Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers.

Autor(en): **Hadwiger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **18 (1945-1946)**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16896

Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers

Von H. Hadwiger, Bern

K. Borsuk hat die Vermutung ausgesprochen[1]), daß jede beschränkte Menge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes durch $n+1$ Mengen von kleinerem Durchmesser überdeckt werden könne[2]). Daß n Mengen zu einer Überdeckung solcher Art nicht immer ausreichen, lehrt bereits die Menge, die aus den $n+1$ Eckpunkten eines n-dimensionalen regulären Simplex besteht. Auch die n-dimensionale Vollkugel kann nicht durch n Mengen kleineren Durchmessers überdeckt werden; nach dem *Borsuk*schen Antipodensatz enthält ja wenigstens eine der als abgeschlossen annehmbaren überdeckenden Mengen ein antipodisches Punktepaar, so daß von den n Überdeckungsmengen wenigstens eine den nämlichen Durchmesser wie die Vollkugel aufweist[3]).

In dieser Note soll ein einfacher Beweis der oben zitierten Vermutung mitgeteilt werden. Genauer beweisen wir den folgenden

Satz: *Eine Menge A des n-dimensionalen Euklidischen Raumes vom Durchmesser $D(A)=1$ kann stets durch $n+1$ Mengen $A_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ der Durchmesser $D(A_i)<1$ überdeckt werden*[4]).

Beweis: Nach einem bekannten Satz[5]) ist A Teilmenge eines n-dimensionalen Körpers K konstanter Breite $D=1$. Es genügt also, den Satz für einen solchen Körper K zu beweisen. Ist K eine Kugel vom Durch-

---

[1]) *K. Borsuk*, Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre. Fundam. Math. XX (1933), 177—190.

[2]) Diese Mitteilung, sowie die Anregung zu dieser Studie überhaupt, verdanke ich Herrn *H. Hopf* (Zürich).

[3]) *K. Borsuk*, Über die Zerlegung einer Euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich 1932, II. Bd. 192.

[4]) In einem demnächst in der Math. Zeitschrift erscheinenden Aufsatz (Über die Zerstückung eines Eikörpers) habe ich den Satz für Eikörper (mit regulärem Rand) bewiesen. Bezeichnet r den inneren Rollradius der Randfläche, so ergibt sich die Aussage des Satzes in der verschärften Form:

$$D(A_i) \leq 1 - 2r\left\{1 - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right\}. \quad \text{Z. B. } n=2,\ A=\text{Kreis},\ r=\tfrac{1}{2},\ D(A_i)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[5]) *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Bd., Berlin 1934, S. 130.

messer $D = 1$, so ist der Satz trivial[6]). Wir können uns auf eine Nichtkugel K beschränken.

Wir betrachten nun die Umkugelfläche R des Körpers K vom Radius r. Bekanntlich gilt

$$r \leqq \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}} < \sqrt{\frac{1}{2}}\,. \tag{1}$$

Die Menge RK der Randpunkte von K, die zu R gehören, enthält $n+1$ Punkte, die nicht in einer abgeschlossenen Hälfte (Halbkugelschale) von R liegen[7]), so daß der Mittelpunkt M von R innerer Punkt des von den erwähnten $n+1$ Punkten aufgespannten n-dimensionalen Simplex S ist.

Es sei nun P ein von M verschiedener Punkt von K. Die P mit M verbindende Gerade hat mit dem Rand von S zwei Punkte gemeinsam; P_0 sei nun derjenige von diesen beiden Punkten, der auf der entgegengesetzten Seite von M liegt wie P, so daß also M innerer Punkt der Strecke PP_0 ist. — Der Rand von S ist weiter überdeckt durch $n+1$ abgeschlossene $(n-1)$-dimensionale Simplexe $S_i (i = 0, 1, \ldots, n)$. Da die Eckpunkte der S_i nach Konstruktion zu K gehören, gilt für ihre Durchmesser

$$D(S_i) \leqq 1\,. \tag{2}$$

Die Menge $A_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ enthalte nun M und außerdem alle von M verschiedenen Punkte P von K, für welche P_0 zum Randsimplex S_i gehört. Offenbar ist K durch die $n+1$ abgeschlossenen Mengen A_i überdeckt. — Wir wählen jetzt zwei von M verschiedene Punkte P und Q von A_i; P_0 und Q_0 liegen also in S_i. Es bezeichne $d = PQ$, $p = MP$, $q = MQ$, $p_0 = MP_0$, $q_0 = MQ_0$. Es darf

$$q \leqq p \leqq r \tag{3}$$

angenommen werden.

Weiter führen wir den Winkel $\omega = P\hat{M}Q = P_0\hat{M}Q_0$ ein, und es bezeichne $\bar{\omega}$ den größten Wert, den ω annehmen kann. Offenbar kann dieser maximale Winkel $\bar{\omega}$ durch die Punkte P und Q nur realisiert

---

[6]) Die Kugel vom Durchmesser 1 kann überdeckt werden durch $n+1$ Simplexsektoren der Durchmesser

$$D = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,,\ \text{wenn } n \text{ gerade}, \qquad D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n+3}}}\,,\ \text{wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

[7]) Das unter [5]) zitierte Werk S. 127—128.

werden, wenn P_0 und Q_0 zwei Eckpunkte von S_i darstellen, die den Durchmesser von S_i liefern. In diesem Falle ist $p_0 = q_0 = r$, so daß die Beziehung

$$r\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})} = D(S_i) \leqq 1 \tag{4}$$

gilt. Für die Distanz d gilt allgemein

$$d = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pq\cos\omega}\ . \tag{5}$$

Ist nun $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{3}$, so ist im Hinblick auf (3) und (5) zunächst $d \leqq p \leqq r$, und wegen (1) also $d < 1$.

Es sei weiter $\frac{\pi}{3} < \omega < \pi$; dann ist wieder mit Rücksicht auf (3) und (5) zunächst

$d \leqq p\sqrt{2(1-\cos\omega)}$. Wenn nun $\omega < \bar{\omega}$ gilt, so ist also

$d < p\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})}$ und wegen (3) und (4) also $d < 1$.

Wenn aber $\omega = \bar{\omega}$ gilt, so muß sicher in Verschärfung von (3) $p < r$ sein. Denn $p = r$ würde bedeuten, daß P zu KR gehört; das gleiche würde aber auch für P_0 (wie oben erwähnt, muß im vorliegenden Fall P_0 ein Eckpunkt von S_i sein!) gelten, so daß $PP_0 = 2r \leqq 1$ sein müßte; dies könnte nur für den bei unserm Beweis vorweggenommenen Fall, wo K eine Kugel vom Durchmesser 1 ist, zutreffen. Es wird somit $d < r\sqrt{2(1-\cos\bar{\omega})}$, oder wegen (4) wieder $d < 1$ sein.

In allen möglichen Fällen hat sich also für zwei von M verschiedene Punkte von A_i, $d < 1$ ergeben. Da M ein innerer Punkt von K ist, wird endlich für jeden Punkt P von A_i auch $PM < 1$ ausfallen. Da nun A_i abgeschlossen ist, muß somit $D(A_i) < 1$ gelten. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

(Eingegangen den 24. Mai 1945.)