten, so gibt es $n$ Polynome $A_1, \ldots, A_n$ in den $x$ und den $y$, so daß

$$p(y_1, \ldots, y_n) - p(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x, y) \cdot (y_\nu - x_\nu) \tag{6}$$

ist[4]. Ist dann $M_\nu$ eine obere Schranke für $|A_\nu(\xi, \eta)|$, $\xi \subset Q$, $\eta \subset Q$ und $M = \max\limits_\nu (M_\nu)$ [5], so setze man $\delta = \dfrac{\varepsilon}{n \cdot M}$, und (6) liefert ohne weiteres die Behauptung.

**Satz 8a.** *Verschwindet ein Polynom* $p(x_1, \ldots, x_n)$ *auf einer Punktmenge* $\mathfrak{M} \subseteqq Q$, *so gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *aus* $\Omega$, *so daß auf* $U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$ : $|p(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \leqq \varepsilon$ *ist.*

---

[4]) Beweis: $p(y) - p(x) = \sum\limits_\nu \left(p(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, y_\nu, \ldots, y_n) - p(x_1, \ldots, x_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)\right)$.

[5]) Sei etwa $A_\nu(x, y) = a_1 x_1^l + \cdots + a_\omega y_n^l$ und $-m \leqq \xi_i \leqq m$ $(m \geqq 1;\ i = 1, \ldots, n$ ein $Q$ umschließender, $n$-dimensionaler Würfel des $R^n$. Dann setze man

$$M_\nu = (|a_1| + \cdots + |a_\omega|) \cdot m^l \ .$$

*Beweis.* Wir bestimmen $\delta$ nach Satz 8. Ist dann $\xi \subset U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$, so gibt es nach Definition 2 (cf. § 2, 1.) einen Punkt $\xi^0 \subset \mathfrak{M}$, so daß $|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, also ist $|p(\xi)| = |p(\xi) - p(\xi^0)| \leqq \varepsilon$, q. e. d.

**Satz 8b.** *Besitzt* $|p(x_1, \ldots, x_n)|$ *auf* $\mathfrak{M} \subseteqq Q$ *eine positive untere Schranke* $d$, *so gibt es ein* $\delta > 0$ *aus* $\Omega$, *so daß auf* $U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$: $|p(\xi)| \geqq \frac{d}{2}$ *ist.*

*Beweis.* Wir setzen $\varepsilon = \frac{d}{2}$ und bestimmen $\delta$ nach Satz 8. Zu $\xi \subset U_\delta(\mathfrak{M}) \cap Q$ gibt es dann $\xi^0 \subset \mathfrak{M}$ mit $|\xi_i - \xi_i^0| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$; also ist $|p(\xi)| \geqq |p(\xi^0)| - |p(\xi) - p(\xi^0)| \geqq \frac{d}{2}$, q. e. d.

## § 4. Die Abstandsgleichungen.

**1.** Sei $Q$ ein Vollquader des $R^n$. Wie in § 2, 2. ff. zeichnen wir die erste Koordinate aus. Ferner sei $p(x, y) = p(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$ ein Polynom in $n$ Variablen $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ mit Koeffizienten aus $\Omega$.

**Satz 9.** *Zu jedem Polynom* $p(x, y)$ *gibt es eine Reihe von endlich vielen Polynomen* $H_\nu(y)$ *in den* $y$ *allein, so daß für* $\xi \in \Omega$, $\eta \subset Q^*$ *und für das erste im Punkte* $\eta$ *nicht verschwindende Polynom* $H_s(y)$:

$$|p(\xi, \eta)| \geqq |H_s(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|^{p_s} . \tag{7}$$

*Dabei bedeutet* $\xi_\pi$ *die* $\xi$ *am nächsten gelegene reelle Wurzel von* $p(x, \eta)$ *und* $p_s$ *die Anzahl der reellen Wurzeln von* $p(x, \eta)$. *Besitzt also* $p(x, \eta)$ *keine reelle Wurzel, so vereinfacht sich* (7) *zu*

$$|p(\xi, \eta)| \geqq |H_s(\eta)| . \tag{7'}$$

*Verschwinden alle* $H_\nu(y)$ *im Punkte* $\eta$, *so verschwindet* $p(x, \eta)$ *identisch.*

Die Ungleichungen (7) mögen die *Abstandsungleichungen* heißen. Wir teilen den Beweis von Satz 9 in fünf Abschnitte.

**2.** Sei

$$p(x, y) = c_0(y) \cdot x^l + \cdots + c_l(y) , \tag{8}$$

wobei die $c_\lambda(y)$ $(\lambda = 0, \ldots, l)$ Polynome in den $y$ bedeuten. Wir setzen zunächst voraus, daß $l \geqq 2$ sei. Seien $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_l$ die Wurzeln von $p(x)$ in einem algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper von $\Omega(y)$, also

$$p(x, y) = c_0(y) \cdot \prod_{\lambda=1}^{l} (x - \vartheta_\lambda) , \tag{8'}$$

und $P(x)$ das Polynom, dessen Wurzeln die Quadrate $(\vartheta_\lambda - \vartheta_\mu)^2$ sind:

$$P(x) = \prod_{\lambda<\mu} (x - (\vartheta_\lambda - \vartheta_\mu)^2) = x^L + C_1 \cdot x^{L-1} + \cdots + C_L \quad (L = \tfrac{1}{2} l (l-1)). \tag{9}$$

Dabei sind die $C_\Lambda$ symmetrische Polynome der $\vartheta_\lambda$, also

$$C_\Lambda = F_\Lambda\left(\frac{c_1(y)}{c_0(y)}, \ldots, \frac{c_l(y)}{c_0(y)}\right) = \frac{G_\Lambda(y)}{(c_0(y))^{r_\Lambda}} \quad (\Lambda = 1, \ldots, L), \tag{10}$$

wobei die $G_\Lambda(y)$ Polynome in den $y$ mit Koeffizienten aus $\Omega$ und die $r_\Lambda$ positive ganze Zahlen bedeuten. Wir dehnen Formel (10) noch auf den Index $\Lambda = 0$ aus, indem wir setzen $G_0(y) = 1$, $r_0 = 0$.

Sei nun $\eta$ ein beliebiger Punkt von $Q^*$, in dem $c_0(\eta)$ nicht verschwindet, und $G_k(\eta)$ $(0 \leqq k \leqq L)$ der *letzte nicht verschwindende* unter den Werten $G_\Lambda(\eta)$. Da (10) bei der Spezialisierung der $y$ zu den $\eta$ erhalten bleibt, so gilt nach (9)

$$\prod_{\zeta_\lambda < \zeta_\mu} (\zeta_\lambda - \zeta_\mu)^2 = \frac{G_k(\eta)}{(c_0(\eta))^{r_k}}, \tag{11}$$

wobei links das *Produkt der Quadrate der nichtverschwindenden Differenzen der Wurzeln* $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ *von* $p(x, \eta)$ steht.

**3.** $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ sind Elemente des algebraisch-abgeschlossenen Körpers $A$, der aus $\Omega$ durch Adjunktion von $i$ entsteht. Verstehen wir unter dem *Betrag* $|\zeta|$ eines Elements $\zeta$ von $A = \Omega(i)$ die positive Quadratwurzel aus seiner Norm bezüglich $\Omega$, so gelten für die Beträge zweier Elemente $\zeta$, $\zeta'$ von $A$ die Gesetze

$$|\zeta \cdot \zeta'| = |\zeta| \cdot |\zeta'|$$

und (12)

$$|\zeta + \zeta'| \leqq |\zeta| + |\zeta'| \text{ [6]}.$$

Wir geben jetzt für die Quadrate der Beträge der Wurzeldifferenzen $\zeta_\lambda - \zeta_\mu$ eine *obere Schranke* an.

Wegen (12) ergibt sich aus (8) für $\eta \subset Q^*$ und $\zeta \in \Omega(i)$:

$$|p(\zeta, \eta)| \geqq |c_0(\eta)| \cdot |\zeta|^l - |c_1(\eta)| \cdot |\zeta|^{l-1} - \cdots - |c_l(\eta)|.$$

Wie leicht ersichtlich, gibt es deshalb ein $m > 0$ aus $\Omega$, so daß für $|\zeta| > \dfrac{m}{|c_0(\eta)|}$ unabhängig von der speziellen Wahl von $\eta$ im $Q^*$:

[6]) Das letztere folgt aus der *Cauchy-Schwarz*schen Ungleichung, und diese gilt in beliebigen formal-reellen Körpern (vgl. a. a. O. Fußnote 1).

$|p(\zeta,\eta)| > 0$ ist. Also gilt für sämtliche Wurzeln $\zeta_\lambda$ von $p(x,\eta)$: $|\zeta_\lambda| \leqq \dfrac{m}{|c_0(\eta)|}$. Ist schließlich $4m^2 = M$, so folgt nach (12):

*Für je zwei Wurzeln $\zeta_\lambda$, $\zeta_\mu$ von $p(x,\eta)$ $(\eta \subset Q^*)$ gilt*

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \leqq \frac{M}{|c_0(\eta)|^2}, \tag{13}$$

*wobei $M \in \Omega$ von der speziellen Wahl von $\eta$ in $Q^*$ nicht abhängt.*

**4.** Wir wollen jetzt für die Quadrate der Beträge der *nichtverschwindenden* unter den Wurzeldifferenzen $\zeta_\lambda - \zeta_\mu$ eine *untere Schranke* angeben. Sei $G_k(\eta)$ der letzte nichtverschwindende unter den Werten $G_\Lambda(\eta)$. Um die Schreibweise zu vereinfachen, lassen wir im folgenden den Index $k$ weg und fügen ihn am Schluß wieder hinzu.

Ist $s$ die Gliederzahl des Produkts (11), so liefern die Formeln (11) und (13) unter Benützung von (12) für je zwei verschiedene Wurzeln $\zeta_\lambda$, $\zeta_\mu$:

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \geqq \frac{|G(\eta)|}{|c_0(\eta)|^r} \cdot \frac{|c_0(\eta)|^{2(s-1)}}{M^{s-1}}.$$

Setzen wir noch $2(s-1) - r = \varrho$ und $\dfrac{1}{M^{s-1}} = d$, so folgt: *Für je zwei verschiedene Wurzeln $\zeta_\lambda$, $\zeta_\mu$ von $p(x,\eta)$ $(\eta \subset Q^*)$ gilt*

$$|\zeta_\lambda - \zeta_\mu|^2 \geqq d \cdot |G(\eta)| \cdot |c_0(\eta)|^\varrho; \tag{14}$$

dabei ist $d > 0$ ein von der speziellen Wahl von $\eta$ in $Q^*$ unabhängiges Element von $\Omega$ und $\varrho$ eine ganze Zahl, die übrigens immer $\geqq 0$ gewählt werden kann, indem eventuell eine geeignete Potenz einer oberen Schranke von $|c_0(\eta)|$, $\eta \subset Q^*$, in den Faktor $d$ hineingezogen wird.

**5.** Wir teilen nun die Wurzeln $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ in zwei Kategorien:

1. Die im Grundkörper $\Omega$ liegenden: $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

2. Die übrigen: $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2q}$. Diese sind paarweise konjugiert bezüglich $\Omega$:

$$\begin{aligned} \zeta_\lambda &= \varphi_\lambda + i\,\psi_\lambda \\ \zeta_\lambda + q &= \varphi_\lambda - i\,\psi_\lambda \end{aligned} \qquad (\varphi_\lambda,\ \psi_\lambda \in \Omega;\ \lambda = 1, \ldots, q).$$

Dabei ist $\psi_\lambda \neq 0$, also $\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q} \neq 0$ $(\lambda = 1, \ldots, q)$. Ist nun $\xi$ ein beliebiges Element aus $\Omega$, so ist nach Definition des Betrages für eine beliebige Wurzel der 2. Kategorie:

$$|\xi - \zeta_{\lambda'}| \geqq |\psi_\lambda| = \tfrac{1}{2}|\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q}| \quad (\lambda' = \lambda \text{ oder } \lambda + q,\ \lambda = 1, \ldots, q)\ ,$$

also nach (14)

$$|\xi - \zeta_{\lambda'}|^2 \geqq \tfrac{1}{4}|\zeta_\lambda - \zeta_{\lambda+q}|^2 \geqq \frac{d}{4}\,|G(\eta)| \cdot |c_0(\eta)|^\varrho\ . \tag{15}$$

Ist ferner $\xi_\pi$ die $\xi$ am nächsten gelegene unter den Wurzeln der 1. Kategorie, so ist

$$\prod_{\lambda=1}^{p} |\xi - \xi_\lambda|^2 \geqq |\xi - \xi_\pi|^{2p}\ . \tag{16}$$

Aus (8′), (15) und (16) folgt also nach (12):

$$|p(\xi,\eta)|^2 \geqq |c_0(\eta)|^2 \cdot \left(\frac{d}{4}\right)^{2q} \cdot |G(\eta)|^{2q} \cdot |c_0(\eta)|^{2q\varrho} \cdot |\xi - \xi_\pi|^{2p}\ .$$

Setzen wir schließlich $q = q_k$, $p = p_k$, $q \cdot \varrho + 1 = \varrho_k$, $\left(\frac{d}{4}\right)^q = D_k$, so folgt

$$|p(\xi,\eta)| \geqq D_k \cdot |c_0(\eta)|^{\varrho_k} \cdot |G_k(\eta)|^{q_k} \cdot |\xi - \xi_\pi|^{p_k}\ . \tag{17}$$

Dabei ist $D_k \in \Omega$ mit $D_k > 0$ und $\varrho_k, q_k, p_k$ nichtnegative ganze Zahlen, und zwar insbesondere $p_k$ gleich der Anzahl der reellen Wurzeln von $p(x,\eta)$. (17) gilt auch noch, wenn alle Wurzeln reell sind, da dann $q_k = 0$, $\varrho_k = 1$ ist; man setze in diesem Fall $D_k = 1$.

Es bleiben noch die Fälle, daß $p(x,y)$ in $x$ linear oder unabhängig von $x$ ist. Im ersten Fall hat man für $c_0(\eta) \neq 0$:

$$|p(\xi,\eta)| = |c_0(\eta) \cdot \xi + c_1(\eta)| = |c_0(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|\ , \tag{17′}$$

im zweiten

$$|p(\xi,\eta)| = |c_0(\eta)|\ . \tag{17″}$$

Diese Fälle sind in (17) enthalten, wenn man beidemal $D = 1$ setzt.

**6.** In jedem Punkt $\eta \subset Q^*$, in dem $c_0(\eta) \neq 0$ ist, gilt eine Ungleichung (17) (resp. (17′), (17″)) mit $G_k(\eta) \neq 0$. Sei nun in einem Punkt $\eta \subset Q^*$: $c_0(\eta) = 0$. Sollten alle Ausdrücke $c_j(\eta)$ verschwinden, so verschwindet

$p(x,\eta)$ auf der zum Punkt $\eta$ gehörigen Faser der $R^n$ identisch. Ist dies nicht der Fall und $c_j(y)$ der erste Koeffizient von (8) mit $c_j(\eta) \neq 0$, so stimmt im Punkte $\eta$ das Polynom $p(x,y)$ überein mit dem Polynom

$$p'(x,y) = c_j(y)\cdot x^{l-j} + \cdots + c_l(y) \ .$$

Wiederholen wir alle oben gemachten Schlüsse für $p'(x,y)$ und setzen nachträglich wieder $p(x,\eta) = p'(x,\eta)$, so finden wir eine Ungleichung

$$| \, p(\xi,\eta) \, | \geqq D_{jk} \cdot | \, c_j(\eta) \, |^{\varrho_{jk}} \cdot | \, G_{jk}(\eta) \, |^{q_{jk}} \cdot | \, \xi - \xi_\pi \, |^{p_{jk}} \ .$$

Für $j = l - 1$ setze man $D_{l-1} = 1$, ebenso für $j = l : D_l = 1$. Setzt man schließlich

$$D_{jk} \cdot (c_j(y))^{\varrho_{jk}} \cdot (G_{jk}(y))^{q_{jk}} = H_{jk}(y)$$

und denkt sich die Polynome $H_{jk}(y)$ erstens nach $j$, zweitens nach $k$ lexikographisch geordnet ($j = 0, \ldots, l$; $k = \frac{1}{2}(l-j)(l-j-1), \ldots, 0$, resp. $k = 0$ für $j = l-1, l$), so ergibt sich aus der Bedeutung von $c_i(y)$ und $G_{jk}(y)$ unmittelbar Satz 9.

## § 5. Der Satz von der unteren Schranke.

**1.** Wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnen wir die Punkte des $R^n$ mit $(\xi,\eta) = (\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)$. Wir betrachten in einem Vollquader $Q$ des $R^n$ mit den Ungleichungen (5′) (cf. § 2, 3.) ein Polynom $p(x,y) = p(x, y_1, \ldots y_n)$ mit Koeffizienten aus $\Omega$ und beweisen den grundlegenden

**Satz 10.** *Sei $p(x,y)$ ein Polynom über $\Omega$ und $\mathfrak{M}$ die zu $p$ gehörige Mannigfaltigkeit des $R^n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in \Omega$ mit $\varepsilon > 0$ ein $d \in \Omega$ mit $d > 0$, so daß in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q$ : $| \, p \, | \geqq d$ gilt.*

$Q$ kann dabei beliebig gewählt werden. Ist $\mathfrak{M}$ leer, so besagt der Satz, daß $| \, p(\xi,\eta) \, |$ in $Q$ eine positive untere Schranke besitzt. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $n$. Wir machen also die Hauptinduktionsvoraussetzung (HIV), daß der Satz für $n - 1$ Variable schon bewiesen sei.

Sei $\Theta$ die durch die Ungleichungen (5) definierte Punktmenge des $R^n$ (cf. § 2, **3.**). Dann beweisen wir zuerst:

*Hilfssatz. Sei* $\delta > 0$ *und* $\mathfrak{B}^*$ *eine Punktmenge des* $R^{n-1}$, *so daß für beliebiges* $\Delta > 0$ *das Polynom* $p(x,\eta)$ *für* $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^* = K_\Delta^*(\mathfrak{B}^*)$ *definit ist. Gibt es dann einen Quader* $Q_0^*$ *des* $R^{n-1}$, *so daß für beliebiges* $\Delta > 0$: $\mathfrak{C}_\Delta^* \subseteqq Q_0^*$ *ist, so besitzt* $|p(\xi,\eta)|$ *auf der zylindrischen Punktmenge* $\mathfrak{C}_\delta^\Theta$ *von* $\Theta$, *deren Projektion* $\mathfrak{C}_\delta^*$ *ist, eine positive untere Schranke* $D$.

*Beweis.* Ist $\mathfrak{C}_\Delta^*$ leer für beliebiges $\Delta > 0$, so ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{C}_\Delta^*$ für $\Delta < \Delta_0$ nicht leer, so ist $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^*$ definit, also verschwinden für $y = \eta$ nicht alle der in Satz 9 (cf § 4, **1.**) genannten Polynome $H_\nu(y)$. Sei $H^{(1)}$ das erste nicht identisch verschwindende unter den Polynomen $H_\nu$ und allgemein $H^{(k+1)}$ das erste auf $H^{(k)}$ folgende, das nicht in allen gemeinsamen reellen Nullstellen von $H^{(1)},\ldots,H^{(k)}$ verschwindet. Ist $H^{(l)}$ das letzte Polynom der so gebildeten Kette, so können $H^{(1)},\ldots,H^{(l)}$ demnach keine gemeinsame reelle Nullstelle haben. Seien $\mathfrak{M}_1^* \supset \mathfrak{M}_2^* \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_l^* = 0$ die im $R^{n-1}$ zu den Systemen $\{H^{(1)}\}, \{H^{(1)}, H^{(2)}\}, \ldots, \{H^{(1)},\ldots,H^{(l)}\}$ gehörigen Mannigfaltigkeiten und $\mathfrak{M}_0^* = R^{n-1}$, ferner $\mathfrak{M}_k^\Theta$ $(k=0,\ldots, l-1)$ die zylindrische Punktmenge von $\Theta$ mit der Projektion $\mathfrak{M}_k^*$.

Sei schon bewiesen: $|p|$ besitzt auf $\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta$ $\left(\Delta' = \frac{\delta}{2^k}\right)$ eine positive untere Schranke $D_k$. Wir behaupten: $|p|$ besitzt auf $\mathfrak{M}_{k-1}^\Theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta$ $\left(\Delta = \frac{\delta}{2^{k-1}}\right)$ eine positive untere Schranke $D_{k-1}$.

Nach Voraussetzung liegen $\mathfrak{C}_\Delta^\Theta, \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta$ in $Q_0^\Theta$. Nach Satz 8b (cf. § 3) gibt es also ein $\delta > 0$ aus $\Omega$, so daß in $U_\delta(\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta$: $|p| \geqq \frac{D_k}{2} > 0$. Wir wählen $\delta$ außerdem kleiner als $\Delta'$. Nun ist $\mathfrak{M}_{k-1}^\Theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta = \mathfrak{N}_1^\Theta + \mathfrak{N}_2^\Theta$, $\mathfrak{N}_1^\Theta \subseteqq U_\delta(\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta$, $\mathfrak{N}_2^\Theta \subseteqq K_\delta(\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta$. Auf $\mathfrak{N}_1^\Theta$ gilt $|p| \geqq \frac{D_k}{2}$; für $\mathfrak{N}_2^*$ gilt wegen $\mathfrak{C}_\Delta^* = K_\Delta^*(\mathfrak{B}^*)$, $\mathfrak{C}_{\Delta'}^* = K_{\Delta'}^*(\mathfrak{B}^*)$ und $\Delta' = \frac{\Delta}{2}$ nach den Sätzen 6 (cf. § 2, **3.**) und 4b (cf. § 2, **1.**):

$$\mathfrak{N}_2^* \subseteqq (K_\delta(\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta) \cap \mathfrak{C}_\Delta^\Theta)^* = K_\delta^*((\mathfrak{M}_k^\Theta \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^\Theta)^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^*$$
$$= K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^* \cap \mathfrak{C}_{\Delta'}^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^* = K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap \mathfrak{C}_\Delta^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap Q_0^* \;.$$

Nun ist $\mathfrak{M}_k^*$ die zu dem Polynom in $n-1$ Variablen $H = \sum_{\kappa=1}^{k} (H^{(\kappa)})^2$ gehörige Mannigfaltigkeit des $R^{n-1}$. Nach HIV besitzt also $H$ auf

$K_\delta^*(\mathfrak{M}_k^*) \cap Q_0^*$ eine positive untere Schranke $D_k'^2 (D_k' \in \Omega, D_k' > 0)$. $D_k'^2$ ist auch untere Schranke für $H$ auf der Teilmenge $\mathfrak{N}_2^*$. Da aber $\mathfrak{N}_2^* \subseteqq \mathfrak{M}_{k-1}^*$, so verschwinden auf $\mathfrak{N}_2^*$ alle $H_\nu$ bis zu $H^{(k)}$, und $H^{(k)}$ besitzt demnach auf $\mathfrak{N}_2^*$ die untere Schranke $D_k'$. Da $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{N}_2^* \subseteqq \mathfrak{C}_\Delta^*$ nach Voraussetzung definit ist, gilt deshalb nach Satz 9 (§ 4, **1.**) für $(\xi,\eta) \subset \mathfrak{N}_2^\theta$:

$$| p(\xi,\eta) | \geqq | H^{(k)}(\eta) | \geqq D_k' > 0 \ .$$

Setzen wir schließlich $D_{k-1} = \min.\left(\frac{D_k}{2}, D_k'\right)$, so besitzt $| p |$ auf $\mathfrak{M}_{k-1}^* \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta = \mathfrak{N}_1^\theta + \mathfrak{N}_2^\theta$ die positive untere Schranke $D_{k-1}$, q. e. d.

Für $k = l$ fällt $\mathfrak{N}_1^\theta$ weg und es ist $H = \sum_{\lambda=1}^{l} (H^{(\lambda)})^2$ in $R^{n-1}$ definit, besitzt also in $Q_0^*$ und a fortiori in $\mathfrak{C}_\Delta^*$ eine positive untere Schranke $D_{l-1}$, und diese ist in $\mathfrak{M}_{l-1}^\theta \cap \mathfrak{C}_\Delta^\theta$ untere Schranke für $| p |$. Für $k = 1$ liefert der Induktionschluß wegen $\mathfrak{M}_0^\theta \cap \mathfrak{C}_\delta^\theta = \mathfrak{C}_\delta^\theta$ die Behauptung des Hilfssatzes.

**2.** Nun sei die zu $p(x,y)$ gehörige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ des $R^n$ nicht leer. Wir setzen zunächst voraus, daß auf $\mathfrak{M}^*$ nicht alle zu $p(x,y)$ gehörigen Polynome $H_\nu(y)$ verschwinden. Sei $H_s = H$ das erste Polynom $H_\nu$, das nicht auf ganz $\mathfrak{M}^*$ verschwindet, $\mathfrak{N}^*$ die zu $H$ gehörige Mannigfaltigkeit des $R^n$, $\mathfrak{N}^0$ die Menge *aller* Punkte des $R^n$, deren Projektionen auf $\mathfrak{N}^*$ liegen. Dann ist $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}^0 \subset \mathfrak{M}$ eine *echte* Teilmannigfaltigkeit von $\mathfrak{M}$ (die auch leer sein kann) mit dem zugehörigen Polynom $p_1 = p^2 + H^2$. Denken wir uns diese ganze Konstruktion wieder auf $p_1$ und $\mathfrak{M}_1$ ausgeübt und das Verfahren fortgesetzt, so erhalten wir nach Satz 3 (cf. § 1, **4.**) eine endliche Kette $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_\omega = 0$ und eine Kette zugehöriger Polynome $p = p_0, p_1, \ldots, p_\omega$, wobei $p_{\rho+1} = p_\varrho^2 + H_\varrho^2$ $(\varrho = 0, \ldots, \omega-1)$.

Satz 10 sei schon bewiesen für $p_{\rho+1}$; behauptet wird er für $p_\rho$. Da $p_{\rho+1}$ aus $p_\rho$ auf analoge Weise entsteht wie $p_1$ aus $p$, können wir den Index $\varrho$ weglassen. Sei also schon bewiesen: es gibt $d_1 > 0$ aus $\Omega$, so daß in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}_1) \cap Q$: $p_1 = p^2 + H^2 \geqq 2d_1^2$. Dies gilt a fortiori in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q$.

Nach Satz 8a (cf. § 3) gibt es $\delta \in \Omega$ mit $0 < \delta < 1$, so daß in $U_\delta^*(\mathfrak{N}^*) \cap Q^*$, also auch in $U_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q$: $H^2 \leqq d_1^2$. Dann ist $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2$, wobei auf $\mathfrak{K}_1 = K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap U_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q$: $| p | \geqq d_1$ ist, während

$$\mathfrak{K}_2 \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q \ . \tag{18}$$

Sei nun $Q_0 = U_1(Q)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}^0 \vee K_1(Q)$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{N}^* \vee K_1^*(Q^*)$. Dann gilt wegen $\delta < 1$ die Inklusion $K_\delta(\mathfrak{N}^0) \cap Q \subseteqq K_\delta(\mathfrak{A}) \subset Q_0$, also wegen (18)

$$\mathfrak{K}_2 \subseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_\delta(\mathfrak{A}) \ . \tag{18'}$$

Da $\mathfrak{N}^*$ die Mannigfaltigkeit von $H$ in $R^{n-1}$ ist, so besitzt $|H|$ auf $K^*_{\delta/2}(\mathfrak{N}^*) \cap Q_0^*$, also a fortiori auf $K^*_{\delta/2}(\mathfrak{B}^*)$, nach HIV eine untere Schranke $d_2 > 0$. Ist nun $(\xi, \eta) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M})$, so gilt nach den Definitionen 5a, b (cf. § 2, **2.**) für die $\xi$ am nächsten gelegene reelle Wurzel $\xi_\pi$ von $p(x, \eta)$: $|\xi - \xi_\pi| \geqq \varepsilon$. Weiter gilt nach Satz 7 (cf. § 3, **4.**):

$$\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})\bigr)^* \subseteqq \mathfrak{M}^* \cap \bigl(K_{\delta/2}(\mathfrak{A})\bigr)^* = \mathfrak{M}^* \cap K^*_{\delta/2}(\mathfrak{B}^*) \ . \tag{19}$$

Da aber auf $\mathfrak{M}^*$ alle $H_\nu$ bis zu $H$ verschwinden, so folgt aus Satz 9 (cf. § 4, **1.**) für $(\xi, \eta) \subset S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})$:

$$|p(\xi, \eta)| \geqq |H(\eta)| \cdot |\xi - \xi_\pi|^p \geqq d_2 \cdot \varepsilon^p = d_3 > 0 \ .$$

$S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})$ liegt in $Q_0$. Also gibt es nach Satz 8b (cf. § 3) ein $\delta' > 0$, das wir außerdem $< \delta/2$, $< \varepsilon$ und $< 1$ wählen, sodaß auf $U_{\delta'}(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})) \cap Q_0$: $|p| = \frac{d_3}{2} > 0$ ist. Nun ist aber nach Satz 4a wegen $K_\delta(\mathfrak{A}) \subset Q_0$:

$$U_{\delta'}\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M})\bigr) \cap K_\delta(\mathfrak{A}) \subseteqq U_{\delta'}\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap K_{\delta/2}(\mathfrak{A})\bigr) \cap Q_0 \ ,$$

also besitzt $|p|$ auf $U_{\delta'}\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M})\bigr) \cap K_\delta(\mathfrak{A})$ die untere Schranke $\frac{d_3}{2} > 0$. Da weiter wegen $\delta' < \varepsilon$ die Projektionen aller Punkte von $K_\varepsilon(\mathfrak{M})$, die nicht in $U_{\delta'}\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M})\bigr)$ liegen, nach Satz 5 (cf. § 2, **2.**) in $K^*_{\delta'}(\mathfrak{M}^*)$ liegen, so ist $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$, wobei $|p|$ auf $\mathfrak{L}_1 = U_{\delta'}\bigl(S_\varepsilon(\mathfrak{M})\bigr) \cap K_\delta(\mathfrak{A})$ die untere Schranke $\frac{d_3}{2}$ besitzt, während $\mathfrak{L}_2^* \subseteqq K^*_{\delta'}(\mathfrak{M}^*) \cap Q^*$. Ist schließlich $\mathfrak{B}_0^* = \mathfrak{M}^* \vee K_1^*(Q^*)$, so gilt a fortiori $\mathfrak{L}_2^* \subseteqq K^*_{\delta'}(\mathfrak{B}_0^*) \subset Q_0^*$. Außerdem gilt $\mathfrak{L}_2 \subset Q$, also liegt $\mathfrak{L}_2$ auf der zylindrischen Punktmenge $\mathfrak{L}^\Theta_{\delta'}$ von $\Theta$ mit der Projektion $\mathfrak{C}^*_{\delta'} = K^*_{\delta'}(\mathfrak{B}_0^*)$. Da aber $\mathfrak{M}$ die Mannigfaltigkeit von $p$ ist, so ist $p(x, \eta)$ für beliebiges $\Delta > 0$ und $\eta \subset \mathfrak{C}^*_\Delta$ definit, also besitzt $|p|$ auf $\mathfrak{C}^\Theta_{\delta'}$ und a fortiori auf $\mathfrak{L}_2$ nach dem HS eine untere Schranke $D > 0$. Setzen wir schließlich $d = \min.\left(d_1, \frac{d_3}{2}, D\right)$, so ist also auf $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q$: $|p| \geqq d > 0$, q. e. d.

Ist schon $\mathfrak{M}_1$ leer, so ist $p_1 = p^2 + H^2$ im $R^n$ definit, besitzt also nach dem HS. in $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q \subseteqq Q$ eine untere Schranke $2d_1^2$ (man setzt im HS: $\mathfrak{B}^* = K_1(Q^*)$; dann ist $Q \subset \mathfrak{C}_\delta^\Theta$). Mit dieser Bemerkung ist die Nebeninduktion verankert, sobald wir noch den Fall behandelt haben, daß auf ganz $\mathfrak{M}^*$ alle Polynome $H_\nu$ verschwinden.

**3.** Dies ist nach Satz 9 (cf. § 4, **1.**) nur so möglich, daß für alle Punkte $\eta \subset \mathfrak{M}^*$ das Polynom $p(x,\eta)$ identisch in $x$ verschwindet. $\mathfrak{M}$ besteht deshalb aus *allen* Punkten des $R^n$, deren Projektion auf $\mathfrak{M}^*$ liegt, also gilt:

$$(K_\varepsilon(\mathfrak{M}))^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \quad \text{und} \quad (K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q)^* = K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* .$$

Ist nun $\delta \in \Omega$ mit $0 < \delta < 1$ und $\delta < \varepsilon$ und $\mathfrak{B}_0^* = \mathfrak{M}^* \vee K_1^*(Q)$, so gilt weiter

$$K_\varepsilon^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{M}^*) \cap Q^* \subseteqq K_\delta^*(\mathfrak{B}_0^*) = \mathfrak{C}_\delta^* .$$

Ist $\mathfrak{C}_\delta^\Theta$ die zylindrische Punktmenge von $\Theta$ mit der Projektion $\mathfrak{C}_\delta^*$, so ist also $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q \subseteqq \mathfrak{C}_\delta^\Theta$. Nach Definition von $\mathfrak{B}_0^*$ ist aber $p(x,\eta)$ für $\eta \subset \mathfrak{C}_\Delta^*$ ($\Delta$ beliebig $> 0$) definit, woraus wieder nach dem HS. die Behauptung folgt.

Damit ist Satz 10 unter der HIV bewiesen. Um noch die Hauptinduktion zu verankern, bemerken wir, daß sich im Fall $n = 1$ Satz 10 auf die Formel (7) resp. (7′) des Satzes 9 (cf. § 4, **1.**) reduziert (wobei die $H_\nu$ gewisse Konstante bedeuten). Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen.

**4.** Wir bezeichnen die Punkte des $R^n$ wieder mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und fassen die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ unter der Sammelbezeichnung $x$ zusammen. Sei $Q$ ein durch die Ungleichungen (5″) (cf. § 3, **1.**) definierter Quader des $R^n$ und $p(x)$ ein in $Q$ definites Polynom über $\Omega$. Ist $p(x)$ in einem Punkt $\xi^0 \subset Q$ positiv, so ist es auf ganz $Q$ positiv[7]). Ein in $Q$ definites Polynom ist also daselbst entweder positiv oder negativ definit.

**Satz 11 (Satz von der unteren Schranke).** *$p(x)$ sei auf $Q$ positiv definit; dann gibt es ein $d > 0$ aus $\Omega$, so daß für $\xi \subset Q$: $p(\xi) \geqq d$ ist.*

---

[7]) Wäre $p$ in $\xi^1 \subset Q$ negativ, so gäbe es auf der in $Q$ liegenden Verbindungsstrecke der Punkte $\xi^0$, $\xi^1$ nach dem Satz von Bolzano (der in beliebigen reell-abgeschlossenen Körpern gilt; vgl. a. a. O. Fußnote 1) einen Punkt $\xi$, in dem $p$ verschwinden würde.

*Beweis.* Der Satz sei schon bewiesen für $n - 1$ Variable. Unter dem *Rand* $R(Q)$ verstehen wir die Menge der Punkte von $Q$, für welche in mindestens einer der Ungleichungen ($5''$) links oder rechts das Gleichheitszeichen steht. $R(Q)$ läßt sich als Vereinigungsmenge von $2n$ $(n-1)$-dimensionalen Quadern $Q_\lambda^*$ $(\lambda = 1, \ldots, 2n)$ darstellen, und nach Induktionsvoraussetzung besitzt $p$ auf jeden von diesen, also auch auf $R(Q)$, eine untere Schranke; letztere sei $d_0 > 0$. Nun ist für $0 < \varepsilon < 1$ : $U_\varepsilon(R(Q)) \subset Q_0 = U_1(Q)$, also $U_\varepsilon(R(Q)) = U_\varepsilon(R(Q)) \cap Q_0$. Nach Satz 8b (cf. § 3), angewandt auf $R(Q)$ und $Q_0$, gibt es also ein $\varepsilon \in \Omega$ mit $0 < \varepsilon < 1$, so daß auf $U_\varepsilon(R(Q))$ : $p \geqq \frac{d_0}{2}$ ist. Nun enthält $U_\varepsilon(Q)$ keine anderen Punkte als solche von $Q$ und von $U_\varepsilon(R(Q))$, also ist *$p$ sogar auf $U_\varepsilon(Q)$ definit.*

$U_\varepsilon(Q)$ ist ein Quader. Bezeichnen wir sein Äußeres samt Rand mit $\mathfrak{B}$, so ist, wie leicht ersichtlich, $Q = K_\varepsilon(\mathfrak{B})$. Da $p$ auf $U_\varepsilon(Q)$ definit ist, liegt seine zugehörige Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ganz in $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{B}$, also ist $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \supseteqq K_\varepsilon(\mathfrak{B}) = Q$, d. h. $K_\varepsilon(\mathfrak{M}) \cap Q = Q$. Also besitzt $|p|$ nach Satz 10 in $Q$ eine untere Schranke $d > 0$; da $p$ in allen Punkten von $Q$ positiv ist, so ist $d$ auch untere Schranke für $p$ in $Q$, q. e. d.

Da der Satz für $u = 0$ trivialerweise richtig ist, so folgt er damit für beliebiges $n$.

(Eingegangen den 24. Januar 1946.)