Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören.

Autor(en): **Hopf, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **17 (1944-1945)**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16329

Über die Bettischen Gruppen, die zu einer beliebigen Gruppe gehören

Von Heinz Hopf, Zürich

Hurewicz hat entdeckt, daß die Bettischen Gruppen eines asphärischen Raumes durch dessen Fundamentalgruppe bestimmt sind[1]). Dabei heißt ein Raum — nach angemessener Präzisierung des Raumbegriffes — asphärisch, wenn in ihm jedes stetige Bild einer n-dimensionalen Sphäre mit $n > 1$ auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Der Beweis wird dadurch geführt, daß man mit Hilfe stetiger Abbildungen zeigt: zwei asphärische Räume, deren Fundamentalgruppen isomorph sind, haben auch isomorphe Bettische Gruppen; diese Methode ist sehr einfach, gibt aber keinen Aufschluß über die algebraischen Gesetze, durch welche die Bettischen Gruppen mit der Fundamentalgruppe verknüpft sind.

Die §§ 1 und 2 der vorliegenden Arbeit können als eine algebraische Analyse des Satzes und Beweises von Hurewicz gelten, welche ein doppeltes Resultat hat: erstens werden die Strukturen der Bettischen Gruppen eines asphärischen Raumes rein algebraisch aus der Struktur der Fundamentalgruppe definiert, allerdings ohne daß sich eine praktisch brauchbare Methode ergibt, sie wirklich zu bestimmen; zweitens erweist sich der Satz von Hurewicz als Spezialfall eines Satzes aus der Homologietheorie.

Im § 1 wird jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ und jedem Ring J mit Einselement in eindeutiger Weise eine unendliche Folge Abelscher Gruppen $\mathfrak{G}^1_J, \mathfrak{G}^2_J, \ldots$ zugeordnet; ist J der Ring der ganzen Zahlen, so sagen wir auch $\mathfrak{G}^n$ statt $\mathfrak{G}^n_J$. Topologische Begriffe — auch solche aus der rein kombinatorischen Topologie — kommen dabei nicht vor; jedoch ist der ganze Prozeß durch die Rolle dieser Gruppen in der Topologie motiviert und darauf zugeschnitten. Diese Rolle wird im § 2 behandelt; dort sind im Abschnitt 8.2 die Hauptergebnisse der Arbeit formuliert (Sätze II und III). Sätze und Beweise gehören in die elementare Homologietheorie der Komplexe. Ein wertvolles Hilfsmittel habe ich aus den Arbeiten von Reidemeister übernommen[2]): den zu einer Gruppe von Decktransformationen gehörigen Gruppenring.

---

[1]) *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen (IV.), Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936), 215—224; speziell 221.

[2]) *K. Reidemeister*, Homotopiegruppen von Komplexen, Abh. Math. Seminar Hamburg 10 (1934), 211—215, sowie zahlreiche andere Arbeiten. — Man vgl. auch: *G. de Rham*, Sur les complexes avec automorphismes, Comment. Math. Helvet. 12 (1940), 191—211.

Daß der Satz von Hurewicz — wenigstens wenn man keine anderen Räume betrachtet als Polyeder — in den Sätzen des § 2 enthalten ist, wird, unter Benutzung anderer Sätze von Hurewicz, in dem kurzen § 5 gezeigt: In einem asphärischen Raum mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}_J^n$ die n-te Bettische Gruppe in bezug auf den Koeffizientenbereich J. Dieser Paragraph ist aus methodischen Gründen an den Schluß der Arbeit gestellt worden, kann aber in unmittelbarem Anschluß an den § 2 gelesen werden.

Im § 4 werden geometrische Anwendungen der Theorie der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ gemacht; dabei habe ich weniger Wert auf allgemeine Sätze gelegt als auf spezielle Beispiele (13.2; 13.3; 13.4; 14.4; 14.5; 15.4; 15.5). Dem Charakter der ganzen Arbeit entsprechend, bleibe ich auch hier im Bereich der diskreten Komplex-Topologie; wahrscheinlich kann man die Ergebnisse — sie betreffen Automorphismen von Komplexen — auf topologische Selbstabbildungen allgemeinerer Räume übertragen[3]).

Die begrifflich einfachste unter den Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ ist $\mathfrak{G}^1$: sie ist die wohlbekannte Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der Kommutatorgruppe. Für $n > 1$ scheint es schwierig zu sein, auf algebraischem Wege Eigenschaften der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ aus den Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ abzuleiten; daß dies mit Hilfe der geometrischen Bedeutung der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$, die im § 2 festgestellt wurde, möglich ist, wird im § 3 an einigen Beispielen gezeigt.

Ob andererseits die Theorie der zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ — sei es die algebraische oder die geometrische Seite dieser Theorie — brauchbar für die gruppentheoretische Untersuchung von $\mathfrak{G}$ ist, weiß ich nicht; immerhin möchte ich auf diese Möglichkeit hinweisen.

§ 1. Algebraische Einführung der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$

1. P-Moduln (Abelsche Gruppen mit dem Operatorenring P).

1.1. P sei ein Ring; seine Multiplikation braucht nicht kommutativ zu sein; er besitze ein Einselement; wir bezeichnen die Elemente von P mit kleinen griechischen Buchstaben, das Einselement mit ε.

X sei eine Abelsche Gruppe, die wir additiv schreiben und deren Elemente wir mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen; X besitze P als Operatorenring oder kurz: X sei ein „P-Modul"; das bedeutet: den Elementenpaaren $\alpha \in P$, $x \in X$ sind in eindeutiger Weise Elemente $\alpha x \in X$ so zugeordnet, daß die Gesetze

[3]) Man beachte die in den Fußnoten 21 und 24 zitierten Arbeiten.

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y\,,$$
$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \qquad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x\,, \qquad \varepsilon x = x$$
gelten.

1.2. Ist X' Untergruppe von X und ist $\alpha x' \epsilon X'$ für alle $\alpha \epsilon P$, $x' \epsilon X'$, so ist X' selbst ein P-Modul; wir nennen dann X' einen „P-Teilmodul" (oder eine „zulässige Untergruppe") von X.

1.3. Eine Abbildung[4]) h von X in einen P-Modul Y heißt ein „P-Homomorphismus", wenn
$$h(x+y) = h(x) + h(y)\,, \qquad h(\alpha x) = \alpha h(x)$$
für alle $\alpha \epsilon P$, $x, y \epsilon X$ gilt; der Kern von h, d. h. die Menge aller $x \epsilon X$ mit $h(x) = 0$, ist ein P-Teilmodul von X; das Bild $h(X)$ ist ein P-Teilmodul von Y.

1.4. Eine Teilmenge $E \subset X$ heißt ein „P-Erzeugendensystem", wenn sich jedes Element $x \epsilon X$ auf wenigstens eine Weise als endliche Summe $x = \sum \alpha_i x_i$ mit $x_i \epsilon E$ darstellen läßt; jeder P-Modul X enthält Erzeugendensysteme: die Menge $E = X$ ist ein solches, da $x = \varepsilon x$ für jedes $x \epsilon X$ ist. Ein P-Erzeugendensystem E heißt eine „P-Basis", falls sich jedes x auf nur eine Weise als Summe $x = \sum \alpha_i x_i$ mit $x_i \epsilon E$ darstellen läßt oder, was dasselbe ist: wenn die Elemente von E linear unabhängig sind (in bezug auf den Koeffizientenbereich P); wenn X eine P-Basis besitzt, so nennen wir X einen „freien" P-Modul. Ein solcher ist also nichts anderes als die Gesamtheit der endlichen Linearformen mit Unbestimmten $x_i \epsilon E$ und Koeffizienten $\alpha_i \epsilon P$, wobei die Addition zweier Linearformen und die Multiplikation einer Linearform mit einem Koeffizienten in der üblichen Weise erklärt sind; seine Struktur ist durch P und die Mächtigkeit von E vollständig bestimmt.

1.5. Jeder P-Modul X ist P-homomorphes Bild eines freien P-Moduls X^* (d. h. es existiert ein freier P-Modul X^* und ein P-Homomorphismus h von X^* auf den ganzen Modul X).

Beweis: E sei ein P-Erzeugendensystem von X; man verstehe unter E^* eine mit E gleichmächtige Menge von Symbolen x^*, unter h eine eineindeutige Abbildung von E^* auf E und unter X^* die Menge aller formal

[4]) Bei einer Abbildung von X *in* Y kann die Bildmenge ein echter Teil von Y sein; bei einer Abbildung *auf* Y ist Y mit der Bildmenge identisch. — Der *Kern* eines Homomorphismus ist das Urbild des Nullelementes (bei multiplikativer Schreibweise des Einselementes). — Die *Identität* oder *identische Abbildung* einer Menge ist diejenige Abbildung, durch die jedes Element sich selbst zugeordnet wird.

gebildeten endlichen Summen $\Sigma \alpha_i x_i^*$ mit $\alpha_i \in P$, $x_i^* \in E^*$; indem man in X^* auf die übliche Weise die Addition zweier Linearformen und die Multiplikation einer Linearform mit einem Element $\alpha \in P$ erklärt, wird X^* zu einem freien P-Modul; durch $h(\Sigma \alpha_i x_i^*) = \Sigma \alpha_i h(x_i^*)$ ist eine Abbildung h von X^* auf X gegeben, die ein P-Homomorphismus ist.

1.6. P_0 sei ein Links-Ideal — mit anderen Worten: ein P-Teilmodul — von P. Für jede Untergruppe $Z \subset X$ verstehen wir unter Z_0 die Gruppe, die aus allen endlichen Summen $\Sigma \nu_i z_i$ mit $\nu_i \in P_0$, $z_i \in Z$ besteht; sie ist P-Teilmodul von X. Insbesondere ist der P-Teilmodul X_0 erklärt; es ist $Z_0 \subset X_0$ für jede Untergruppe $Z \subset X$. Wenn Z selbst P-Teilmodul von X ist, so ist $Z_0 \subset Z$; dann ist also $Z_0 \subset X_0 \frown Z$, und es ist daher auch die Restklassengruppe $(X_0 \frown Z)/Z_0$ erklärt.

Falls X ein freier P-Modul mit der Basis E und falls das Ideal P_0 zweiseitig ist, so ist X_0 die Gesamtheit derjenigen endlichen Summen $\Sigma \alpha_i x_i$ mit $x_i \in E$, für welche die $\alpha_i \in P_0$ sind.

2. Die Gruppen $\Gamma^n(J, P, P_0)$. Satz I.

2.1. J sei ein P-Modul. Unter einer „(J, P)-Folge" verstehen wir eine Folge von Gruppen

$$\{J = Z^{-1};\quad X^0 \supset Z^0;\quad X^1 \supset Z^1; \ldots;\quad X^n \supset Z^n; \ldots\} \tag{1}$$

mit folgenden Eigenschaften: *Die X^n sind freie P-Moduln, die Z^n P-Teilmoduln der X^n; für jedes $n \geqslant 0$ existiert ein P-Homomorphismus r_n von X^n auf Z^{n-1}, und dabei ist Z^n der Kern von r_n* [4]).

Eine (J, P)-Folge kann unendlich sein oder endlich — im zweiten Fall bricht sie mit einem Paar $X^N \supset Z^N$ ab, und die r_n existieren nur für $0 \leqslant n \leqslant N$.

2.2. Zu gegebenen J und P kann man immer unendliche (J, P)-Folgen konstruieren: nach 1.5 gibt es einen freien P-Modul X^0 und einen P-Homomorphismus r_0 von X^0 auf J; der Kern Z^0 von r_0 ist nach 1.3 ein P-Teilmodul von X^0; ebenso gibt es, wenn X^{n-1} und sein P-Teilmodul Z^{n-1} schon konstruiert sind, einen freien P-Modul X^n und einen P-Homomorphismus r_n von X^n auf Z^{n-1}, und der Kern Z^n ist wieder ein P-Modul.

Dieselbe Konstruktion zeigt, daß man jede endliche (J, P)-Folge zu einer unendlichen (J, P)-Folge erweitern kann; die endlichen (J, P)-Folgen sind also nichts anderes als die Abschnitte unendlicher (J, P)-Folgen.

Bei gegebenen J und P gibt es unendlich viele verschiedene unendliche (J, P)-Folgen; denn immer, wenn Z^{n-1} schon vorliegt, herrscht Willkür bei der Wahl von X^n und von r_n; diese Wahl ist nach 1.5 gleichbedeutend mit der Wahl eines P-Erzeugendensystems E in Z^{n-1}.

2.3. In P sei ein Links-Ideal P_0 ausgezeichnet. Dann sind für jede (J, P)-Folge (1) gemäß 1.6 die Gruppen $(X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n$ erklärt $(n = 0, 1, \ldots)$. Wir behaupten:

Satz I. *Die Gruppen* $(X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n$ *sind ihrer Struktur nach unabhängig von der zugrundegelegten* (J, P)*-Folge* (1); *sie sind also, wenn der* P*-Modul* J *und das Ideal* $P_0 \subset P$ *gegeben sind, als abstrakte Gruppen eindeutig bestimmt und dürfen daher mit* $\Gamma^n(J, P, P_0)$ *bezeichnet werden* $(n = 0, 1, \ldots)$.

Mit anderen Worten:

Ist neben der Folge (1) *noch eine zweite* (J, P)*-Folge*

$$\{J = \bar{Z}^{-1}\,;\quad \bar{X}^0 \supset \bar{Z}^0\,;\ \ldots\ ;\ \bar{X}^n \supset \bar{Z}^n\,;\ \ldots\} \tag{$\bar{1}$}$$

mit Homomorphismen $\bar{r}_n$ *gegeben, so besteht für jedes* $n \geqslant 0$ *die Isomorphie*

$$(X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n \cong (\bar{X}_0^n \frown \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n\,.$$

Der Satz bezieht sich sowohl auf unendliche als auch auf endliche (J, P)-Folgen; da aber, wie wir in 2.2 gesehen haben, jede endliche (J, P)-Folge Abschnitt einer unendlichen ist, dürfen wir uns beim Beweis auf unendliche Folgen beschränken.

Wir werden den Satz in der zweiten oben angegebenen Form beweisen, also zwei Folgen (1) und ($\bar{1}$) miteinander vergleichen. Dem endgültigen Beweis stellen wir einige Hilfssätze voran.

2.4. Hilfssatz: F sei eine Abbildung, welche jeden Modul X^n aus der Folge (1) P-homomorph in sich, die Gruppe J identisch auf sich abbildet[4]) und die Gleichung

$$Fr(x) = rF(x)$$

für alle $x \in X^n$, $n = 0, 1, \ldots,$ erfüllt (wir schreiben kurz r statt r_n). Dann gibt es für jedes $n \geqslant 0$ einen P-Homomorphismus Φ von X^n in sich, der die Bedingungen

$$\Phi(x) \in Z^n \qquad \text{für} \qquad x \in X^n\,, \tag{2}$$

$$\Phi(z) = F(z) - z \qquad \text{für} \qquad z \in Z^n \tag{3}$$

erfüllt.

Beweis: Für $x \in X^0$ setzen wir $\Phi(x) = F(x) - x$; dann ist Φ ein P-Homomorphismus von X^0 in sich, der (3) erfüllt; ferner ist $r\Phi(x) = Fr(x) - r(x)$, also, da $r(x) \in J$ und F die identische Abbildung von J ist, $r\Phi(x) = 0$, d. h. $\Phi(x) \in Z^0$; es gilt also auch (2).

Φ sei für X^{n-1} erklärt; wir erklären es für X^n:

In den freien P-Moduln X^{n-1} und X^n sind P-Basen ausgezeichnet; ihre Elemente bezeichnen wir mit x_j^{n-1} bzw. x_i^n; dann gibt es Elemente $\tau_{ij} \in P$, so daß

$$r(x_i^n) = \sum_j \tau_{ij}\, x_j^{n-1}$$

ist (wobei die Summen auf der rechten Seite endlich sind).

Da $\Phi(x_j^{n-1}) \in Z^{n-1}$ ist, gibt es Elemente $y_j^n \in X^n$ mit $r(y_j^n) = \Phi(x_j^{n-1})$; für jedes x_j^{n-1} verstehen wir unter y_j^n ein fest gewähltes derartiges Element. Dann setzen wir für jedes $x = \sum \alpha_i\, x_i^n \in X^n$:

$$\Phi(x) = F(x) - x - \sum_{i,j} \alpha_i\, \tau_{ij}\, y_j^n \quad . \tag{4}$$

Daß Φ ein P-Homomorphismus von X^n in sich ist, ist klar. Ferner ist

$$\begin{aligned} r\Phi(x) &= Fr(x) - r(x) - \sum \alpha_i \tau_{ij} \Phi(x_j^{n-1}) \\ &= Fr(x) - r(x) - \Phi r(x)\,, \end{aligned}$$

also, da $r(x) \in Z^{n-1}$ ist, $r\Phi(x) = 0$, d. h. $\Phi(x) \in Z^n$; es gilt also (2). Schließlich sei $z = \sum \alpha_i x_i^n \in Z^n$; dann ist $r(z) = 0$, also $\sum\limits_{i,j} \alpha_i \tau_{ij}\, x_j^{n-1} = 0$, also $\sum\limits_i \alpha_i \tau_{ij} = 0$ für jedes j; mithin folgt aus (4), daß (3) gilt.

2.5. Hilfssatz: F erfülle dieselben Voraussetzungen wie soeben; dann bildet F für jedes $n \geqslant 0$ die Gruppe $(X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n$ identisch auf sich ab; das heißt: F bildet jede der Restklassen, in welche $X_0^n \frown Z^n$ modulo Z_0^n zerfällt, in sich ab.

Beweis: Φ hat die im Hilfssatz 2.4 formulierte Bedeutung. Es sei $x \in X_0^n \frown Z^n$; da $x \in X_0^n$ ist, ist $x = \sum \nu_i x_i^n$ mit $\nu_i \in P_0$, $x_i^n \in X^n$, also $\Phi(x) = \sum \nu_i\, \Phi(x_i^n)$, also, da $\Phi(x_i^n) \in Z^n$ ist, $\Phi(x) \in Z_0^n$; da $x \in Z^n$ ist, ist $\Phi(x) = F(x) - x$; es ist also $F(x) - x \in Z_0^n$, d. h. $F(x) \equiv x$ mod. Z_0^n.

2.6. Hilfssatz: Zu den gegebenen (J, P)-Folgen (1) und $(\bar{1})$ gibt es Abbildungen f, welche jeden Modul X^n P-homomorph in den Modul $\bar{X}^n$, den Modul J identisch auf sich abbilden[4]) und die Gleichung

$$\bar{r} f(x) = f r(x) \tag{5}$$

für alle $x \in X^n$, $n = 0, 1, \ldots$, erfüllen (wir schreiben r und $\bar{r}$ statt r_n und $\bar{r}_n$).

Beweis: Es sei zunächst $\{x_i^0\}$ eine P-Basis von X^0. Für jedes x_i^0 ist $r(x_i^0) \in J$; es gibt also Elemente $\bar{y}_i^0 \in \bar{X}^0$ mit $\bar{r}(\bar{y}_i^0) = r(x_i^0)$; jedem x_i^0 ordnen wir ein bestimmtes derartiges $\bar{y}_i^0$ zu und setzen $f(x_i^0) = \bar{y}_i^0$ sowie allgemein $f(x) = \Sigma \alpha_i \bar{y}_i^0$ für jedes $x = \Sigma \alpha_i x_i^0 \in X^0$. Dann ist f ein P-Homomorphismus von X^0 in $\bar{X}^0$, und es ist

$$\bar{r} f(x) = \Sigma \alpha_i \bar{r}(\bar{y}_i^0) = \Sigma \alpha_i r(x_i^0) = r(x) ,$$

also $\bar{r} f(x) = f r(x)$, wenn wir auf der rechten Seite dieser Gleichung unter f die identische Abbildung von J verstehen.

f sei für X^{n-1} erklärt; wir erklären es für X^n:

$\{x_i^n\}$ sei eine P-Basis von X^n; da $r(x_i^n) \in Z^{n-1}$ ist, ist $rr(x_i^n) = 0$, also $\bar{r} f r(x_i^n) = f r r(x_i^n) = 0$, d. h. $f r(x_i^n) \in \bar{Z}^{n-1}$; es gibt also Elemente $\bar{y}_i^n \in \bar{X}^n$ mit $\bar{r}(\bar{y}_i^n) = f r(x_i^n)$; jedem x_i^n ordnen wir ein bestimmtes derartiges $\bar{y}_i^n$ zu und setzen $f(x_i^n) = \bar{y}_i^n$, sowie allgemein $f(x) = \Sigma \alpha_i \bar{y}_i^n$ für jedes $x = \Sigma \alpha_i x_i^n \in X^n$. Dann ist f ein P-Homomorphismus von X^n in $\bar{X}^n$, und es ist

$$\bar{r} f(x) = \Sigma \alpha_i \bar{r}(\bar{y}_i^n) = \Sigma \alpha_i f r(x_i^n) = f r(x) .$$

2.7. *Beweis des Satzes I.* Die Folgen (1) und ($\bar{1}$) sind gegeben. f sei eine Abbildung, wie sie nach Hilfssatz 2.6 existiert. Ist $z \in Z^n$, so ist $r(z) = 0$, also nach (5) auch $\bar{r} f(z) = 0$, d. h. $f(z) \in \bar{Z}^n$; es ist also $f(Z^n) \subset \bar{Z}^n$. Da f ein P-Homomorphismus ist, ist ferner $f(X_0^n) \subset \bar{X}_0^n$, also auch $f(X_0^n \frown Z^n) \subset \bar{X}_0^n \frown \bar{Z}^n$; schließlich folgt aus den Tatsachen, daß $f(Z^n) \subset \bar{Z}^n$ und daß f P-Homomorphismus ist, noch $f(Z_0^n) \subset \bar{Z}_0^n$. Aus all diesem ergibt sich: durch f wird die Restklassengruppe $\Gamma^n = (X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n$ homomorph in die Restklassengruppe $\bar{\Gamma}^n = (\bar{X}_0^n \frown \bar{Z}^n)/\bar{Z}_0^n$ abgebildet.

Ebenso gibt es eine Abbildung $\bar{f}$, welche die $\bar{X}^n$ P-homomorph in die X^n, den Modul J identisch auf sich abbildet, die Gleichung

$$r \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f} \bar{r}(\bar{x}) \tag{$\bar{5}$}$$

erfüllt und welche infolgedessen $\bar{\Gamma}^n$ homomorph in Γ^n abbildet.

Die zusammengesetzte Abbildung $F(x) = \bar{f} f(x)$ bildet jeden Modul X^n P-homomorph in sich, den Modul J identisch auf sich ab und erfüllt, wie aus (5) und ($\bar{5}$) folgt, die Gleichung $Fr(x) = rF(x)$; nach dem Hilfssatz 2.5 bildet dann F die Gruppe $\Gamma^n = (X_0^n \frown Z^n)/Z_0^n$ identisch auf sich ab. Ebenso ergibt sich, daß $\bar{F} = f\bar{f}$ die Gruppe $\bar{\Gamma}^n$ identisch auf sich abbildet. Es sind also f und $\bar{f}$ solche homomorphe Abbildungen von Γ^n in $\bar{\Gamma}^n$ bzw. von $\bar{\Gamma}^n$ in Γ^n, daß $\bar{f}f$ und $f\bar{f}$ die Identitäten von Γ^n bzw. $\bar{\Gamma}^n$ sind; dann aber ist f ein Isomorphismus von Γ^n auf $\bar{\Gamma}^n$ (und $\bar{f}$ seine Umkehrung). Damit ist der Satz I bewiesen.

3. Die Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$

Wir werden von den Gruppen $\Gamma^n(J, P, P_0)$, die auf Grund des Satzes I für beliebige J, P, P_0 existieren, nur für denjenigen Fall spezieller J, P, P_0 Gebrauch machen, den wir jetzt betrachten:

3.1. $\mathfrak{G}$ sei eine beliebige Gruppe, die nicht Abelsch zu sein braucht und die wir multiplikativ schreiben; J sei ein beliebiger Ring mit Einselement. Dann sei P der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus J; er ist in bekannter Weise folgendermaßen definiert: seine Elemente sind formal gebildete Summen $\alpha = \Sigma t_i A_i$, wobei die $A_i \in \mathfrak{G}$, die $t_i \in J$ und höchstens endlich viele $t_i \neq 0$ sind; die Addition in P ist dadurch erklärt, daß man die Summen α als Linearformen in Unbestimmten A_i mit Koeffizienten t_i behandelt, wobei die Addition der t_i die in J gegebene ist; die Multiplikation ist durch

$$(\Sigma\, t_i A_i) \cdot (\Sigma\, t'_j A_j) = \Sigma\, (t_i t'_j)\, (A_i A_j)$$

erklärt, wobei $t_i t'_j$ das Produkt in J und $A_i A_j = A_k$ das Produkt in $\mathfrak{G}$ ist; dabei sind die Koeffizienten von Gliedern, die dasselbe A_k enthalten, zu addieren. Man bestätigt leicht, daß durch diese Addition und Multiplikation in der Tat ein Ring entsteht.

(Bemerkung: Man kann denselben Ring P auch derart definieren, daß man seine Elemente nicht als Linearformen $\alpha = \Sigma t_i A_i$, sondern als Funktionen $\alpha(A_i) = t_i$ auffaßt; die Definition lautet dann so: Die Elemente von P sind diejenigen Funktionen mit Argumenten in $\mathfrak{G}$ und Werten in J, die für höchstens endlich viele $A \in \mathfrak{G}$ nicht den Wert 0 haben; Summe $\sigma = \alpha + \beta$ und Produkt $\pi = \alpha\beta$ zweier Elemente $\alpha, \beta \in P$ werden dadurch erklärt, daß man für alle $A \in \mathfrak{G}$ setzt:

$$\sigma(A) = \alpha(A) + \beta(A)\,, \qquad \pi(A) = \Sigma\, \alpha(X)\, \beta(Y)\,,$$

wobei über alle Paare $X, Y \in \mathfrak{G}$ mit $XY = A$ zu summieren ist.)

Der Ring P hat ein Einselement, nämlich eE, wobei e das Einselement von J und E das Einselement von $\mathfrak{G}$ ist.

3.2. Aus den Vorschriften für die Addition und Multiplikation ergibt sich: wenn man für $\alpha = \sum t_i A_i \in P$ unter $S(\alpha)$ das Element $\sum t_i \in J$ versteht, so gelten die Regeln

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta)\,, \qquad S(\alpha\beta) = S(\alpha)\cdot S(\beta)\,. \tag{6}$$

3.3. Für jedes Paar $\alpha \in P$, $x \in J$ setzen wir $\alpha x = S(\alpha)\cdot x$; man bestätigt unter Benutzung von (6), daß hierdurch J — genauer: die additive Gruppe des Ringes J — ein P-Modul wird.

3.4. Aus (6) folgt ferner: diejenigen $\alpha \in P$, für welche $S(\alpha) = 0$ ist, bilden ein (zweiseitiges) Ideal in P; dieses Ideal nennen wir P_0.

3.5. Bei gegebener Gruppe $\mathfrak{G}$ und gegebenem Ring J ist damit festgesetzt, was unter P und P_0 zu verstehen und in welcher Weise J als P-Modul aufzufassen ist; wir setzen jetzt

$$\Gamma^n(J\,,\,P,\,P_0) = \mathfrak{G}_J^{n+1}\,, \qquad n = 0\,,\,1, \ldots\,;$$

es ist also jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ und jedem Ring J (mit Einselement) in eindeutiger Weise eine unendliche Folge Abelscher Gruppen

$$\mathfrak{G}_J^1\,,\ \mathfrak{G}_J^2, \ldots,\ \mathfrak{G}_J^n, \ldots$$

zugeordnet. Das sind die „Bettischen Gruppen", die zu $\mathfrak{G}$ gehören (mit J als Koeffizientenbereich).

Wenn J der Ring der ganzen Zahlen ist, so werden wir statt $\mathfrak{G}_J^n$ kurz $\mathfrak{G}^n$ schreiben.

4. Nähere Untersuchung der Gruppen $\mathfrak{G}_J^1$

Für die Gruppen $\mathfrak{G}_J^1$, und besonders für die Gruppe $\mathfrak{G}^1$, werden wir jetzt noch Charakterisierungen angeben, die begrifflich einfacher und praktisch brauchbarer sind als die Definition, die in der vorstehenden Definition der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ enthalten ist.

4.1. $\mathfrak{G}$ und J seien wie in Nr. 3 gegeben. Der Gruppenring P ist ein freier P-Modul: das Einselement von P bildet eine P-Basis; wir setzen $X^0 = P$ und definieren durch $r(\alpha) = S(\alpha)$ eine Abbildung r von X^0 in J; aus 3.2 folgt, daß r ein P-Homomorphismus von X^0 in J ist; r ist sogar ein P-Homomorphismus auf die ganze Gruppe J, da $r(tA) = t$ für jedes $t \in J$ gilt, wobei A ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$ ist. Der Kern[4]) von r ist das Ideal P_0, das in 3.4 definiert ist; gemäß den Bezeichnungen aus 2.1 ist also $Z^0 = P_0$; auch der in 2.3 erklärte Modul X_0^0 ist gleich P_0 (da P_0 Rechts-Ideal ist); es ist also auch $X_0^0 \frown Z^0 = P_0$. Der Modul Z_0^0 (cf. 1.6) besteht aus den endlichen Summen von Produkten $\alpha\beta$ mit $\alpha \in P_0$, $\beta \in Z^0$; da $Z^0 = P_0$ ist, ist also Z_0^0 das im Sinne der Idealtheorie gebildete Produkt des Ideals P_0 mit sich selbst, das wir sinngemäß mit P_0^2 bezeichnen. Da nach Definition $\mathfrak{G}_J^1 = (X_0^0 \frown Z^0)/Z_0^0$ ist, haben wir somit folgendes gefunden:

Für beliebige $\mathfrak{G}$ und J ist

$$\mathfrak{G}_J^1 \cong P_0 / P_0^2 ; \tag{7}$$

dabei ist P der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus J, P_0 das Ideal in P, das aus denjenigen $\alpha \in P$ besteht, für welche die Koeffizientensumme $S(\alpha) = 0$ ist, und P_0^2 das Quadrat des Ideals P_0.

4.2. Wenn wir immer beliebige Elemente von $\mathfrak{G}$ mit A_i, das Einselement von $\mathfrak{G}$ mit E, beliebige Elemente von J mit t_i oder t_{ij} bezeichnen, so lassen sich die Ideale P_0 und P_0^2 folgendermaßen beschreiben:

Ein Element $\alpha \in P$ ist dann und nur dann in P_0, wenn es sich in der Form $\alpha = \Sigma t_i (A_i - E)$ schreiben läßt; α ist dann und nur dann in P_0^2, wenn es sich in der Form $\alpha = \Sigma t_{ij} (A_i - E)(A_j - E)$ schreiben läßt.

Beweis: Da immer $A_i - E \in P_0$ ist, so ist klar, daß die Elemente von den angegebenen Formen in P_0 bzw. in P_0^2 liegen. Umgekehrt: es sei erstens $\alpha = \Sigma t_i A_i \in P_0$; dann ist $\Sigma t_i = 0$, also $\alpha = \alpha - (\Sigma t_i) E = \Sigma t_i (A_i - E)$; (dabei kann man in der letzten Summe das Glied mit $A_i = E$ weglassen, wodurch die Gleichung $\Sigma t_i = 0$ im allgemeinen zerstört wird). Es sei zweitens $\alpha \in P_0^2$; dann ist α Summe von Produkten $\alpha' \alpha''$, wobei $\alpha' \in P_0$, $\alpha'' \in P_0$, nach dem eben Bewiesenen also $\alpha' = \Sigma t_i' (A_i - E)$, $\alpha'' = \Sigma t_j'' (A_j - E)$ ist; hieraus folgt, daß α sich in der angegebenen Form schreiben läßt.

4.3. Für das Rechnen modulo P_0^2 sind die nachstehenden Regeln praktisch: Für beliebige $A, B \in \mathfrak{G}$ ist

$$(A - E)(B - E) = (AB - E) - (A - E) - (B - E), \tag{8}$$

also

$$AB - E \equiv (A - E) + (B - E) \qquad \text{mod. } P_0^2 ; \tag{8'}$$

hieraus folgt für $B = A^{-1}$:

$$A^{-1} - E \equiv -(A - E) \qquad \text{mod. } P_0^2 . \tag{8''}$$

Aus $(8')$ und $(8'')$ ergibt sich weiter

$$\Pi A_i^{t_i} - E \equiv \Sigma\, t_i'(A_i - E) \qquad \text{mod. } P_0^2 \;, \tag{9}$$

wobei auf der linken Seite die Exponenten t_i beliebige ganze Zahlen sind, während auf der rechten Seite die Koeffizienten t_i' die Elemente von J sind, die durch $|\, t_i|$-malige Addition des Einselementes e von J oder des Elementes $-e$ entstehen, je nach dem Vorzeichen von t_i.

4.4. Wir setzen jetzt voraus: *J ist der Ring der ganzen Zahlen.*

Ist $\alpha = \Sigma t_i A_i \in P_0$, so ist $\Sigma t_i = 0$, also $\alpha = \Sigma t_i(A_i - E)$, und aus (9) folgt:

$$\alpha \equiv \Pi A_i^{t_i} - E \quad \text{mod. } P_0^2 \quad \textit{für jedes} \quad \alpha = \Sigma\, t_i A_i \in P_0 \;. \tag{10}$$

Unter $\mathfrak{C}$ verstehen wir die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. Für jedes $A \in \mathfrak{G}$ sei A' die Restklasse von $\mathfrak{G}$ mod. $\mathfrak{C}$, welche A enthält; die A' sind die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$.

Jedem $\alpha = \Sigma t_i A_i \in P_0$ ordnen wir die Klasse $f(\alpha) = (\Pi A_i^{t_i})'$ zu; diese Abbildung f ist offenbar ein Homomorphismus der additiven Gruppe von P_0 in die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$; sie ist sogar eine Abbildung von P_0 auf die ganze Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, da $A - E \in P_0$ und $f(A - E) = A'$ für jedes $A \in \mathfrak{G}$ ist. Wir behaupten weiter: Der Kern von f, d. h. die Menge der α mit $f(\alpha) = E' = \mathfrak{C}$, ist P_0^2.

Beweis: Es sei erstens $\alpha \in P_0^2$; nach 4.2 ist dann α lineare Verbindung (mit ganzzahligen Koeffizienten) von Elementen der Form $(A - E)(B - E)$; auf Grund der Identität (8) und der Gleichungen

$$f(AB - E) = (ABE^{-1})' = A'B', \quad f(A - E) = A', \quad f(B - E) = B'$$

ergibt sich, daß $f((A - E)(B - E)) = E'$, also auch $f(\alpha) = E'$ ist. Es sei zweitens $\alpha = \Sigma t_i A_i \in P_0$ und $f(\alpha) = E'$; die letzte Voraussetzung besagt, daß $\Pi A_i^{t_i} \in \mathfrak{C}$, also $\Pi A_i^{t_i} = \Pi(U_j V_j U_j^{-1} V_j^{-1})$ mit gewissen U_j, $V_j \in \mathfrak{G}$ ist; nach (10) ist daher

$$\alpha \equiv \Pi(U_j V_j U_j^{-1} V_j^{-1}) - E \qquad \text{mod. } P_0^2 ; \tag{11}$$

wendet man andererseits (10) statt auf α auf das Element

$$0 = \Sigma(U_j + V_j - U_j - V_j)$$

an, so sieht man, daß die rechte Seite der Kongruenz (11) kongruent 0 ist; es ist also $\alpha \equiv 0$ mod. P_0^2, d. h. $\alpha \in P_0^2$.

Damit ist gezeigt: f ist ein Homomorphismus der additiven Gruppe von P_0 auf die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, und der Kern von f ist P_0^2. Es besteht also die Isomorphie

$$P_0/P_0^2 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{C}\,. \tag{12}$$

4.5. Mit den Formeln (7) und (12) ist der folgende Satz bewiesen:

Für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ *ist*

$$\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{C}\,; \tag{13}$$

dabei ist $\mathfrak{C}$ *die Kommutatorgruppe von* $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}^1$ ist also die „Abelsch gemachte Gruppe $\mathfrak{G}$".

5. Ob ähnliche Charakterisierungen, wie sie durch (7) und (13) für die Gruppen $\mathfrak{G}_J^1$ bzw. $\mathfrak{G}^1$ gegeben werden, auch für die Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$, oder wenigstens für die $\mathfrak{G}^n$, mit $n > 1$ möglich sind, weiß ich nicht. Selbst für recht einfache Gruppen $\mathfrak{G}$ scheint es schwierig zu sein, die Strukturen der Gruppen $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{G}^3, \ldots$ wirklich zu ermitteln, während diese Aufgabe für $\mathfrak{G}^1$ durch das Ergebnis von 4.5 als gelöst gelten kann. Auch Fragen nach allgemeinen Sätzen über Beziehungen zwischen den gruppentheoretischen Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ und denen der $\mathfrak{G}^n$ liegen nahe und sind unbeantwortet. Einige wenige hierhergehörige Resultate und Beispiele werden wir später (§ 3) behandeln, und zwar auf Grund der geometrischen Bedeutung der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$.

§ 2. Die Rolle der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ in der Homologietheorie

6. Komplexe mit Automorphismen [2])

6.1. K sei ein Komplex[5]) — simplizial oder auch ein beliebiger Zellenkomplex; er kann endlich oder unendlich sein. J sei ein Ring mit Einselement; wir benutzen ihn als Koeffizientenbereich für die Ketten und Homologien in K; seine Elemente nennen wir t_i.

Für jedes $n \geqslant 0$ sei X^n die Gruppe der n-dimensionalen Ketten; außerdem setzen wir $X^{-1} = J$. Für $n \geqslant 1$, $x \in X^n$ sei $r(x)$ der Rand von x; ist $x \in X^0$, so ist $x = \Sigma t_i x_i^0$, wobei die x_i^0 einfach gezählte Eckpunkte von K sind; wir setzen dann $r(x) = \Sigma t_i$. In jedem Fall, $n \geqslant 0$,

[5]) Wegen der Begriffe aus der Homologietheorie der Komplexe verweise ich auf *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (1935); ich werde dieses Buch als A.-H. zitieren. Im allgemeinen werde ich die dort benutzte Terminologie verwenden; jedoch werde ich statt „algebraischer Komplex" immer „Kette" sagen.

ist r eine homomorphe Abbildung von X^n in X^{n-1}; der Kern dieses Homomorphismus[4]) heiße Z^n, das Bild $r(X^n)$ heiße H^{n-1}. Dann ist Z^n für $n \geqslant 1$ die Gruppe der n-dimensionalen Zyklen, für $n = 0$ die Gruppe der berandungsfähigen 0-dimensionalen Zyklen[6]); H^n ist für $n \geqslant 0$ die Gruppe der n-dimensionalen Ränder. Bekanntlich ist $H^n \subset Z^n$ für $n \geqslant 0$; ferner ist $H^{-1} = X^{-1} = J$, und wir setzen auch noch $Z^{-1} = J$.

Statt $r(x)$ werden wir oft auch $\dot{x}$ schreiben.

Da J ein Einselement besitzt, sind die orientierten Zellen positiver Dimension sowie die Eckpunkte — diese orientieren wir nicht — selbst Ketten. Nachdem man, für jedes $n > 0$, in jeder n-dimensionalen Zelle eine Orientierung ausgezeichnet hat, bilden die so orientierten Zellen x_i^n eine Basis von X^n; ebenso bilden die Eckpunkte x_i^0 eine Basis von X^0. Statt „Basis" werden wir zur Vermeidung von Mißverständnissen auch „J-Basis" sagen. — Die unorientierten Zellen bezeichnen wir mit $|x_i^n|$.

6.2. Unter einem „Automorphismus" von K verstehen wir eine Operation A, welche für jedes n die n-dimensionalen (unorientierten) Zellen permutiert, und zwar so, daß die Seiten einer Zelle $|x_i^n|$ immer in die Seiten der Bildzelle $A|x_i^n|$ übergehen. Wenn K simplizal ist, so ist A eine eineindeutige simpliziale Abbildung von K auf sich.

A ordnet jeder orientierten Zelle x_i^n eine bestimmte orientierte Zelle Ax_i^n zu; für jede Kette $x = \Sigma t_i x_i^n$, $n \geqslant 0$, setzen wir $Ax = \Sigma t_i A x_i^n$; dadurch ist für jedes $n \geqslant 0$ ein, ebenfalls mit A bezeichneter Automorphismus der Gruppe X^n erklärt; zur Ergänzung setzen wir noch $At = t$ für $t \in J = X^{-1}$.

Für jede Kette $x \in X^n$, $n \geqslant 0$, ist

$$A\,r(x) = r(Ax) \tag{1}$$

oder: $A\dot{x} = (Ax)^{\cdot}$. Hieraus folgt, daß die Gruppen Z^n und H^n durch A auf sich abgebildet werden.

6.3. Es sei jetzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von Automorphismen A_j des Komplexes K gegeben. Dann ist der Gruppenring P von $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten aus J gemäß 3.1 erklärt. Für jedes $\alpha = \Sigma t_j A_j \in P$ und jedes $x \in X^n$ setzen wir $\alpha x = \Sigma t_j A_j x$; hierdurch wird, wie man leicht bestätigt, X^n ein P-Modul; ferner folgt mit Hilfe von (1), daß r ein P-Homomorphismus ist und daß Z^n und H^n P-Teilmoduln von X^n sind $(n = 0, 1, \ldots)$.

Wir teilen für jedes $n \geqslant 0$ die Gesamtheit der Zellen $|x_i^n|$ in Transi-

---

[6]) A.-H., 179.

tivitätsbereiche bezüglich $\mathfrak{G}$ ein: $|x_i^n|$ und $|x_k^n|$ gehören zu demselben Bereich, wenn es ein $A_j \in \mathfrak{G}$ gibt, so daß $|x_i^n| = A_j |x_k^n|$ ist. Aus jedem Transitivitätsbereich wählen wir eine Zelle aus und geben ihr (für $n > 0$) eine bestimmte Orientierung; die so ausgewählten Zellen nennen wir $\overline{x}_k^n$ $(n \geqslant 0)$; das System der $\overline{x}_k^n$ heiße E^n. Wenn A_j die Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\overline{x}_k^n$ das System E^n durchlaufen, so kommt unter den $A_j \overline{x}_k^n$ jede n-dimensionale Zelle von K mindestens einmal vor (in einer gewissen Orientierung); jede Kette $x \in X^n$ läßt sich daher auf mindestens eine Weise als $x = \sum t_{jk} A_j \overline{x}_k^n$ mit $t_{jk} \in J$, also als $x = \sum \alpha_k \overline{x}_k^n$ mit $\alpha_k \in P$ darstellen; das bedeutet: E^n ist ein P-Erzeugendensystem des P-Moduls X^n (cf. 1.3).

6.4. Der Automorphismus A von K heißt „fixpunktfrei", wenn durch ihn keine Zelle $|x_i^n|$, $n \geqslant 0$, auf sich abgebildet wird[7]); wir nennen die Gruppe $\mathfrak{G}$ „fixpunktfrei", wenn jeder von der Identität verschiedene Automorphismus $A_j \in \mathfrak{G}$ fixpunktfrei ist.

Wir setzen voraus: $\mathfrak{G}$ *ist fixpunktfrei*. Dann behaupten wir: Das soeben definierte P-Erzeugendensystem E^n ist eine P-Basis von X^n (cf. 1.3), mit anderen Worten: die $\overline{x}_k^n$ sind linear unabhängig in bezug auf Koeffizienten aus P. — Beweis: Wenn $A_j \overline{x}_k^n = A_h \overline{x}_i^n$ ist, so ist $A_h^{-1} A_j \overline{x}_k^n = \overline{x}_i^n$, also $i = k$ und, da $\mathfrak{G}$ fixpunktfrei ist, $A_h^{-1} A_j$ die Identität, folglich $h = j$; wenn also A_j die Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\overline{x}_k^n$ das System E^n durchlaufen, so kommt unter den $A_j \overline{x}_k^n$ jede n-dimensionale Zelle (in einer gewissen Orientierung) nur einmal vor; aus $\sum t_{jk} A_j \overline{x}_k^n = 0$, $t_{jk} \in J$, folgt daher $t_{jk} = 0$, und dies bedeutet: aus $\sum \alpha_k \overline{x}_k^n = 0$, $\alpha_k \in P$, folgt $\alpha_k = 0$.

Hiermit ist gezeigt: X^n ist ein *freier* P-Modul $(n \geqslant 0)$.

7. Reguläre Überlagerungen [8])

7.1. Es sei auch weiterhin $\mathfrak{G}$ eine fixpunktfreie Gruppe von Automorphismen A_j des Komplexes K. Wir fassen in bekannter Weise $\mathfrak{G}$ als Gruppe von „Decktransformationen" A_j auf, welche einen Komplex $\mathfrak{K}$ erzeugen, der von K überlagert wird: eine Zelle von $\mathfrak{K}$ entsteht immer dadurch, daß man die Zellen eines Transitivitätsbereiches in K miteinander identifiziert (cf. 6.3); die Zellen von $\mathfrak{K}$ entsprechen also eineindeutig den Transitivitätsbereichen der Zellen von K. Der Komplex K

[7]) Diese Bezeichnung ist berechtigt; denn wenn man die Zellen als Punktmengen auffaßt, also von dem Komplex K zu dem Polyeder $\overline{K}$ übergeht (cf. A.-H., 128), so besitzt die durch A bewirkte topologische Selbstabbildung von $\overline{K}$ dann und infolge des Fixpunktsatzes für Zellen nur dann keinen Fixpunkt, wenn A im obigen Sinne fixpunktfrei ist.

[8]) Wegen der Begriffe aus der Überlagerungstheorie der Komplexe verweise ich auf *Seifert-Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934), 8. Kapitel. — Ich zitiere dieses Buch als S.-T.

ist eine „reguläre Überlagerung“ des Komplexes $\mathfrak{K}$; umgekehrt: ist $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Komplex und K ein, in bekannter Weise (mit Hilfe eines Normalteilers $\mathfrak{N}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$) konstruierter, regulärer Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$, so ist K ein Komplex mit einer Gruppe $\mathfrak{G}$ fixpunktfreier Automorphismen, welche in der soeben beschriebenen Weise den Komplex $\mathfrak{K}$ erzeugen (dabei ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$).

Jeder Zelle $|x_i^n|$ von K ist diejenige Zelle von $\mathfrak{K}$ zugeordnet, welche dem Transitivitätsbereich entspricht, dem $|x_i^n|$ angehört; diese Zelle von $\mathfrak{K}$ nennen wir $U|x_i^n|$. Dann ist U eine Abbildung von K auf $\mathfrak{K}$ — die „Überlagerungsabbildung“; sie erfüllt für alle Zellen $|x_i^n|$ und alle $A_j \in \mathfrak{G}$ die Gleichung

$$UA_j\,|x_i^n| = U\,|x_i^n|\,. \tag{2}$$

7.2. Die Gruppe der n-dimensionalen Ketten von $\mathfrak{K}$ nennen wir $\mathfrak{X}^n$. Die Abbildung U bewirkt einen Homomorphismus — den wir ebenfalls mit U bezeichnen — von X^n auf $\mathfrak{X}^n$. Bilden, wie in 6.4, die Zellen $\bar{x}_k^n$ eine P-Basis von X^n, so kommt unter den Zellen $\mathfrak{x}_k^n = U\bar{x}_k^n$ jede n-dimensionale Zelle von $\mathfrak{K}$ (in einer gewissen Orientierung) genau einmal vor; die $\mathfrak{x}_k^n$ bilden daher eine J-Basis von $\mathfrak{X}^n$.

Ist $x = \Sigma\alpha_k \bar{x}_k^n$ irgend eine Kette aus X^n und $\alpha_k = \Sigma t_{kj} A_j$, so ist

$$Ux = \sum_{j,k} t_{kj}\, UA_j\, \bar{x}_k^n = \sum_{j,k} t_{kj}\, U\bar{x}_k^n = \sum_{j,k} t_{kj}\, \mathfrak{x}_k^n = \sum_{k} S(\alpha_k)\, \mathfrak{x}_k^n\,,$$

wobei $S(\alpha)$ die in 3.2 erklärte Bedeutung hat. Hieraus sieht man: $Ux = 0$ ist gleichbedeutend mit $S(\alpha_k) = 0$ für alle k; der Kern des Homomorphismus U von X^n auf $\mathfrak{X}^n$, d. h. die Gesamtheit derjenigen $x \in X^n$, für die $Ux = 0$ ist, ist also der Teilmodul X_0^n von X^n, dessen Definition in 3.4 und 1.6 enthalten ist.

7.3. Den Rand einer Kette $\mathfrak{x}$ nennen wir $\mathfrak{r}(\mathfrak{x})$ oder auch $\dot{\mathfrak{x}}$. Es ist

$$Ur(x) = \mathfrak{r}\,Ux\,, \tag{3}$$

also $U\dot{x} = (Ux)^{\cdot}$, für jedes $x \in X^n$ (dies gilt auch noch für $n = 0$, wenn wir den Homomorphismus $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{X}^0$ auf J ebenso definieren wie in 6.1 den Homomorphismus r von X^0 und wenn wir $Ut = t$ für alle $t \in J$ setzen).

Die Zyklengruppen $\mathfrak{Z}^n$, $n > 0$, sind als die Gruppen derjenigen $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}^n$ erklärt, für die $\dot{\mathfrak{x}} = 0$ ist. Aus (3) folgt, daß $U(Z^n) \subset \mathfrak{Z}^n$ ist.

Wir behaupten, daß die folgende Isomorphie besteht:

$$\mathfrak{Z}^n \,/\, U(Z^n) \cong (X_0^{n-1} \frown H^{n-1}) \,/\, H_0^{n-1} \quad ; \quad n = 1\,, 2\,, \ldots ; \tag{4}$$

dabei ist H_0^{n-1} gemäß den Definitionen in 1.6 und 3.4 der Teilmodul von X^{n-1}, der aus denjenigen Ketten besteht, die sich als Summen $\Sigma \alpha_i x_i$ mit $\alpha_i \in P_0$, $x_i \in H^{n-1}$ schreiben lassen.

Beweis von (4): Es sei $x \in X_0^{n-1} \frown H^{n-1}$; daß $x \in H^{n-1}$ ist, bedeutet: $x = \dot{y}$, $y \in X^n$; daß $x \in X_0^{n-1}$ ist, bedeutet (cf. 7.2): $Ux = 0$; es ist also $U\dot{y} = 0$, nach (3) also $(Uy)^{\cdot} = 0$, d. h. $Uy \in \mathfrak{Z}^n$. Nimmt man statt y eine andere Kette y_1 mit $\dot{y}_1 = x$, so ist $y_1 = y + z$, $z \in Z^n$, also $Uy_1 = Uy + Uz$, also $Uy_1 \equiv Uy$ mod. $U(Z^n)$. Unter den Restklassen, in welche die Gruppe $\mathfrak{Z}^n$ nach ihrer Untergruppe $U(Z^n)$ zerfällt, ist also diejenige, die Uy enthält, durch x eindeutig bestimmt; wir nennen diese Restklasse $g(x)$. Die so erklärte eindeutige Abbildung g der Gruppe $X_0^{n-1} \frown H^{n-1}$ in die Gruppe $\mathfrak{R} = \mathfrak{Z}^n/U(Z^n)$ ist offenbar ein Homomorphismus; sie ist sogar eine Abbildung auf die ganze Gruppe $\mathfrak{R}$; denn zu jedem $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}^n$ gibt es, da $\mathfrak{X}^n = U(X^n)$ ist, ein $y \in X^n$ mit $Uy = \mathfrak{z}$, und es ist $\mathfrak{z} = g(\dot{y})$.

Wir haben, um (4) zu beweisen, noch zu zeigen: der Kern[4]) von g ist H_0^{n-1}. Es sei erstens $x \in H_0^{n-1}$; dann ist $x = \Sigma \alpha_i \dot{y}_i$ mit $S(\alpha_i) = 0$, $y_i \in X^n$; setzen wir $\Sigma \alpha_i y_i = y$, so ist $x = \dot{y}$ und $y \in X_0^n$, also $Uy = 0$; mithin ist $g(x)$ das Nullelement von $\mathfrak{R}$, d. h.: x gehört zu dem Kern von g. Es sei zweitens $x \in X_0^{n-1} \frown H^{n-1}$ und $g(x)$ das Nullelement von $\mathfrak{R}$; dann gibt es ein y mit $x = \dot{y}$, $Uy \in U(Z^n)$, also $Uy = Uz$ mit $z \in Z^n$; dann ist $U(y - z) = 0$, also $y - z \in X_0^n$, also $y = z + \Sigma \alpha_i y_i$ mit $S(\alpha_i) = 0$, $y_i \in X^n$, und da $x = \dot{y} = \Sigma \alpha_i \dot{y}_i$ ist, ist $x \in H_0^{n-1}$.

(Bemerkung: Für $n = 0$ ist (4) trivial, da dann beide Seiten 0 sind.)

7.4. Die Gruppen der n-dimensionalen Ränder in $\mathfrak{K}$, also die Gruppen $\mathfrak{r}(\mathfrak{X}^{n+1})$, nennen wir $\mathfrak{H}^n$. Aus (3) und aus $U(X^{n+1}) = \mathfrak{X}^{n+1}$ folgt:

$$U(H^n) = Ur(X^{n+1}) = \mathfrak{r}\,U(X^{n+1}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{X}^{n+1}) = \mathfrak{H}^n \,.$$

Die Faktorgruppen $Z^n/H^n = B^n$ und $\mathfrak{Z}^n/\mathfrak{H}^n = \mathfrak{B}^n$ sind für $n \geqslant 1$ die Bettischen Gruppen von K bzw. $\mathfrak{K}$ (für $n = 0$ sind sie Untergruppen der in der üblichen Weise erklärten Bettischen Gruppen).

Da $U(Z^n) \subset \mathfrak{Z}^n$ und $U(H^n) \subset \mathfrak{H}^n$ ist, bewirkt U eine homomorphe Abbildung von B^n in $\mathfrak{B}^n$, die wir ebenfalls U nennen. Die Elemente der Bildgruppe $U(B^n)$ sind diejenigen Homologieklassen in $\mathfrak{K}$, welche Zyklen aus $U(Z^n)$ enthalten; da aber $\mathfrak{H}^n = U(H^n) \subset U(Z^n)$ ist, gehört eine solche Homologieklasse vollständig zu $U(Z^n)$; die Homologieklassen, welche die Elemente der Gruppe $U(B^n)$ sind, sind also zugleich die Restklassen, in welche die Gruppe $U(Z^n)$ mod. $\mathfrak{H}^n$ zerfällt; folglich ist $U(B^n) = U(Z^n)/\mathfrak{H}^n$. Da andererseits $\mathfrak{B}^n = \mathfrak{Z}^n/\mathfrak{H}^n$ ist, ist

$$\mathfrak{B}^n/U(B^n) \cong \mathfrak{Z}^n/U(Z^n)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\mathfrak{B}^n\,/\,U(B^n) \cong (X_0^{n-1} \frown H^{n-1})\,/\,H_0^{n-1}\,, \qquad n = 1\,,\,2\,, \ldots\,. \tag{6}$$

8. Azyklische reguläre Überlagerungen. Sätze II, III, IV

Ein Komplex K heißt „azyklisch" in der Dimension n, wenn jeder n-dimensionale (berandungsfähige) Zyklus in K berandet, d. h. wenn $Z^n = H^n$ ist (für $n = 0$ bedeutet dies: K ist zusammenhängend).

8.1. Wir betrachten einen Komplex K mit denselben Eigenschaften wie in Nr. 7 und setzen überdies voraus: *K ist azyklisch in den Dimensionen $n = 0, 1, \ldots, N-1$; d. h.:*

$$Z^{n-1} = H^{n-1} \quad \textit{für} \quad n = 0\,, 1\,, \ldots, N\,; \tag{7}$$

(für $n = 0$ gilt dies laut unserer Festsetzung in 6.1).

Die Folge der Gruppen

$$\{J = Z^{-1}\,; \quad X^0 \supset Z^0\,; \;\; X^1 \supset Z^1; \ldots\,; \;\; X^{N-1} \supset Z^{N-1}\,; \quad X^N \supset Z^N\}$$

hat folgende Eigenschaften: Die X^n sind freie P-Moduln (cf. 6.4); die Z^n sind P-Teilmoduln der X^n (cf. 6.3); die Rand-Operation r ist ein P-Homomorphismus (cf. 6.3), der X^n auf H^{n-1}, also nach (7) auf Z^{n-1} abbildet und Z^n als Kern besitzt (und zwar gilt dies auf Grund der in 6.1 getroffenen Festsetzungen auch für $n = 0$). Somit ist diese Folge von Gruppen eine (endliche) „(J, P)-Folge" im Sinne von 2.1. Nach 2.3 und 3.5 ist daher

$$(X_0^n \frown Z^n)\,/\,Z_0^n \cong \mathfrak{G}_J^{n+1} \quad \textit{für} \quad n = 0\,, 1\,, \ldots, N\,. \tag{8}$$

8.2. Aus (7) und (8) folgt

$$(X_0^{n-1} \frown H^{n-1})\,/\,H_0^{n-1} \cong \mathfrak{G}_J^n \quad \textit{für} \quad n = 1\,, 2\,, \ldots, N\,. \tag{9}$$

Statt (7) können wir auch schreiben:

$$B^n = 0 \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \ . \tag{7'}$$

Aus (6), (7′) und (9) folgt

$$\mathfrak{B}^n \cong \mathfrak{G}_J^n \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \ , \tag{10}$$

und außerdem folgt aus (6) und (9)

$$\mathfrak{B}^N / U(B^N) \cong \mathfrak{G}_J^N \ . \tag{11}$$

Mit den Isomorphien (10) und (11) ist unser Hauptziel erreicht. Wir formulieren diese Ergebnisse noch einmal ausführlich in den nachstehenden beiden Sätzen:

Satz II. *Es seien: J ein Ring mit Einselement; K ein (endlicher oder unendlicher) Komplex, der in bezug auf den Koeffizientenbereich J azyklisch in den Dimensionen* $0, 1, \ldots, N-1$ *ist; $\mathfrak{G}$ eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K* (cf. 6.4); *$\mathfrak{K}$ der von $\mathfrak{G}$ erzeugte, von K überlagerte Komplex* (cf. 7.1); *$\mathfrak{B}_J^n$ die n-te Bettische Gruppe von $\mathfrak{K}$ in bezug auf J.*

Dann sind die Gruppen $\mathfrak{B}_J^n$ für $n = 1, 2, \ldots, N-1$ *isomorph mit den Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$; ihre Strukturen sind also durch die Strukturen von $\mathfrak{G}$ und J vollständig bestimmt, unabhängig von K und von der speziellen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch Automorphismen.*

Satz III. *Die Voraussetzungen des Satzes II seien erfüllt; es sei ferner U die Überlagerungsabbildung von K auf $\mathfrak{K}$* (cf. 7.1) *und B_J^n die n-te Bettische Gruppe von K.*

Dann gilt noch die weitere Isomorphie $\mathfrak{B}_J^N / U(B_J^N) \cong \mathfrak{G}_J^N$; also ist auch die Struktur der Gruppe $\mathfrak{B}_J^N / U(B_J^N)$ durch die Strukturen von $\mathfrak{G}$ und J bestimmt.

Übrigens ist der Satz II ein Korollar des Satzes III.

8.3. Der in der Formel (8) zugelassene Fall $n = N$ ist bei der Herleitung der Formeln (10) und (11), also beim Beweis der Sätze II und III, nicht benutzt worden. Wir wollen auch diesen Teil von (8) als Satz formulieren. Dafür erinnern wir an die Bedeutung der auf der linken Seite von (8) auftretenden Gruppen: nach 7.2 besteht $X_0^n \frown Z^n$ aus denjenigen n-dimensionalen Zyklen z von K, für die $Uz = 0$ ist; Z_0^n ist gemäß 1.6 die Gruppe aller endlichen Summen $\sum \alpha_i z_i$ mit $z_i \in Z^n$, $\alpha_i \in P_\frown$, wobei

P_0 in 3.4 erklärt ist; nach 4.2 ist dann und nur dann $\alpha \in P_0$, wenn $\alpha = \Sigma t_j (A_j - E)$ ist, wobei E das Einselement von $\mathfrak{G}$ ist. Somit ergibt sich:

Satz IV. *Unter den Voraussetzungen des Satzes II gilt auch noch die Isomorphie* $(X_0^N \frown Z^N)/Z_0^N \cong \mathfrak{G}_J^{N+1}$; *dabei ist* $X_0^N \frown Z^N$ *die Gruppe derjenigen N-dimensionalen Zyklen von K, die durch die Überlagerungsabbildung U auf die Null abgebildet werden, und* Z_0^N *die Gruppe aller linearen Verbindungen (mit Koeffizienten aus J) der Zyklen* $Az - z$, *wobei A eine beliebige Decktransformation aus* $\mathfrak{G}$ *und z einen beliebigen N-dimensionalen Zyklus von K bezeichnet („Zyklus" immer in bezug auf J).*

Beim Beweis der Formel (8), also beim Beweis des Satzes IV, sind übrigens die Abschnitte 7.3, 7.4 und 8.2 nicht benutzt worden.

9. Spezialfälle der Sätze II, III, IV. — Bemerkungen

9.1. Der universelle Überlagerungskomplex K eines beliebigen zusammenhängenden Komplexes $\mathfrak{K}$ ist eine reguläre Überlagerung von $\mathfrak{K}$, und die zugehörige Gruppe $\mathfrak{G}$ der Decktransformationen ist mit der Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$ isomorph. Daher sind in den Sätzen II, III, IV die folgenden Tatsachen enthalten:

$\mathfrak{K}$ sei ein zusammenhängender Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; der universelle Überlagerungskomplex K sei in bezug auf den Koeffizientenring J azyklisch in den Dimensionen n mit $n < N$. Dann gelten die Isomorphien

$$\text{(II)} \quad \mathfrak{B}_J^n \cong \mathfrak{G}_J^n \quad \textit{für} \quad 0 < n < N\,,$$

welche insbesondere zeigen, daß die Strukturen dieser Bettischen Gruppen vollständig durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und den Koeffizientenring J bestimmt sind, sowie die Isomorphien

$$\text{(III)} \quad \mathfrak{B}_J^N / U(B_J^N) \cong \mathfrak{G}_J^N\,, \qquad \text{(IV)} \quad (X_0^N \frown Z^N)/Z_0^N \cong \mathfrak{G}_J^{N+1}\,,$$

deren Bedeutung in den Sätzen III und IV erklärt ist.[9])

9.2. Der universelle Überlagerungskomplex K eines Komplexes $\mathfrak{K}$ ist nicht nur zusammenhängend, sondern auch einfach zusammenhängend, d. h. jeder geschlossene Weg ist homotop 0; daraus folgt bekanntlich, daß K azyklisch nicht nur in der Dimension 0, sondern auch in der Dimension 1 ist, und zwar in bezug auf jeden Koeffizientenbereich; die Voraussetzungen der Sätze II, III, IV sind also erfüllt, wenn man $N = 2$ setzt. Hieraus folgt:

[9]) Hier kann man, um den am Anfang der Arbeit zitierten Satz von Hurewicz zu erhalten, den § 5 anschließen.

Für jeden zusammenhängenden Komplex $\mathfrak{K}$ gelten die Isomorphien

$$(\mathrm{II}_2)\quad \mathfrak{B}^1_J \cong \mathfrak{G}^1_J\,, \qquad (\mathrm{III}_2)\quad \mathfrak{B}^2_J / U(B^2_J) \cong \mathfrak{G}^2_J\,, \qquad (\mathrm{IV}_2)\quad (X^2_0 \frown Z^2)/Z^2_0 \cong \mathfrak{G}^3_J\,,$$

wobei $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$ und der den Formeln (III_2) und (IV_2) zugrundeliegende Komplex K der universelle Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$ ist.

Die Formel (II_2) zeigt die bekannte Tatsache, daß die erste Bettische Gruppe eines Komplexes durch dessen Fundamentalgruppe bestimmt ist; wir kommen darauf sogleich noch zurück (9.4). Die Formel (III_2) zeigt: die zweite Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^2_J$ besitzt die durch die Fundamentalgruppe bestimmte Gruppe $\mathfrak{G}^2_J$ als homomorphes Bild; bei gegebener Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ kann also $\mathfrak{B}^2_J$ „nicht zu klein" sein; dies hatte ich, für den ganzzahligen Koeffizientenbereich, früher durch eine Relation bewiesen, die ähnlich wie (III_2) lautet, in der aber statt $U(B^2)$ und $\mathfrak{G}^2$ Gruppen auftreten, die anders definiert sind[10]); daß die frühere Formel mit (III_2) übereinstimmt, wird noch gezeigt werden (16.7).

9.3. Wenn $\mathfrak{K}$ zusammenhängend und wenn K ein regulärer Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$ ist, den man in bekannter Weise[8]) mit Hilfe eines Normalteilers der Fundamentalgruppe von $\mathfrak{K}$ konstruiert hat, so ist auch K zusammenhängend, also azyklisch in der Dimension 0; daher sind die Sätze II, III, IV anwendbar, wenn man $N = 1$ setzt; der Satz II wird dann inhaltslos, aber die Sätze III und IV liefern noch folgende Aussagen:

K sei ein (zusammenhängender) regulärer Überlagerungskomplex des zusammenhängenden Komplexes $\mathfrak{K}$; die zugehörige Gruppe von Decktransformationen sei $\mathfrak{G}$. Dann ist

$$(\mathrm{III}_1)\quad \mathfrak{B}^1_J / U(B^1_J) \cong \mathfrak{G}^1_J\,, \qquad (\mathrm{IV}_1)\quad (X^1_0 \frown Z^1)/Z^1_0 \cong \mathfrak{G}^2_J\ .$$

9.4. Wenn man in (II_2) und (III_1) für $\mathfrak{G}^1_J$ die durch 4.1 (7) und 4.5 (13) gegebenen Ausdrücke einsetzt, so erhält man vier Formeln, die Interesse verdienen. Die einfachste von ihnen lautet:

$$\mathfrak{B}^1 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{C}\,; \tag{12}$$

in ihr ist $\mathfrak{B}^1$ die ganzzahlige erste Bettische Gruppe eines beliebigen (zusammenhängenden) Komplexes, $\mathfrak{G}$ dessen Fundamentalgruppe und $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$.

---

[10]) *H. Hopf*, Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe, Comment. Math. Helvet. 14 (1942), 257—309.

Die Relation (12) ist wohlbekannt; der übliche Beweis[11]) benutzt die Formel 4.5 (13) nicht. Nimmt man (12) als bekannt an, so erhält man umgekehrt mit Hilfe der Formel (II_2) einen einfachen Beweis der Relation 4.5 (13), allerdings nur unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}$ abzählbar[12]) ist: In diesem Fall läßt sich $\mathfrak{G}$ durch abzählbar viele Erzeugende mit abzählbar vielen Relationen charakterisieren; daher gibt es einen Komplex $\mathfrak{K}$, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist[13]); für $\mathfrak{K}$ gilt (12); aus (12) und aus (II_2) — in dem Spezialfall, daß J der Ring der ganzen Zahlen ist — folgt 4.5 (13).

9.5. Zu den vorstehenden Sätzen machen wir noch folgende Bemerkungen. K sei regulärer Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$; die Fundamentalgruppen F von K und $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ deuten wir in bekannter Weise als Gruppen geschlossener Wege, wobei wir deren Anfangs- und Endpunkt a in K und $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{K}$ so wählen, daß $Ua = \mathfrak{a}$ ist; dann liegt bekanntlich folgende Situation vor[8]): F wird durch U isomorph auf einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{F}$ abgebildet, und die Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ ist mit der zu K und $\mathfrak{K}$ gehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ von Decktransformationen isomorph. Es ist also

$$\mathfrak{F}/U(F) \cong \mathfrak{G}\,. \tag{*}$$

Dies ist ein Gegenstück zu der im Satz III ausgesprochenen Isomorphie und insbesondere zu der Formel (III_1); die letztere, für den ganzzahligen Koeffizientenbereich, entsteht aus (*), wenn man die Gruppen $\mathfrak{F}$, F, $\mathfrak{G}$ „Abelsch macht“, d. h. durch die Faktorgruppen nach ihren Kommutatorgruppen ersetzt.

Man kann die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}$, ohne von Decktransformationen zu reden, geradezu durch (*) definieren. Dann lassen sich die Sätze II und III folgendermaßen aussprechen:

K sei ein regulärer Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$; er sei azyklisch für $n < N$; die Fundamentalgruppen von K und $\mathfrak{K}$ seien F bzw. $\mathfrak{F}$. Dann ist

$$\mathfrak{B}_J^n / U(B_J^n) \cong (\mathfrak{F} / U(F))_J^n \quad \textit{für} \quad 0 < n \leqq N\,,$$

also

$$\mathfrak{B}_J^n \cong (\mathfrak{F} / U(F))_J^n \quad \textit{für} \quad 0 < n < N\,.$$

Ist K der universelle Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$, so ist F die Nullgruppe, $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}$, und man erhält die Isomorphien 9.1 (II) und 9.1 (III).

[11]) S.-T., 173.

[12]) Unter „abzählbar“ verstehe ich „endlich“ oder „abzählbar-unendlich“.

[13]) Einen solchen Komplex kann man nach dem Verfahren konstruieren, das in S.-T., 180, Aufgabe 3, für den Fall von endlich vielen Erzeugenden und Relationen angedeutet ist.

§ 3. Geometrische Herleitung einiger algebraischer Eigenschaften der Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$

10. Bestimmung der $\mathfrak{G}_J^n$ für spezielle $\mathfrak{G}$

10.1. *$\mathfrak{G}$ sei eine abzählbare freie Gruppe; dann ist $\mathfrak{G}_J^n = 0$ für $n \geqslant 2$ bei beliebigem J.*

Beweis: Da $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe mit endlich oder abzählbar unendlich vielen freien Erzeugenden ist, gibt es einen Streckenkomplex $\mathfrak{K}$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; der universelle Überlagerungskomplex K von $\mathfrak{K}$ ist ein Baumkomplex; er ist azyklisch in allen Dimensionen und in bezug auf jeden Koeffizientenbereich; daher gilt 9.1 (II) für alle $n > 0$ und jeden Ring J; da aber $\mathfrak{K}$ eindimensional ist, ist $\mathfrak{B}_J^n = 0$ für $n > 1$.

10.2. *$\mathfrak{G}$ sei die freie Abelsche Gruppe vom Range r (d. h. das direkte Produkt von r unendlich-zyklischen Gruppen); dann ist $\mathfrak{G}_J^n$ die direkte Summe von $\binom{r}{n}$ Gruppen, die mit J isomorph sind.*

Beweis: $\mathfrak{G}$ ist die Fundamentalgruppe des r-dimensionalen Torus $\mathfrak{K} = T^r$, d. h. des topologischen Produktes von r Kreislinien; der universelle Überlagerungskomplex von T^r ist der euklidische Raum R^r; er ist azyklisch in allen Dimensionen und für alle J; daher gilt 9.1 (II) für alle $n > 0$ und alle J. Die n-te Bettische Zahl von T^r ist $\binom{r}{n}$; Torsion ist nicht vorhanden; daher ist die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}_J^n$ die direkte Summe von $\binom{r}{n}$ mit J isomorphen Gruppen[14]).

Korollar: *Es ist $\mathfrak{G}_J^n \neq 0$ für $n \leqslant r$ und $\mathfrak{G}_J^n = 0$ für $n > r$ (bei beliebigem J).*

10.3. Für (additiv geschriebene) Abelsche Gruppen $\mathfrak{F}$ und positive ganze Zahlen m benutzen wir folgende Begriffe und Bezeichnungen: $\mathfrak{F}_m$ ist die Restklassengruppe von $\mathfrak{F}$ nach der Gruppe aller Elemente mx mit $x \in \mathfrak{F}$; ${}_m\mathfrak{F}$ ist die Gruppe derjenigen $x \in \mathfrak{F}$, für welche $mx = 0$ ist. Indem wir unter $\mathfrak{A}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen verstehen, bezeichnet also $\mathfrak{A}_m$ die zyklische Gruppe der Ordnung m; gelegentlich verstehen wir unter $\mathfrak{A}_m$ auch den Restklassen*ring* von $\mathfrak{A}$ mod. m.

---

[14]) Die Zusammenhänge zwischen den Bettischen Gruppen in bezug auf verschiedene Koeffizientenbereiche sind dargestellt in A.-H., Kap. V (besonders S. 233); sowie bei *E. Čech*, Les groupes de Betti d'un complexe infini, Fund. Math. 25 (1935), 33—44.

Es sei $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{A}_m$ *; dann ist*

$$\mathfrak{G}_J^{2r-1} \cong J_m\,, \qquad \mathfrak{G}_J^{2r} \cong {}_mJ \quad \textit{für} \quad r = 1\,, 2\,,\ldots\,, \tag{1}$$

also speziell

$$\mathfrak{G}^{2r-1} \cong \mathfrak{A}_m\,, \qquad \mathfrak{G}^{2r} = 0 \quad \textit{für} \quad r = 1\,, 2\,,\ldots\,. \tag{2}$$

Beweis: Die Sphäre S^{2r-1} ist bekanntlich regulärer — für $r > 1$ sogar universeller — Überlagerungsraum einer geschlossenen und orientierbaren Mannigfaltigkeit L^{2r-1} mit $\mathfrak{G}$ als Decktransformationen-Gruppe (L^{2r-1} ist für $r > 1$ ein „Linsenraum", für $r = 1$ mit der Kreislinie S^1 homöomorph). S^{2r-1} ist azyklisch für $n < 2r - 1$; daher sind die Sätze III und IV mit $N = 2r - 1$ anwendbar. Bezeichnen wir die $(2r - 1)$-dimensionalen ganzzahligen Basiszyklen von S^{2r-1} und L^{2r-1} mit z bzw. $\mathfrak{z}$, so ist $Uz = m\mathfrak{z}$; aus Satz III folgt daher: $\mathfrak{G}^{2r-1} \cong \mathfrak{A}_m$; und da U keinen anderen N-dimensionalen Zyklus auf die Null abbildet als den Nullzyklus, folgt aus Satz IV: $\mathfrak{G}^{2r} = 0$. Damit ist (2) bewiesen.

Nach 9.1 (II) sind die Gruppen $\mathfrak{G}_J^n$ für $0 < n < 2r - 1$ mit den Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}_J^n$ von L^{2r-1} isomorph. Da durch die Formeln (2) die Gruppen $\mathfrak{G}^n$ für alle n bekannt sind, ist speziell für die ganzzahligen Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^n$:

$$\mathfrak{B}^n \cong \mathfrak{A}_m \text{ bei ungeradem } n < 2r-1\,, \quad \mathfrak{B}^n = 0 \text{ bei geradem } n > 0\,. \tag{3}$$

Aus diesen $\mathfrak{B}^n$ kann man nach bekannten Regeln die Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}_J^n$ von L^{2r-1}, also die $\mathfrak{G}_J^n$, für beliebiges J berechnen[14]). Das Ergebnis besteht in den Formeln (1).

10.4. Zugleich hat sich die bekannte Tatsache ergeben: Für einen Linsenraum L^{2r-1} mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{A}_m$ sind die ganzzahligen n-ten Bettischen Gruppen durch die Formeln (3) bestimmt.

10.5. Wir heben — im Hinblick auf eine Anwendung in 13.4 — eine spezielle Folgerung aus (1) hervor: Wenn $mx \neq 1$ für alle $x \in J$ ist, so ist $\mathfrak{G}_J^n \neq 0$ für alle ungeraden n; denn dann bilden die Elemente mx eine echte Untergruppe von J, es ist also $J_m \neq 0$. (Dagegen sieht man leicht: wenn es ein $a \in J$ mit $ma = 1$ gibt, so ist $J_m = {}_mJ = 0$, also sind alle $\mathfrak{G}_J^n = 0$.)

10.6. $\mathfrak{G}$ *sei die direkte Summe*[15]) $\mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_m$*; dann ist* $\mathfrak{G}^{2r}$ *die direkte Summe von r Gruppen* $\mathfrak{A}_m$, $\mathfrak{G}^{2r-1}$ *die direkte Summe von* $r + 1$ *Gruppen* $\mathfrak{A}_m$ $(r = 1, 2, \ldots)$; *ist* $J = \mathfrak{A}_q$ *— also der Restklassenring mod.* q *—, so ist* $\mathfrak{G}_J^n$ *für jedes n die direkte Summe von* $n + 1$ *Gruppen* $\mathfrak{A}_{(m,q)}$, *wobei* (m, q) *der größte gemeinsame Teiler von m und q ist.*

[15]) Wir schreiben hier ausnahmsweise auch $\mathfrak{G}$ additiv.

Beweis: Das topologische Produkt $\mathfrak{K} = L^{2r-1} \times L^{2r-1}$ zweier Linsenräume L^{2r-1}, deren Fundamentalgruppe $\mathfrak{A}_m$ ist, hat die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; der universelle Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$ ist das Sphärenprodukt $K = S^{2r-1} \times S^{2r-1}$; er ist azyklisch für $n < 2r - 1$; in diesen Dimensionen stimmen daher nach 9.1 (II) die Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^n_J$ von $\mathfrak{K}$ mit den $\mathfrak{G}^n_J$ überein. Die ganzzahligen Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^n$ des Produktes $\mathfrak{K}$ sind nach der Formel von Künneth[16]) aus den ganzzahligen Bettischen Gruppen der Faktoren L^{2r-1} zu berechnen; die letztgenannten Gruppen sind nach 10.4 bekannt; die Formel liefert für die $\mathfrak{B}^n$, und damit für die $\mathfrak{G}^n$, das oben behauptete Resultat. Aus den somit bekannten $\mathfrak{B}^n$ berechnet man jetzt weiter in bekannter Weise[14]) die $\mathfrak{B}^n_J$, und damit die $\mathfrak{G}^n_J$, und zwar bei beliebigem J; für $J = A_q$ findet man das oben behauptete Ergebnis. Dies alles gilt zunächst für $n < 2r - 1$; da r beliebig ist, gilt es für alle n. —

10.7. Auf dieselbe Weise — durch topologische Produktbildung — kann man immer, wenn $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, also ein direktes Produkt zyklischer Gruppen ist, die Gruppen $\mathfrak{G}^n$ bestimmen; dabei hat man das Ergebnis von 10.3 und, falls $\mathfrak{G}$ unendlich ist, das Ergebnis von 10.2 zu benutzen. —

Für einige weitere, spezielle Gruppen $\mathfrak{G}$ werden die Gruppen $\mathfrak{G}^n$ in 15.3 ermittelt werden.

11. Endliche Gruppen

Satz: Wenn $\mathfrak{G}$ endlich ist, so sind auch alle Gruppen $\mathfrak{G}^n$ endlich, und die Ordnung jedes Elementes jeder Gruppe $\mathfrak{G}^n$ ist Teiler der Ordnung g von $\mathfrak{G}$.

11.1. Den Beweis beginnen wir mit folgendem Hilfssatz:

K sei ein g-blättriger Überlagerungskomplex des Komplexes $\mathfrak{K}$; er sei azyklisch in der Dimension n. Dann erfüllt jeder n-dimensionale Zyklus $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{K}$ die Homologie $g\mathfrak{z} \sim 0$.

Beweis des Hilfssatzes: Durch die Überlagerungsabbildung U (cf. Nr. 7) werden auf jede orientierte Zelle $\mathfrak{x}_i$ von $\mathfrak{K}$ genau g orientierte Zellen $x_{i1}, \ldots, x_{ig}$ von K abgebildet; wir setzen $\varphi(\mathfrak{x}_i) = x_{i1} + \cdots + x_{ig}$ und allgemein $\varphi(\mathfrak{y}) = \Sigma t_i \varphi(\mathfrak{x}_i)$ für jede Kette $\mathfrak{y} = \Sigma t_i \mathfrak{x}_i$ von $\mathfrak{K}$. Es ist $U\varphi(\mathfrak{x}_i) = g\mathfrak{x}_i$ für jede Zelle $\mathfrak{x}_i$, also auch $U\varphi(\mathfrak{y}) = g\mathfrak{y}$ für jede Kette $\mathfrak{y}$. Ferner ist $\varphi(\dot{\mathfrak{y}}) = (\varphi(\mathfrak{y}))^{\cdot}$; hieraus folgt: wenn $\mathfrak{z}$ Zyklus ist, so ist auch $\varphi(\mathfrak{z})$ Zyklus. Nun sei $\mathfrak{z}$ ein n-dimensionaler Zyklus in $\mathfrak{K}$; da K azyklisch in der Dimension n ist, gibt es eine Kette y in K mit $\varphi(\mathfrak{z}) = \dot{y}$; dann ist $g\mathfrak{z} = U\varphi(\mathfrak{z}) = U\dot{y} = (Uy)^{\cdot}$, also $g\mathfrak{z} \sim 0$.

[16]) A.-H., 308.

Zusatz zu dem Hilfssatz: Wenn K endlich ist, so ist die ganzzahlige n-te Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^n$ von $\mathfrak{K}$ endlich. Denn wenn K endlich ist, so ist auch $\mathfrak{K}$ endlich, und $\mathfrak{B}^n$ ist daher eine (Abelsche) Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden; andererseits enthält $\mathfrak{B}^n$ nach dem Hilfssatz nur Elemente endlicher Ordnung; folglich ist $\mathfrak{B}^n$ endlich.

11.2. Um unseren oben ausgesprochenen Satz zu beweisen, genügt es, zu der vorgelegten endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ und zu jeder positiven Zahl N einen Komplex K anzugeben, der die folgenden drei Eigenschaften hat: a) er ist endlich; b) er ist azyklisch in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$; c) er gestattet eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe, fixpunktfreie Gruppe von Automorphismen.

Wenn man nämlich einen solchen Komplex K hat, so gehört zu der unter c) genannten Automorphismengruppe ein von K regulär überlagerter Komplex $\mathfrak{K}$; nach (b) und nach Satz II sind für $n < N$ die Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^n$ von $\mathfrak{K}$ isomorph mit den $\mathfrak{G}^n$; andererseits folgt aus (a), (b) und 11.1, daß diese $\mathfrak{B}^n$ endlich und daß die Ordnungen ihrer Elemente Teiler von g sind. Somit haben die $\mathfrak{G}^n$ mit $n < N$ die behaupteten Eigenschaften; da aber N beliebig groß sein kann, gilt dies für alle n.

11.3. Um einen Komplex K mit den Eigenschaften (a), (b), (c) zu konstruieren, nehmen wir $N+1$ Systeme $K_0^0, K_1^0, \ldots, K_N^0$ von je g Punkten; die Punkte der Vereinigungsmenge $M = \Sigma K_j^0$ seien in allgemeiner Lage — (sie seien etwa die Eckpunkte eines Simplexes der Dimension $(N+1)g-1$); wir greifen diejenigen Teilmengen von M heraus, die aus jedem System K_j^0 höchstens einen Punkt enthalten; die Punkte jeder dieser Teilmengen spannen ein Simplex auf; diese Simplexe bilden einen Komplex K. Wir behaupten: K hat die Eigenschaften (a), (b), (c).

Daß K endlich ist, ist klar.

Daß K die Eigenschaft (b) besitzt, kann man folgendermaßen beweisen: Diejenigen Simplexe von K, deren Eckpunkte in den Systemen $K_0^0, K_1^0, \ldots, K_r^0$ liegen, bilden einen Komplex K^r; es ist also $K^N = K$. Der Komplex K^r besteht erstens aus den Simplexen von K^{r-1} und zweitens aus den Simplexen, die von je einem Simplex aus K^{r-1} und je einem Punkt aus K_r^0 aufgespannt werden; auf Grund dieses Zusammenhanges zwischen K^{r-1} und K^r beweist man leicht[17]) — was ich hier nicht durch-

[17]) Man kann die Tatsache benutzen, daß K die „Verbindung" (cf. [28])) von K^{r-1} und K_r^0 ist, und die allgemeine Formel für die Bettischen Gruppen einer Verbindung anwenden (l. c. [28])); oder man kann die g Eckpunkte von K_r^0 nacheinander zu K^{r-1} hinzufügen und jedesmal einen „Additionssatz" (A.-H., Kap. VII, § 2) anwenden; aber der obige Fall st so einfach, daß sich die Heranziehung dieser allgemeinen Hilfsmittel kaum lohnt.

führe — die folgende Beziehung: wenn K^{r-1} azyklisch in der Dimension $n-1$ ist, so ist K^r azyklisch in der Dimension n. Hieraus und aus der trivialen Tatsache, daß jeder Komplex $K^r, r > 0$, zusammenhängend, also azyklisch in der Dimension 0 ist, folgt durch Induktion: K^r ist azyklisch in den Dimensionen $0, 1, \ldots, r-1$. Für $r = N$ ist das die Eigenschaft (b) des Komplexes K.

Um (c) zu beweisen, ordne man für jedes j aus der Reihe $0, 1, \ldots, N$ die Punkte von K_j^0 eineindeutig den Elementen $A_i \in \mathfrak{G}$ zu und bezeichne den Punkt, der dem Element A_i entspricht, mit $p_j^{A_i}$. Dann verstehe man für jedes $A \in \mathfrak{G}$ unter T_A diejenige Permutation der Eckpunkte von K, die $p_j^{A_i}$ in $p_j^{AA_i}$ überführt — für alle $A_i \in \mathfrak{G}$ und $j = 0, 1, \ldots, N$. Die Permutation T_A bewirkt offenbar eine eineindeutige simpliziale Abbildung, also einen Automorphismus von K; dabei geht, wenn A nicht die Identität ist, kein Simplex in sich über — es hat sogar niemals ein Simplex mit seinem Bild einen Eckpunkt gemein; T_A ist also fixpunktfrei. Diese T_A bilden, wenn A die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe. Es gilt also (c).

12. Die Gruppe $\mathfrak{G}^2$

In ähnlicher Weise, wie wir am Schluß von 9.4 bei Beschränkung auf abzählbare[11]) Gruppen $\mathfrak{G}$ einen Beweis der Formel 4.5 (13) für die Gruppe $\mathfrak{G}^1$ geführt haben, wollen wir jetzt eine Formel für die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ herleiten.

12.1. Zunächst zwei gruppentheoretische Vorbemerkungen. Erstens: Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ ist homomorphes Bild freier Gruppen $\mathfrak{F}$; man erhält einen solchen Homomorphismus, wenn man die Elemente eines beliebigen Erzeugendensystems von $\mathfrak{G}$ — das endlich oder unendlich, z. B. mit $\mathfrak{G}$ identisch sein kann — zugleich als freie Erzeugende einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ auffaßt; dann ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{R}$, wobei $\mathfrak{R}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{F}$ ist. Eine solche Darstellung von $\mathfrak{G}$ in der Form $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ liegt also insbesondere immer dann vor, wenn $\mathfrak{G}$ durch Erzeugende $e_1, e_2, \ldots$ und Relationen $R_i(e_1, e_2, \ldots) = 1$ gegeben ist; $\mathfrak{R}$ ist dann der von den Elementen $R_i(e_1, e_2, \ldots)$ der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ erzeugte Normalteiler. Wenn $\mathfrak{G}$ abzählbar ist, so ist auch $\mathfrak{F}$ abzählbar.

Zweitens: Ist $\mathfrak{F}$ irgend eine Gruppe, $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{F}$, so verstehen wir unter $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ die Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die von allen Elementen $xrx^{-1}r^{-1}$ mit $x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$, erzeugt wird. Ist $\mathfrak{R}$ Normalteiler von $\mathfrak{F}$, so ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$. Die Gruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F})$ ist die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$; wir nennen sie kurz $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$. Es ist immer $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$.

12.2. Unsere Behauptung lautet:

Es sei $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$, *wobei* $\mathfrak{F}$ *eine abzählbare freie Gruppe und* $\mathfrak{N}$ *ein Normalteiler von* $\mathfrak{F}$ *ist; dann ist*

$$\mathfrak{G}^2 \cong (\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \frown \mathfrak{N})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})\,. \tag{4}$$

Diese Formel ist unter Umständen, wenn $\mathfrak{G}$ in besonders einfacher Weise durch Erzeugende und Relationen gegeben ist, geeignet, die Struktur von $\mathfrak{G}^2$ auf algebraischem Wege wirklich zu bestimmen[18]). Es ist übrigens anzunehmen, daß sie sich auch für nicht-abzählbare Gruppen $\mathfrak{G}$ beweisen läßt.

12.3. Für den Beweis von (4) betrachten wir einen Streckenkomplex $\mathfrak{K}$, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ ist, und konstruieren den zu dem Normalteiler $\mathfrak{N}$ gehörigen regulären Überlagerungskomplex K von $\mathfrak{K}$; die Fundamentalgruppe F von K ist isomorph mit $\mathfrak{N}$, und zwar wird der Isomorphismus folgendermaßen vermittelt: wir deuten F und $\mathfrak{F}$ in bekannter Weise als Gruppen geschlossener Wege in K bzw. $\mathfrak{K}$; dann wird F durch die Überlagerungsabbildung U isomorph auf $\mathfrak{N}$ abgebildet. Die zu K und $\mathfrak{K}$ gehörige Gruppe von Decktransformationen ist $\mathfrak{G}$. [8])

Auf Grund der Isomorphie 9.3 (IV_1) für den ganzzahligen Koeffizientenring J ist unsere Behauptung (4) äquivalent mit der folgenden:

$$(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \frown \mathfrak{N})\,/\,\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N}) \cong (X_0^1 \frown Z^1)\,/\,Z_0^1\,. \tag{4'}$$

12.4. Da F durch U isomorph auf $\mathfrak{N}$ abgebildet wird, existiert der Isomorphismus U^{-1} von $\mathfrak{N}$ auf F. Jeder geschlossene Weg $w \in F$ bestimmt einen Zyklus $z = P(w) \in Z^1$; dabei ist P bekanntlich ein Homomorphismus von F auf Z^1, dessen Kern[4]) die Kommutatorgruppe C_F von F ist[19]). $Q = PU^{-1}$ ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{N}$ auf Z^1. Die Behauptung (4′) ist in den folgenden beiden Behauptungen über die Abbildung Q enthalten:

a) Das Urbild von $X_0^1 \frown Z^1$ ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \frown \mathfrak{N}$.

b) Das Urbild von Z_0^1 ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$.

Beweis von (a): Für ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{N}$ ist dann und nur dann $Q(\mathfrak{x}) \in X_0^1 \frown Z^1$, wenn $Q(\mathfrak{x}) \in X_0^1$ ist; dies ist nach 7.2 gleichbedeutend mit: $UQ(\mathfrak{x}) = 0$, also mit $UPU^{-1}(\mathfrak{x}) = 0$; nun ist aber $UPU^{-1} = \mathfrak{P}$ der zu P analoge

[18]) Cf. l. c.[13]), Nr. 14; die dort $\mathfrak{G}_1^*$ genannte Gruppe ist unsere Gruppe $\mathfrak{G}^2$.

[19]) S.-T., § 48.

Homomorphismus der Wegegruppe $\mathfrak{F}$ auf die Zyklengruppe $\mathfrak{Z}^1$ von $\mathfrak{K}$; der Kern von $\mathfrak{P}$ ist also $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$; daher ist $UPU^{-1}(\mathfrak{r}) = 0$ gleichbedeutend mit: $\mathfrak{r} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, also mit $\mathfrak{r} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{R}$.

Beweis von (b): Wir bemerken zunächst: der Kern von Q ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$; denn für ein $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ ist dann und nur dann $Q(\mathfrak{r}) = 0$, wenn $U^{-1}(\mathfrak{r})$ zu dem Kern von P, also zu C_F, wenn also $\mathfrak{r}$ zu $U(C_F) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$ gehört. — Da $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ ist, gehört somit der Kern von Q zu $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$; infolgedessen ist die Behauptung (b) gleichbedeutend mit (b'): $Q(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})) = Z_0^1$.

Die Gruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ besteht aus allen Produkten aller Elemente $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{w}\mathfrak{r}\mathfrak{w}^{-1}\mathfrak{r}^{-1}$ mit $\mathfrak{w} \in \mathfrak{F}$, $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$; die Gruppe Z_0^1 besteht aus allen linearen Verbindungen (mit ganzzahligen Koeffizienten) aller Elemente $Az - z$ mit $A \in \mathfrak{G}$, $z \in Z^1$ (cf. 8.3). Für den Beweis von (b') genügt es daher zu zeigen, daß jeder derartige Weg $\mathfrak{r}_0$ auf einen Zyklus $Az - z$ und daß auf jeden Zyklus $Az - z$ ein derartiger Weg $\mathfrak{r}_0$ abgebildet wird.

Nun besteht zwischen den Wegen aus $\mathfrak{F}$ und den Decktransformationen aus $\mathfrak{G}$ folgender Zusammenhang: jedem Weg $\mathfrak{w} \in \mathfrak{F}$ ist eine Transformation $A_{\mathfrak{w}} \in \mathfrak{G}$ so zugeordnet, daß für jeden Weg $\mathfrak{r} \in \mathfrak{R}$ die Beziehung

$$Q(\mathfrak{w}\mathfrak{r}\mathfrak{w}^{-1}) = A_{\mathfrak{w}} Q(\mathfrak{r})$$

gilt, und umgekehrt ist jede Transformation $A \in \mathfrak{G}$ in dieser Weise als $A_{\mathfrak{w}}$ gewissen Wegen $\mathfrak{w} \in \mathfrak{F}$ zugeordnet.

Hieraus folgt:

$$Q(\mathfrak{r}_0) = Q(\mathfrak{w}\mathfrak{r}\mathfrak{w}^{-1}\mathfrak{r}^{-1}) = Q(\mathfrak{w}\mathfrak{r}\mathfrak{w}^{-1}) - Q(\mathfrak{r}) = A_{\mathfrak{w}} z - z,$$

wenn wir $Q(\mathfrak{r}) = z$ setzen; und umgekehrt läßt sich so jeder Zyklus $Az - z$ als Bild $Q(\mathfrak{r}_0)$ darstellen.

§ 4. Geometrische Anwendungen

13. Azyklische Komplexe

Darunter, daß ein N-dimensionaler Komplex „azyklisch" ist, wird im folgenden immer verstanden: er ist in allen Dimensionen $0, 1, \ldots, N$ azyklisch. Dabei kann ein beliebiger Koeffizientenbereich J zugrundeliegen; ist J der Ring der rationalen Zahlen, so sagen wir „rational azyklisch"; dies bedeutet: K ist zusammenhängend, und alle Bettischen Zahlen (außer der nullten) sind 0. Wenn es überhaupt einen Koeffizientenbereich gibt, in bezug auf den K azyklisch ist, so ist K bekanntlich[14]) auch rational azyklisch. Da wir fixpunktfreie Automorphismen betrachten wollen, und da nach einem bekannten Fixpunktsatz[20]) ein endlicher, rational azyklischer Komplex keinen solchen Automorphismus besitzt, interessieren uns hier nur unendliche Komplexe.

13.1. *K sei N-dimensional und azyklisch in bezug auf J. $\mathfrak{G}$ sei eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K. Dann ist* $\mathfrak{G}_J^n = 0$ *für* $n > N$.

Denn die Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}_J^n$ des von $\mathfrak{G}$ erzeugten, von K überlagerten Komplexes $\mathfrak{K}$ erfüllen nach Satz II die Isomorphien $\mathfrak{B}_J^n \cong \mathfrak{G}_J^n$, und zwar für alle n; da $\mathfrak{K}$ N-dimensional ist, ist $\mathfrak{B}_J^n = 0$ für $n > N$.

13.2. In dem Korollar von 10.2 ist enthalten: Wenn $\mathfrak{G}$ die freie Abelsche Gruppe vom Range r ist, so ist $\mathfrak{G}_J^r \neq 0$ (bei beliebigem J). Hieraus und aus 13.1 folgt unmittelbar:

Eine freie Abelsche, fixpunktfreie Automorphismengruppe eines N-dimensionalen, rational azyklischen Komplexes hat höchstens den Rang N. [21])

13.3. In diesem Satz kann man die Voraussetzung der Fixpunktfreiheit durch andere Voraussetzungen ersetzen:

Die freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei Automorphismengruppe des N-dimensionalen, rational azyklischen Komplexes K, und es sei wenigstens eine der folgenden beiden Voraussetzungen erfüllt: (a) *$\mathfrak{G}$ besitzt einen endlichen Fundamentalbereich;* (b) *K ist eine Pseudomannigfaltigkeit. Dann hat $\mathfrak{G}$ höchstens den Rang N.* [22])

Dabei verstehen wir unter einem endlichen Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}$ eine solche endliche Eckpunktmenge M von K, daß es zu jedem Eckpunkt b von K wenigstens einen Punkt $a \in M$ und wenigstens ein Element $T \in \mathfrak{G}$ mit $Ta = b$ gibt.

Beweis: Wäre der Rang von $\mathfrak{G}$ größer als N, so gäbe es nach 13.2 einen von der Identität E verschiedenen Automorphismus $A \in \mathfrak{G}$, der eine Zelle auf sich abbildet; dies ist aber, da $\mathfrak{G}$ außer der Identität kein Element endlicher Ordnung enthält, unmöglich auf Grund des folgenden Hilfssatzes:

---

[20]) A.-H., 532—533.

[21]) *Hurewicz*, l. c.[1]), p. 222, hat den analogen Satz für diskrete Transformationsgruppen topologischer Räume unter der Voraussetzung bewiesen, daß diese Räume nicht nur rational azyklisch, sondern sogar asphärisch sind.

[22]) Man kann einen Baumkomplex konstruieren, der eine freie Abelsche Automorphismengruppe vom Range 2 zuläßt; daraus sieht man, daß man nicht beide Voraussetzungen (a) und (b), und daß man in 13 .2 nicht die Voraussetzung der Fixpunktfreiheit weglassen darf. Auch die Voraussetzung „azyklisch“ ist, wie man leicht an Beispielen sieht, unentbehrlich.

$\mathfrak{G}$ sei eine Abelsche Automorphismengruppe eines (zusammenhängenden) Komplexes K; wenigstens eine der Voraussetzungen (a), (b) sei erfüllt; das Element $A \in \mathfrak{G}$ bilde eine Zelle auf sich ab. Dann hat A endliche Ordnung.

Beweis des Hilfssatzes: Da A die Eckpunkte der Fixzelle permutiert, hält eine Potenz A^r einen Eckpunkt p fest. Für jede natürliche Zahl k sei P_k die Menge derjenigen Eckpunkte von K, welche mit p durch Kantenzüge verbindbar sind, die höchstens k Kanten enthalten. Die Menge P_k ist endlich; ihre Punkte werden durch A^r permutiert; daher gibt es eine Potenz A^s von A^r, die jeden Punkt von P_k festhält; s hängt im allgemeinen von k ab.

Wenn (a) erfüllt ist, so wähle man k so groß, daß P_k den ganzen Fundamentalbereich M enthält; zu jedem Eckpunkt b von K gibt es dann einen $a \in P_k$ und ein $T \in \mathfrak{G}$ mit $Ta = b$; es folgt: $A^s b = A^s Ta = TA^s a = Ta = b$; es ist also $A^s = E$.

Wenn (b) erfüllt ist, so wählen wir k so, daß P_k alle Eckpunkte einer Grundzelle — d. h. einer N-dimensionalen Zelle — x von K enthält; dann hält A^s jeden Eckpunkt von x fest; jede $(N-1)$-dimensionale Seite von x liegt auf genau einer von x verschiedenen Grundzelle x'; daher wird jede dieser Zellen x' auf sich abgebildet, und zwar so, daß jeder Eckpunkt einer gewissen $(N-1)$-dimensionalen Seite von x' festbleibt; hieraus folgt, daß jeder Eckpunkt von x' festbleibt. Da man aber in K je zwei Grundzellen durch eine endliche Folge von Grundzellen verbinden kann, in welcher jede Zelle mit der folgenden eine $(N-1)$-dimensionale Seite gemein hat, so lehrt die soeben für x und x' angestellte Betrachtung, daß A^s überhaupt jeden Eckpunkt von K festhält, daß also $A^s = E$ ist.

13.4. *Es seien: J ein Ring mit Einselement; p eine solche Primzahl, daß $px \neq 1$ für alle $x \in J$ ist; K ein N-dimensionaler Komplex, der azyklisch in bezug auf J ist; A ein Automorphismus von K, der die Ordnung p hat (d. h. es sei $A^p = E$). Dann gibt es eine Zelle, die durch A auf sich abgebildet wird; als topologische Abbildung des durch den Komplex K bestimmten Polyeders $\overline{K}$ aufgefaßt*[23]*), besitzt daher A einen Fixpunkt.*

Die Voraussetzung über J und p ist insbesondere erfüllt, wenn J der Ring der ganzen Zahlen und p beliebig, oder wenn J der Restklassenring modulo q und p Teiler von q ist.

Beweis: Wäre die aus allen Potenzen A^r bestehende Gruppe $\mathfrak{G}$ fixpunktfrei, so wäre nach 13.1 $\mathfrak{G}^n_J = 0$ für $n > N$; nun ist aber $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{A}_p$,

[23]) Wegen der Beziehung zwischen den Begriffen „Komplex" und „Polyeder" vgl. man A.-H., 128.

und infolge der Voraussetzung über J und p ist nach 10.5 $\mathfrak{G}_J^n \neq 0$ für alle ungeraden n. Folglich gibt es eine Potenz $A^r \neq E$ und eine Zelle x mit $A^r x = x$. Da p Primzahl ist, ist A Potenz von A^r; daher ist auch $Ax = x$.

Der hiermit bewiesene Satz ist der kombinatorische (simpliziale) Spezialfall eines topologischen Satzes von Eilenberg[24]).

14. Homologiesphären und ihre Verallgemeinerung (S-Komplexe)

Eine „Homologiesphäre" (in bezug auf J) ist ein endlicher, N-dime sionaler Komplex, der dieselben Bettischen Gruppen besitzt wie die N-dimensionale Sphäre, d. h. der azyklisch in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ und dessen N-te Bettische Gruppe $B_J^N \cong J$ ist. Neben den Homologiesphären werden wir noch Verallgemeinerungen derselben betrachten, die wir „S-Komplexe" nennen wollen: das sind die endlichen, N-dimensionalen Komplexe, die azyklisch in den Dimensionen $0, 1, \ldots, N-1$ sind, während über die N-te Bettische Gruppe nichts vorausgesetzt wird. Ist $B_J^N = 0$, so ist der Komplex endlich und azyklisch und daher für uns aus demselben Grunde uninteressant, der am Anfang von Nr. 13 genannt worden ist.

Ist J der Ring der ganzen Zahlen oder der Restklassenring mod. q, so sprechen wir von „ganzzahligen" S-Komplexen bzw. S-Komplexen „mod. q". Ein endlicher, N-dimensionaler, zusammenhängender Komplex K ist dann und nur dann ganzzahliger S-Komplex, wenn für $n = 1, \ldots, N-1$ seine n-ten Bettischen Zahlen und seine n-ten Torsionsgruppen gleich 0 sind; er ist dann und nur dann S-Komplex mod. q, wenn für $n = 1, \ldots, N-1$ seine Bettischen Zahlen 0 und die Ordnungen seiner Torsionsgruppen teilerfremd zu q sind[14]). Hieraus folgt: Wenn K ganzzahliger S-Komplex ist, so ist er auch S-Komplex in bezug auf jeden Koeffizientenbereich J; wenn K S-Komplex mod. q ist, so ist er auch S-Komplex mod. q' für jeden Teiler q' von q.

14.1. *K sei ein N-dimensionaler S-Komplex in bezug auf J, und $\mathfrak{G}$ sei eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K. Dann ist $\mathfrak{G}_J^N$ homomorphes Bild einer Untergruppe von B_J^N.*

Beweis: Nach Satz III ist $\mathfrak{G}_J^N$ homomorphes Bild von $\mathfrak{B}_J^N$; es genügt daher zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_J^N$ mit einer Untergruppe von B_J^N isomorph ist.

[24]) *S. Eilenberg,* On a theorem of P. A. Smith ..., Duke Math. Journal 6 (1940), 428—437. Dort wird auch gezeigt, daß die Voraussetzung über die algebraische Beziehung zwischen p und J nicht entbehrlich ist. Wegen der Frage, ob der Satz auch dann gilt, wenn p nicht Primzahl ist, vgl. man *P. A. Smith,* Fixed-point theorems for periodic transformations, Amer. Journ. Math. 63 (1941), 1—8.

Da die Komplexe K und $\mathfrak{K}$ N-dimensional sind, stimmen die Bettischen Gruppen B_J^N, $\mathfrak{B}_J^N$ mit den Zyklengruppen Z^N, $\mathfrak{Z}^N$ überein; es genügt daher, eine isomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{Z}^N$ in die Gruppe Z^N anzugeben. Die in 11.1 betrachtete Abbildung φ hat diese Eigenschaft; denn daß $\varphi(\mathfrak{Z}^N) \subset Z^N$ ist, wurde in 11.1 gezeigt, und daß φ ein Homomorphismus ist, ist klar; es bleibt zu beweisen: aus $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$ folgt $\mathfrak{x} = 0$. Beweis dieser Behauptung: $\mathfrak{x}_i$ mit $i = 1, 2, \ldots k$ seien die orientierten N-dimensionalen Zellen von $\mathfrak{K}$; wie in 11.1 ist $\varphi(\mathfrak{x}_i) = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ig}$, wobei g die Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist; dann sind die x_{ij} mit $i = 1, \ldots, k$ und $j = 1, \ldots, g$ die sämtlichen orientierten N-dimensionalen Zellen von K; ihre Anzahl ist kg. Für eine Kette $\mathfrak{x} = \Sigma t_i \mathfrak{x}_i$ ist $\varphi(\mathfrak{x}) = \Sigma t_i (x_{i1} + \cdots + x_{ig})$; da die x_{ij} eine Basis in der Gruppe X^N der Ketten von K bilden, folgt daher aus $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, daß alle $t_i = 0$ sind, d. h. daß $\mathfrak{x} = 0$ ist.

14.2. Wir werden den Begriff des „Ranges mod. q“ einer Abelschen (additiv geschriebenen) Gruppe $\mathfrak{M}$ benutzen; er ist folgendermaßen definiert: Elemente $x_1, \ldots, x_k$ von $\mathfrak{M}$ heißen „linear unabhängig mod. q“, wenn aus $a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k = 0$, worin die a_i ganze Zahlen sind, folgt, daß alle $a_i \equiv 0$ mod. q sind; der Rang mod. q ist die Maximalzahl von Elementen, die mod. q linear unabhängig sind; er heiße $r_q(\mathfrak{M})$.

Man bestätigt leicht folgende Eigenschaften: Ist $\mathfrak{M}'$ Untergruppe oder homomorphes Bild von $\mathfrak{M}$, so ist $r_q(\mathfrak{M}') \leqslant r_q(\mathfrak{M})$. Sind $e_1, e_2, \ldots, e_s$ die Elementarteiler von $\mathfrak{M}$ — ist also $\mathfrak{M}$ direkte Summe $\mathfrak{A}_{e_1} + \cdots + \mathfrak{A}_{e_s}$ zyklischer Gruppen $\mathfrak{A}_{e_i}$ der Ordnungen e_i, wobei immer e_i Teiler von e_{i+1} ist —, so ist $r_q(\mathfrak{M})$ die Anzahl derjenigen e_i, die durch q teilbar sind.

14.3. Die N-te Bettische Zahl p_N eines Komplexes K ist immer mit Hilfe ganzer — oder, was auf dasselbe hinauskommt, rationaler — Koeffizienten erklärt, unabhängig von dem sonst benutzten Koeffizientenbereich. Wenn K N-dimensional ist, so gibt es p_N ganzzahlige Zyklen $z_1, z_2, \ldots, z_{p_N}$, die eine Basis der ganzzahligen Bettischen Gruppe B^N bilden.

K sei ein N-dimensionaler S-Komplex mod. q; dann ist die Ordnung der $(N-1)$-ten Torsionsgruppe teilerfremd zu q; hieraus folgt, daß es in bezug auf $J = \mathfrak{A}_q$ keine N-dimensionalen Zyklen „2. Art“ gibt, sondern nur Zyklen „1. Art“ [25]; das bedeutet: die obengenannten ganzzahligen Zyklen $z_1, \ldots, z_{p_N}$ bilden auch eine Basis der Gruppe $B_{\mathfrak{A}_q}^N$, d. h. jeder N-dimensionale Zyklus mod. q läßt sich auf genau eine Weise als $t_1 z_1 + \cdots + t_{p_N} z_{p_N}$ mit $t_i \in \mathfrak{A}_q$ darstellen; die Gruppe $B_{\mathfrak{A}_q}^N$ ist also

[25]) A.-H., Kap. V, § 3.

die direkte Summe von p_N zyklischen Gruppen der Ordnung q. Folglich ist $r_q(B^N_{\mathfrak{A}_q}) = p_N$.

Hieraus, aus 14.1 und aus der in 14.2 genannten Regel $r_q(\mathfrak{M}') \leqslant r_q(\mathfrak{M})$ ergibt sich folgender Satz:

K sei ein N-dimensionaler S-Komplex mod. q und $\mathfrak{G}$ eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K. Dann ist

$$r_q(\mathfrak{G}^N_{\mathfrak{A}_q}) \leqslant p_N \,. \tag{1}$$

Da jeder ganzzahlige S-Komplex zugleich für jede Zahl q S-Komplex mod. q ist, ergibt sich weiter: K sei ein N-dimensionaler ganzzahliger S-Komplex und $\mathfrak{G}$ eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K; dann gilt (1) für jede Zahl q.

14.4. Wir machen eine spezielle Anwendung des Satzes aus 14.3:

K sei ein N-dimensionaler S-Komplex mod. q, dessen N-te Bettische Zahl $p_N \leqslant N$ ist; $\mathfrak{G}$ sei eine fixpunktfreie Automorphismengruppe von K, die Abelsch ist und die Ordnung q hat. Dann ist $\mathfrak{G}$ zyklisch.

Beweis: Wir nehmen an, $\mathfrak{G}$ sei nicht zyklisch. Dann enthält $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}$, die — bei additiver Schreibweise — direkte Summe zweier zyklischer Gruppen der gleichen Ordnung m ist (dabei kann man als m jedenfalls den kleinsten Elementarteiler von $\mathfrak{G}$ wählen). Mit $\mathfrak{G}$ ist auch $\mathfrak{H}$ fixpunktfreie Automorphismengruppe von K; ferner ist, da m Teiler von q ist, K auch S-Komplex mod. m, wie am Anfang von Nr. 14 festgestellt wurde. Nach 14.3 ist daher in Analogie zu (1)

$$r_q(\mathfrak{H}^N_{\mathfrak{A}_q}) \leqslant p_N \,. \tag{1'}$$

Andererseits ist nach 10.6 die Gruppe $\mathfrak{H}^N_{\mathfrak{A}_q}$ direkte Summe von $N+1$ zyklischen Gruppen der Ordnung q, also

$$r_q(\mathfrak{H}^N_{\mathfrak{A}_q}) = N+1 \,. \tag{2}$$

Aus (1′) und (2) ergibt sich ein Widerspruch zu der Voraussetzung $p_N \leqslant N$. —

Die in dem hiermit bewiesenen Satz über K gemachte Voraussetzung ist insbesondere immer erfüllt, *wenn K eine Homologiesphäre mod. q ist;* denn dann ist $p_N = 1$; (wie in 14.3 gezeigt wurde, ist nämlich für einen N-dimensionalen S-Komplex mod. q die Gruppe $B^N_{\mathfrak{A}_q}$ direkte Summe von p_N Gruppen, die mit $\mathfrak{A}_q$ isomorph sind).

Beispiel: *Der N-dimensionale projektive Raum P^N mit ungeradem N gestattet keine anderen fixpunktfreien Abelschen Automorphismengruppen ungerader Ordnung als zyklische;* denn er ist für jede ungerade Zahl q eine Homologiesphäre mod. q. (Die projektiven Räume gerader Dimension sind rational azyklisch und gestatten daher überhaupt keine fixpunktfreien Automorphismen). Dagegen gestattet bei ungeradem N der Raum P^N fixpunktfreie zyklische Automorphismengruppen beliebiger Ordnung. Ferner gestattet z. B. der Raum P^3 die nicht-zyklische Vierergruppe — also das direkte Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 — als fixpunktfreie Automorphismengruppe (man deute die Punkte von P^3 als Quaternionen, die nur bis auf reelle Faktoren bestimmt sind; die Multiplikation mit den vier Quaternionen-Einheiten bewirkt die Automorphismen dieser Gruppe).

14.5. Da ein ganzzahliger S-Komplex zugleich S-Komplex mod. q für jedes q ist, folgt aus 14.4 unmittelbar:

Ein ganzzahliger N-dimensionaler S-Komplex K, dessen N-te Bettische Zahl $p_N \leqslant N$ ist, gestattet keine anderen fixpunktfreien Abelschen Automorphismengruppen als allenfalls zyklische.[26])

Die Voraussetzung über K ist insbesondere erfüllt, *wenn K eine ganzzahlige Homologiesphäre ist.* Der Satz gilt also speziell für die N-dimensionalen Sphären $K = S^N$; diesen Spezialfall habe ich bereits früher bewiesen[27]).

15. Homologiesphärische Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten N-dimensionale Mannigfaltigkeiten M, die ganzzahlige Homologiesphären sind, und nennen sie „homologiesphärisch"; sie sind geschlossen und orientierbar; die wichtigsten unter ihnen sind die Sphären S^N; für $N = 3$ sind es außer der S^3 die „Poincaréschen Räume".

Ein Automorphismus A einer Mannigfaltigkeit M hat einen Abbil-

[26]) Die *zyklische* Gruppe der Ordnung g tritt für jedes ungerade N als fixpunktfreie Automorphismengruppe der S^N, also eines S-Komplexes mit $p_N = 1$, auf, sowie für jedes gerade N als fixpunktfreie Automorphismengruppe desjenigen N-dimensionalen S-Komplexes mit $p_N = g - 1$, der entsteht, wenn man die Randsphären von g Vollkugeln identifiziert ($g - 1$ ist bei geradem N der kleinste mögliche Wert für p_N; dies folgt daraus, daß die Eulersche Charakteristik von K gleich $1 + (-1)^N p_N$ ist und durch g teilbar sein muß). — Daß es übrigens zu jeder endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ und jedem N einen N-dimensionalen S-Komplex gibt, der $\mathfrak{G}$ als fixpunktfreie Automorphismengruppe zuläßt, ist in 11.2 gezeigt worden (für die dortigen Beispiele ist $p_N = (g - 1)^{N+1}$).

[27]) *H. Hopf*, Nachtrag zu der Arbeit „Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe", Comment. Math. Helvet. 15 (1943), 27—32, Nr. 5.

dungsgrad, der ± 1 ist. Wenn A fixpunktfrei und die Dimensionszahl N gerade ist, so ist nach einem bekannten Fixpunktsatz[20]) der Grad gleich -1; das Produkt zweier Abbildungen vom Grade -1 hat den Grad $+1$; daher gibt es bei geradem N keine anderen fixpunktfreien Automorphismengruppen als allenfalls die Gruppe der Ordnung 2; diesen uninteressanten Fall schließen wir aus und nehmen also im folgenden immer an, daß N ungerade ist; dann hat nach demselben Fixpunktsatz jeder fixpunktfreie Automorphismus den Grad $+1$.

15.1. Wir beginnen mit der Besprechung einiger Eigenschaften der „Verbindung" („join")[28]) zweier Komplexe K_1, K_2: Man denke sich K_1, K_2 in einem hochdimensionalen euklidischen Raum in allgemeiner Lage zueinander gegeben; jedes Punktepaar p_1, p_2 der durch die Komplexe K_1, K_2 bestimmten Polyeder[23]) $\overline{K}_1, \overline{K}_2$ spannt eine Strecke $\overline{p_1 p_2}$ auf; die Menge aller Punkte aller dieser Strecken heiße $\overline{V}$; die Teilmengen von $\overline{V}$, die entstehen, wenn p_1 und p_2 je eine Zelle von K_1 bzw. K_2 durchlaufen, sind selbst Zellen; sie bilden einen Zellenkomplex $V = K_1 \circ K_2$; dieser Komplex ist die Verbindung von K_1 und K_2.

$K_1 \circ K_2 = V$ hat die folgenden Eigenschaften[28]) : Sind N_1, N_2 die Dimensionszahlen von K_1, K_2, so hat V die Dimension $N_1 + N_2 + 1$. Ist K_1 azyklisch für $n < N_1$ und K_2 azyklisch für $n < N_2$, so ist V azyklisch für $n < N_1 + N_2 + 1$ (in bezug auf ganzzahlige Koeffizienten). Sind K_1, K_2 Mannigfaltigkeiten, so ist auch V eine Mannigfaltigkeit. Folglich: Sind K_1, K_2 homologiesphärische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen N_1, N_2, so ist V eine homologiesphärische Mannigfaltigkeit der Dimension $N_1 + N_2 + 1$.

Weiter: Zu jedem Paar von Automorphismen A_1, A_2 der Komplexe K_1, K_2 gehört ein bestimmter Automorphismus $[A_1, A_2]$ von V: man bilde für jedes Punktepaar $p_1 \in \overline{K}_1$, $p_2 \in \overline{K}_2$ die Strecke $\overline{p_1 p_2}$ proportional auf die Strecke $\overline{q_1 q_2}$ ab, wobei $q_1 = A_1 p_1$, $q_2 = A_2 p_2$ ist. Es ist $[A_1, A_2]\,[B_1, B_2] = [A_1 B_1, A_2 B_2]$. Sind A_1, A_2 fixpunktfrei, so ist auch $[A_1, A_2]$ fixpunktfrei. Folglich: wenn dieselbe abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ als fixpunktfreie Automorphismengruppe sowohl von K_1 als auch von K_2 auftritt, so tritt sie auch als fixpunktfreie Automorphismengruppe von V auf.

Indem wir zwischen Komplexen, die miteinander isomorph sind, nicht

[28]) *S. Lefschetz*, Topology (New York 1930), 110ff. — *H. Freudenthal*, Die Bettischen Gruppen der Verbindung zweier Polytope, Fund. Math. 29 (1937), 145—150. (Die Bemerkung in der Klammer auf der zweit- und drittletzten Zeile von S. 146 dieser Arbeit über die (-1)-te Bettische Gruppe ist irreführend; diese Gruppe ist die Nullgruppe (d. h. von der Ordnung 1) — sonst wäre die bewiesene Formel falsch).

unterscheiden, ist nach dem Vorstehenden für jeden Komplex K der Komplex $K \circ K$ definiert: er ist gleich $K_1 \circ K_2$, wobei K_1 und K_2 mit K isomorph sind. Jede fixpunktfreie Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von K tritt somit auch als fixpunktfreie Automorphismengruppe von $K \circ K$ auf, sowie von $K \circ K \circ K = K \circ (K \circ K)$ usw.; ist K N-dimensional, so haben $K \circ K, K \circ K \circ K, \ldots$ die Dimensionszahlen $2N + 1, 3N + 2, \ldots$

Wir werden nur das folgende Korollar aller dieser Tatsachen brauchen:

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ als fixpunktfreie Automorphismengruppe einer N-dimensionalen homologiesphärischen Mannigfaltigkeit M auftritt, so tritt sie auch als fixpunktfreie Automorphismengruppe homologiesphärischer Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $2N + 1, \ldots, k(N + 1) - 1, \ldots$ auf.

Für den wichtigsten Fall, nämlich den Fall, in dem M eine Sphäre ist, vereinfachen sich die vorstehenden Betrachtungen insofern, als man leicht bestätigt, daß die Verbindung zweier Sphären der Dimensionen N_1 und N_2 der Sphäre der Dimension $N_1 + N_2 + 1$ homöomorph ist.

15.2. *$\mathfrak{G}$ sei fixpunktfreie Automorphismengruppe einer homologiesphärischen Mannigfaltigkeit $K = M$ von der ungeraden Dimension N. Dann erfüllen die Gruppen $\mathfrak{G}^n$ folgende Bedingungen:*

(a) $\mathfrak{G}^{n+N+1} \cong \mathfrak{G}^n$ *für alle* n;

(b) $\mathfrak{G}^{N-1-n} \cong \mathfrak{G}^n$ *für* $1 \leqslant n \leqslant N - 2$;

(c) $\mathfrak{G}^{N-1} = 0$; (d) $\mathfrak{G}^N \cong \mathfrak{A}_g$; (e) $\mathfrak{G}^{N+1} = 0$.

(g ist die Ordnung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{A}_g$ die zyklische Gruppe der Ordnung g.)

Beweis: Nach 15.1 ist $\mathfrak{G}$ für jedes positive k fixpunktfreie Automorphismengruppe einer homologiesphärischen Mannigfaltigkeit M_k der Dimension $k(N + 1) - 1$; nach Satz II sind daher für jedes k die Gruppen $\mathfrak{G}^1, \mathfrak{G}^2, \ldots, \mathfrak{G}^{k(N+1)-2}$ mit den Bettischen Gruppen eines von M_k überlagerten Komplexes $\mathfrak{K}_k$ isomorph; da M_k eine Mannigfaltigkeit ist, ist auch $\mathfrak{K}_k$ eine Mannigfaltigkeit; da, wie am Anfang von Nr. 15 festgestellt wurde, alle Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ den Grad $+1$ haben, ist $\mathfrak{K}_k$ orientierbar; für die Bettischen Gruppen von $\mathfrak{K}_k$, also auch für die entsprechenden $\mathfrak{G}^n$, gilt daher der Poincarésche Dualitätssatz, und zwar, da die $\mathfrak{G}^n$ nach Nr. 11 endlich sind, der Dualitätssatz für Torsionsgruppen; d. h. es ist

$$\mathfrak{G}^{n'} \cong \mathfrak{G}^n \qquad \textit{für } n + n' = k(N + 1) - 2. \tag{b'}$$

Dies gilt für jedes positive k; es ist also immer $\mathfrak{G}^{n'} \cong \mathfrak{G}^n$, sobald

$n + n' \equiv -2 \mod. (N+1)$ ist. Ist nun n beliebig gegeben, so wähle man ein n', das diese Kongruenz erfüllt; dann ist auch

$$(n + N + 1) + n' \equiv -2 \mod. (N+1)\,,$$

und daher auch $\mathfrak{G}^{n'} \cong \mathfrak{G}^{n+N+1}$. Folglich gilt (a).

(b) entsteht aus (b'), indem man $k = 1$ setzt.

(c) gilt, weil $\mathfrak{G}^{N-1}$ die $(N-1)$-te Torsionsgruppe der geschlossenen orientierbaren N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_1$ ist.

(e) folgt aus (c) und aus (b') mit $k = 2$.

Die Gültigkeit von (d) ergibt sich aus dem Satz III, da die geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit $K = M_1$ eine g-blättrige Überlagerung der geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}_1$ ist.

15.3. Der hiermit bewiesene Satz zeigt: Man kennt alle Gruppen $\mathfrak{G}^n$, falls man die Gruppen $\mathfrak{G}^n$ mit $n \leqslant \frac{N-1}{2}$ kennt; denn wenn man die letzteren kennt, so kennt man nach (b) die $\mathfrak{G}^n$ mit $n \leqslant N-2$, nach (c), (d), (e) also die $\mathfrak{G}^n$ mit $n \leqslant N+1$, und nach (a) alle $\mathfrak{G}^n$.

Für den Spezialfall $N = 3$ ergibt sich: $\mathfrak{G}^n = 0$ für alle geraden n; $\mathfrak{G}^n \cong \mathfrak{G}^1$ für $n = 4m + 1$; $\mathfrak{G}^n \cong \mathfrak{A}_g$ für $n = 4m - 1$.

Man kennt diejenigen endlichen Gruppen $\mathfrak{G}$, welche als fixpunktfreie Drehungsgruppen der Sphäre S^3 — also als Fundamentalgruppen der 3-dimensionalen sphärischen Raumformen — auftreten[29]); sie sind zugleich fixpunktfreie Automorphismengruppen geeigneter Zellenzerlegungen der S^3. Um für eine dieser Gruppen $\mathfrak{G}$ alle zugehörigen Gruppen $\mathfrak{G}^n$ zu bestimmen, hat man nach dem obigen Resultat außer der Ordnung g nur die Gruppe $\mathfrak{G}^1$, also die Abelsche gemachte Gruppe $\mathfrak{G}$, zu ermitteln; dies ist von Threlfall und Seifert durchgeführt worden[29]).

Beispiele[30]): Ist $\mathfrak{G}$ die Quaternionengruppe, so ist $g = 8$, $\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2$; ist $\mathfrak{G}$ die binäre Tetraedergruppe, so ist $g = 24$, $\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{A}_3$; ist $\mathfrak{G}$ die binäre Ikosaedergruppe, so ist $g = 120$, $\mathfrak{G}^1 = 0$.

15.4. Als Gegenstück zu dem Ergebnis von 15.1 wird jetzt gezeigt werden, daß eine nicht-zyklische Gruppe $\mathfrak{G}$, welche fixpunktfreie Auto-

[29]) *W. Threlfall* und *H. Seifert*, Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes, Math. Annalen 104 (1930), 1—70; ibidem 107 (1932), 543—586. — Ferner: *H. Hopf*, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Annalen 95 (1925), 313—339, § 2.

[30]) *Threlfall-Seifert*, l. c.[29]), 1. Teil, 60—66.

morphismengruppe einer N-dimensionalen homologiesphärischen Mannigfaltigkeit ist, für unendlich viele, durch N bestimmte Dimensionszahlen *nicht* in der analogen Rolle auftreten kann. Genauer:

Die abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ trete zugleich als fixpunktfreie Automorphismengruppe zweier homologiesphärischer Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $N_1 = 2r_1 - 1$ und $N_2 = 2r_2 - 1$ auf; r_1 und r_2 seien teilerfremd. Dann ist $\mathfrak{G}$ zyklisch.

Beweis: Es gibt zwei solche positive Zahlen m_1, m_2, daß $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 1$ ist; diese Relation ist gleichbedeutend mit

$$1 + m_2(N_2 + 1) = N_1 + (m_1 - 1)(N_1 + 1).$$

Nennen wir die durch jede der beiden Seiten dieser Gleichung ausgedrückte Zahl n, so folgt aus dem Ausdruck auf der linken Seite und aus (a), daß $\mathfrak{G}^n \cong \mathfrak{G}^1$ ist; aus dem Ausdruck auf der rechten Seite, aus (a) und aus (d) folgt $\mathfrak{G}^n \cong \mathfrak{A}_g$; es ist also $\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{A}_g$. Hieraus folgt zunächst, daß $\mathfrak{G}^1$ dieselbe Ordnung g hat wie $\mathfrak{G}$; da $\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ ist, folgt daraus weiter, daß $\mathfrak{C}$ nur aus dem Einselement besteht, daß also $\mathfrak{G}^1 \cong \mathfrak{G}$ ist. Es ist also auch $\mathfrak{A}_g \cong \mathfrak{G}$.

15.5. Wir wollen in dem vorstehenden Satz die zusätzlichen Annahmen machen, daß die Mannigfaltigkeiten Sphären und die Automorphismen Drehungen sind; dann entsteht ein Satz, der in die Darstellungstheorie der endlichen Gruppen gehört.

Eine reelle Darstellung $\mathfrak{D}$ einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße „fixpunktfrei“, wenn für jedes Element von $\mathfrak{G}$, außer für das Einselement, alle Eigenwerte der darstellenden Matrix $\neq +1$ sind.

Aus der Fixpunktfreiheit einer Darstellung folgt, daß sie eine treue Darstellung ist. — Abgesehen von dem Fall, daß $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Ordnung 2 ist, treten in jeder reellen treuen Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ Matrizen mit positiver Determinante auf (neben der Einheitsmatrix); eine Matrix ungeraden Grades mit positiver Determinante hat immer einen positiven Eigenwert, also, wenn die Matrix in einer Darstellung einer endlichen Gruppe vorkommt und daher nur Eigenwerte vom Betrage 1 besitzt, den Eigenwert $+1$; daher interessieren uns nur Darstellungen geraden Grades.

Unser Satz lautet nun:

Die endliche, nicht-zyklische Gruppe $\mathfrak{G}$ besitze eine reelle fixpunktfreie Darstellung vom Grade $2r_1$. Dann besitzt sie für keine Zahl r_2, die zu r_1 teilerfremd ist, eine reelle fixpunktfreie Darstellung vom Grade $2r_2$. (Daß $\mathfrak{G}$

dagegen für jedes r_2, das durch r_1 teilbar ist, reelle fixpunktfreie (reduzible) Darstellungen besitzt, ist trivial.)

Um diesen Satz auf den Satz 15.4 zurückzuführen, hat man nur folgendes zu bedenken: 1. Jede reelle Darstellung ist einer orthogonalen Darstellung ähnlich, kann also als Drehungsgruppe einer Sphäre gedeutet werden. — 2. Jede endliche Drehungsgruppe der Sphäre S^n läßt, wie man leicht sieht, eine geeignet konstruierte Zellenzerlegung K von S^n invariant, und kann daher als Automorphismengruppe von K aufgefaßt werden. — 3. Die oben definierte Fixpunktfreiheit der Darstellung $\mathfrak{D}$ ist gleichbedeutend mit der, in unserem früheren Sinne verstandenen Fixpunktfreiheit der soeben genannten Automorphismengruppe.

Einen Beweis des Satzes mit den üblichen Methoden der Darstellungstheorie kenne ich nicht. *)

Beispiel: Die (in 15.3 erwähnten) Gruppen, die als fixpunktfreie Drehungsgruppen der S^3 auftreten, gestatten, sofern sie nicht zyklisch sind, keine fixpunktfreien reellen Darstellungen der Grade $4m + 2$ (wohl aber fixpunktfreie reelle Darstellungen aller Grade $4m$).

§ 5. Beziehungen zur Homotopietheorie

16.1. Ein Raum R heißt „asphärisch" in der Dimension n, wenn jede stetige Abbildung der Sphäre S^n in den Raum R homotop 0 ist, d. h. stetig in eine Abbildung auf einen einzigen Punkt von R übergeführt werden kann. Wir werden einen Komplex $\mathfrak{K}$ oder K asphärisch nennen, wenn das zugehörige Polyeder[23]) $\overline{\mathfrak{K}}$ oder $\overline{K}$ in diesem Sinne asphärisch ist.

Ein Satz von Hurewicz[31]) — richtiger: ein fast trivialer Spezialfall dieses Satzes — besagt: Wenn $n > 1$ und wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in der Dimension n ist, so ist auch jeder Überlagerungskomplex K von $\mathfrak{K}$ asphärisch in dieser Dimension. Ein zweiter Satz von Hurewicz lautet[32]): Wenn der Komplex K asphärisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$ ist, so ist er in diesen Dimensionen auch azyklisch (in bezug auf ganzzahlige, also in bezug auf beliebige Koeffizienten).

Da nun der universelle Überlagerungskomplex K eines Komplexes $\mathfrak{K}$ immer einfach zusammenhängend, d. h. asphärisch in der Dimension 1 ist, so folgt aus den beiden Sätzen: Wenn $\mathfrak{K}$ asphärisch in den Dimensionen $2, \ldots, N-1$ ist, so ist der universelle Überlagerungskomplex K azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$.

---

[31]) *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen (I.), Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119, Satz IV.

[32]) Titel wie l. c.[31]), (II.), ibidem 521—528, Satz II.

*) Nachträglicher Zusatz: Herr *G. Vincent*, Lausanne, hat mir inzwischen einen solchen Beweis mitgeteilt.

16.2. Hiermit ist festgestellt, daß die Komplexe $\mathfrak{K}$, die asphärisch in den Dimensionen $2, \ldots, N-1$ sind, zu denjenigen Komplexen gehören, welche die Voraussetzungen des in 9.1 behandelten Spezialfalles unseres Satzes II erfüllen. Mithin gilt folgender Satz, der gegenüber den Sätzen des § 2 den Vorteil hat, daß in ihm nur von $\mathfrak{K}$ selbst, aber von keinem Überlagerungskomplex die Rede ist:

Der Komplex $\mathfrak{K}$ habe die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und sei asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$. Dann sind für $1 \leqslant n < N$ seine Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^n_J$ isomorph mit den Gruppen $\mathfrak{G}^n_J$.

16.3. *Korollar:* Ist $\mathfrak{K}$ asphärisch für alle n mit $1 < n < N$, so sind die Bettischen Gruppen dieser Dimensionszahlen (sowie natürlich die erste) durch die Fundamentalgruppe bestimmt.

Das ist im wesentlichen — bei Beschränkung auf Komplexe, die aber auch unendlich sein dürfen — der am Anfang der Arbeit zitierte Satz, den Hurewicz entdeckt und durch ein einfaches Abbildungsverfahren bewiesen hat.

16.4. Wir wollen jetzt auch den Satz III in ähnlicher Weise mit den Begriffen der Homotopietheorie in Verbindung bringen.

Eine stetige Abbildung der Sphäre S^n in das Polyeder $\overline{\mathfrak{K}}$ bestimmt einen stetigen Zyklus[33]) in $\overline{\mathfrak{K}}$, und dieser gehört einer gewissen (ganzzahligen) Homologieklasse an; diejenigen Homologieklassen, welche solche stetigen Sphärenbilder enthalten, bilden, wie man leicht sieht[34]), eine Untergruppe der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^n$; diese Untergruppe heiße $\mathfrak{S}^n$.

K sei ein Überlagerungskomplex von $\mathfrak{K}$. Die zu $\mathfrak{S}^n$ analoge Untergruppe der Bettischen Gruppe B^n von K heiße Σ^n. Durch die Überlagerungsabbildung U wird Σ^n offenbar in $\mathfrak{S}^n$ abgebildet. Wenn $n \geqslant 2$ ist, wird aber Σ^n sogar auf die ganze Gruppe $\mathfrak{S}^n$ abgebildet; denn ist f eine stetige Abbildung der Sphäre S^n in $\overline{\mathfrak{K}}$, so folgt aus dem Umstand, daß S^n einfach zusammenhängend ist, mit Hilfe einer Monodromie-Betrachtung leicht: es gibt eine solche stetige Abbildung g von S^n in $\overline{K}$, daß $Ug = f$ ist. Folglich ist $U(\Sigma^n) = \mathfrak{S}^n$ (für $n \geqslant 2$) [35]).

16.5. *$\mathfrak{K}$ habe die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und sei asphärisch in den Dimensionen n mit $1 < n < N$; dann ist $\mathfrak{B}^N/\mathfrak{S}^N \cong \mathfrak{G}^N$.*

---

[33]) A.-H., 332ff.

[34]) Cf. l. c.[27]), Nr. 1.

[35]) Für $n = 1$ gilt dies nicht; denn es ist $\Sigma^1 = B^1$, $\mathfrak{S}^1 = \mathfrak{B}^1$, also $\mathfrak{S}^1/U(\Sigma^1)$ durch die Formel (III$_1$) in 9.3 gegeben.

Beweis: Nach 16.1 ist der universelle Überlagerungskomplex K von $\mathfrak{K}$ azyklisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$; folglich ist 9.1 (III) anwendbar; wir haben daher nur zu zeigen, daß $\mathfrak{S}^N = U(B^N)$, und nach 16.4 nur, daß $B^N = \Sigma^N$ ist. Dies aber ist richtig auf Grund des folgenden Satzes von Hurewicz[36]: Wenn K asphärisch in den Dimensionen $1, 2, \ldots, N-1$ ist, so ist jeder N-dimensionale (ganzzahlige) Zyklus von K einem Sphärenbild (im Sinne von 16.4) homolog.

16.6. *Korollar:* Ist $\mathfrak{K}$ asphärisch, für alle n mit $1 < n < N$, so ist die Gruppe $\mathfrak{B}^N/\mathfrak{S}^N$ durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Daß man dieses Korollar sehr einfach mit derselben Methode von Hurewicz beweisen kann wie das Korollar 16.3, habe ich früher gezeigt[37]. Daß die Gruppen, die ich dabei $\mathfrak{G}^n$ genannt habe, mit unseren $\mathfrak{G}^n$ übereinstimmen, haben wir soeben bewiesen.

16.7. Setzt man $N = 2$, so wird die Voraussetzung des Satzes 16.5 nichtssagend; für jeden (zusammenhängenden) Komplex $\mathfrak{K}$ ist also $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}^2$, und daher auf Grund von 12.2

$$\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong (\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \frown \mathfrak{R})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) ,$$

wenn die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ als homomorphes Bild $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ dargestellt ist.

Diese Isomorphie habe ich früher mit einer anderen Methode bewiesen und ihre geometrische Bedeutung ausführlich untersucht[13]; (die Gruppe $\mathfrak{G}^2$ hieß damals $\mathfrak{G}_1^*$).

16.8. Ähnlich wie die Sätze 9.1 (II) und 9.1 (III) hat auch der Satz 9.1 (IV) Beziehungen zur Homotopietheorie — allerdings etwas weniger einfache: es spielen dabei die Automorphismen eine Rolle, die durch die Fundamentalgruppe in den Homotopiegruppen induziert werden[38]. Dies will ich in einer weiteren Arbeit behandeln.

(Eingegangen den 11. April 1944.)

---

[36]) l. c.[32]), p. 526 unten, Behauptung 2).

[37]) l. c.[27]), Nr. 4.

[38]) *S. Eilenberg,* On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fund. Math. 32 (1939), 167—175.