Lineare Funktionale in kompakten metrischen Räumen.

Autor(en): **Nef, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **17 (1944-1945)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16338

Lineare Funktionale in kompakten metrischen Räumen

Von WALTER NEF, Fribourg

In meiner Arbeit über „Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln"[1]) habe ich gezeigt (1. Teil), wie man in kompakten metrischen Räumen auf topologisch invariante Weise Stieltjessche Integrale definieren kann. Ich habe dann, ohne einen Beweis anzugeben, einen auf solche Integrale sich beziehenden Satz verwendet, der eine Verallgemeinerung eines Satzes von *F. Riesz* ist. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, diesen Satz zu beweisen. Der *Rieszsche* Satz heißt[2]):

Es seien $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ abzählbar viele für $a \leqslant x \leqslant b$ stetige reelle Funktionen. Die Größen c_k seien reelle Konstanten. Das Gleichungssystem

$$\int_a^b d[\alpha(x)]\, f_k(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\alpha(x)$, die in $a \leqslant x \leqslant b$ von beschränkter Schwankung ist, wenn eine positive Konstante F existiert, so daß für jede natürliche Zahl n und n beliebige reelle Konstanten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k \right| \leqslant F \cdot \max \left| \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_k(x) \right| .$$

Es gibt dann eine Lösung $\alpha(x)$, deren totale Variation auf $\langle a, b \rangle \leqslant F$ ist.

Davon werden wir die folgende Verallgemeinerung beweisen, die wir dann schließlich noch auf Quaternionenfunktionen übertragen werden:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein kompakter metrischer Raum. $f_k(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ seien abzählbar viele auf $\mathfrak{M}$ stetige reelle Funktionen. c_k seien reelle Konstante. Das Gleichungssystem*

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)]\, f_k(P) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

[1]) C. M. H., vol. 16, fasc. IV, pag. 284—304. Ich habe hier eine Berichtigung anzubringen. Ich habe in dieser Arbeit von der zu integrierenden Funktion verlangt, daß sie gleichmäßig stetig sei. Es genügt die Voraussetzung der Stetigkeit.

[2]) *F. Riesz*, Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, t. 150 (1910), p. 674.

hat dann und nur dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, die auf $\mathfrak{M}$ von beschränkter Schwankung ist, wenn eine positive Konstante F existiert, so daß für jede natürliche Zahl n und n beliebige reelle Konstanten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k\right| \leqslant F \cdot \max \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_k(P)\right| .$$

Es gibt dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, deren totale Variation auf $\mathfrak{M} \leqslant F$ ist.

Beweis: Das Kompaktum $\mathfrak{M}$ ist stetiges Bild einer abgeschlossenen nirgendsdichten Punktmenge D des Intervalls E: $0 \leqslant x \leqslant 1$, wobei $x = 0$ und $x = 1$ zu D gehören[3]). Ist x ein Punkt von D und P sein Bildpunkt in $\mathfrak{M}$, so setzen wir $P = \sigma(x)$. Für alle $x \subset D$ setzen wir:

$$\varphi_k^*(x) = f_k(\sigma(x)) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Damit haben wir auf D eine Menge von stetigen Funktionen definiert, deren Definitionsbereich wir auf das Intervall $0 \leqslant x \leqslant 1$ ausdehnen, indem wir setzen:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \varphi_k^*(x), & \text{wenn } x \subset D \\ \dfrac{b(x) - x}{b(x) - a(x)} \varphi_k^*(a(x)) + \dfrac{x - a(x)}{b(x) - a(x)} \varphi_k^*(b(x)), & \\ & \text{wenn } x \subset E - D. \end{cases} \tag{1}$$

Dabei sind die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ wie folgt erklärt: Die Komplementärmenge $E - D$ der Menge D auf dem Intervall E ist auf der Zahlengeraden offen, ist also die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen punktfremden offenen Intervallen. Ist nun $x \subset E - D$, so ist $a(x)$ der Anfangs-, $b(x)$ der Endpunkt desjenigen von diesen Intervallen, auf dem x liegt. Es ist dann nach den Voraussetzungen des Satzes:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k\right| \leqslant F \cdot \max_{\text{auf } E} \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \varphi_k(x)\right|$$

für beliebiges n und beliebige Konstanten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$. Also existiert nach dem *Rieszschen* Satz eine auf E definierte Funktion $\alpha(x)$ von beschränkter Schwankung, deren totale Variation $\leqslant F$ ist und von der Art, daß

$$\int_0^1 d[\alpha(x)]\, \varphi_k(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

ist.

---

[3]) Vgl. *P. Alexandroff/H. Hopf*, Topologie, I. Band, Berlin 1935, Kap. II, § 6, Satz VI (S. 119).

Nun seien die abzählbar vielen punktfremden offenen Intervalle, deren Vereinigungsmenge die Menge $E - D$ ist, mit $o_1, o_2, o_3, \ldots$ bezeichnet und es sei a_λ bzw. b_λ der Anfangs- bzw. Endpunkt von o_λ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$.

Aus (2) folgt:

$$\left[\int_0^1 d[\alpha(x)]\,\varphi_k(x) - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} d[\alpha(x)]\,\varphi_k(x)\right] + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_{a_\lambda}^{b_\lambda} d[\alpha(x)]\,\varphi_k(x) = c_k \tag{3}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Die in der eckigen Klammer stehende Differenz ist gleich 0. Denn da D auf E nirgendsdicht ist, ist die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Intervalle $\langle a_\lambda, b_\lambda \rangle$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ mit $E = < 0, 1 >$ identisch. Es ist aber:

$$\int_{a_\lambda}^{b_\lambda} d[\alpha(x)]\,\varphi_k(x) = \alpha_\lambda\,\varphi_k(a_\lambda) + \beta_\lambda\,\varphi_k(b_\lambda) \tag{4}$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

wo die α_λ, β_λ Konstante sind. Denn die Funktionen $\varphi_k(x)$ sind in den Intervallen (a_λ, b_λ) linear. Ferner ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big[\, |\alpha_\lambda| + |\beta_\lambda| \,\Big] \leqslant F .$$

Um das einzusehen, braucht man die α_λ, β_λ nur aus ((1), (4)) zu berechnen. Aus ((3), (4)) folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \Big[\alpha_\lambda\,\varphi_k(a_\lambda) + \beta_\lambda\,\varphi_k(\beta_\lambda)\Big] = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) .$$

Nun sei Σ ein Mengensystem auf $\mathfrak{M}$, das den Bedingungen 1. und 2. auf Seite 286 der unter [1]) zitierten Arbeit genügt, und das der Definition des Stieltjesschen Integrals auf $\mathfrak{M}$ zugrunde gelegt sei. Ist μ irgendeine zu Σ gehörige Menge, so bezeichnen wir mit $\sigma^{-1}(\mu)$ die Menge aller Originalpunkte aller Punkte der Menge μ bei der Abbildung σ. Wir setzen für alle $\mu \subset \Sigma$:

$$\Theta(\mu) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}{}^{(\mu)} \alpha_\lambda + \sum_{\lambda'=1}^{\infty}{}^{(\mu)} \beta_{\lambda'}$$

wo $\sum_{\lambda=1}^{\infty}{}^{(\mu)}$ bzw. $\sum_{\lambda'=1}^{\infty}{}^{(\mu)}$ über diejenigen Werte von λ bzw. λ' zu erstrecken ist, für welche a_λ bzw. $b_{\lambda'}$ zu $\sigma^{-1}(\mu)$ gehört. Dann gilt:

1. $\Theta(\mu)$ ist in Σ totaladditiv.
2. $\Theta(\mu)$ ist auf $\mathfrak{M}$ von beschränkter Schwankung und ihre totale Variation ist $\leqq F$.
3. Es ist

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)]\, f_k(P) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\;.$$

Wir beweisen jetzt den Satz für Quaternionen:

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{M}$ ein Kompaktum. $f_k(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ seien abzählbar viele auf $\mathfrak{M}$ stetige Quaternionenfunktionen. c_k seien konstante Quaternionen. Das Gleichungssystem*

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)]\, f_k(P) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, die von beschränkter Schwankung ist, wenn eine positive Konstante F existiert, so daß für jede natürliche Zahl n und n beliebige Quaternionen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, c_k\right| \leqq F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, f_k(P)\right| \;.$$

Es gibt dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, deren totale Variation auf $\mathfrak{M} \leqq 2F$ ist[4])

Beweis: Aus

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, c_k\right| \leqq F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, f_k\right| \quad \text{für alle } \vartheta_k$$

folgt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, \overline{c_k}\right| \leqq F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k\, \overline{f_k}\right| \quad \text{für alle } \vartheta_k\;,$$

d. h. wenn

$$\vartheta_k = \vartheta_k^0 + i_1\,\vartheta_k^1 + i_2\,\vartheta_k^2 + i_3\,\vartheta_k^3\;,$$

$$f_k = f_k^0 + i_1\,f_k^1 + i_2\,f_k^2 + i_3\,f_k^3$$

und

$$c_k = c_k^0 + i_1\,c_k^1 + i_2\,c_k^2 + i_3\,c_k^3$$

---

[4]) Mit dieser Formulierung des Satzes berichtige ich einen Irrtum in der unter [1]) zitierten Arbeit, wo ich sagte, daß die Voraussetzung nur für reelle Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ erfüllt zu sein brauche. Auf die Anwendung, die ich von dem Satz gemacht habe, hat dies keinen Einfluß. Ein Unterschied besteht außerdem darin, daß ich a. a. O. behauptete, Θ könne so gewählt werden, daß seine totale Variation $\leqq F$ sei. Das läßt sich durch direkte Verallgemeinerung des Rieszschen Beweises auf den Fall der Quaternionen tatsächlich zeigen. Der hier gegebene Beweis ist jedoch so viel einfacher, daß ich ihn vorgezogen habe, trotzdem er nur auf die Schranke $2F$ führt, was für irgendwelche Anwendungen keinen Einfluß ausüben dürfte.

ist :
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\Big[(\vartheta_k^0 c_k^0+\vartheta_k^1 c_k^1+\vartheta_k^2 c_k^2+\vartheta_k^3 c_k^3)+\right.$$
$$+(-\vartheta_k^0 c_k^1+\vartheta_k^1 c_k^0-\vartheta_k^2 c_k^3+\vartheta_k^3 c_k^2)\,i_1+$$
$$+(-\vartheta_k^0 c_k^2+\vartheta_k^1 c_k^3+\vartheta_k^2 c_k^0-\vartheta_k^3 c_k^1)\,i_2+$$
$$\left.+(-\vartheta_k^0 c_k^3-\vartheta_k^1 c_k^2+\vartheta_k^2 c_k^1+\vartheta_k^3 c_k^0)\,i_3\Big]\right|\leqslant$$
$$\leqslant F\max_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\overline{f_k}\right|\,,\quad\text{d. h.}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\vartheta_k^0 c_k^0+\vartheta_k^1 c_k^1+\vartheta_k^2 c_k^2+\vartheta_k^3 c_k^3)\right|\leqslant F\cdot\max_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\overline{f_k}\right|=$$
$$=F\max_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum_{k=1}^{n}\Big[(\vartheta_k^0 f_k^0+\vartheta_k^1 f_k^1+\vartheta_k^2 f_k^2+\vartheta_k^3 f_k^3)+\right.$$
$$+(-\vartheta_k^0 f_k^1+\vartheta_k^1 f_k^0-\vartheta_k^2 f_k^3+\vartheta_k^3 f_k^2)\,i_1+$$
$$+(-\vartheta_k^0 f_k^2+\vartheta_k^1 f_k^3+\vartheta_k^2 f_k^0-\vartheta_k^3 f_k^1)\,i_2+$$
$$\left.+(-\vartheta_k^0 f_k^3-\vartheta_k^1 f_k^2+\vartheta_k^2 f_k^1+\vartheta_k^3 f_k^0)\,i_3\Big]\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2F\max\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(\vartheta_k^0 f_k^0+\vartheta_k^1 f_k^1+\vartheta_k^2 f_k^2+\vartheta_k^3 f_k^3)\right|,\\ \max\limits_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-\vartheta_k^0 f_k^1+\vartheta_k^1 f_k^0-\vartheta_k^2 f_k^3+\vartheta_k^3 f_k^2)\right|,\\ \max\limits_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-\vartheta_k^0 f_k^2+\vartheta_k^1 f_k^3+\vartheta_k^2 f_k^0-\vartheta_k^3 f_k^1)\right|,\\ \max\limits_{\text{auf }\mathfrak{M}}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-\vartheta_k^0 f_k^3-\vartheta_k^1 f_k^2+\vartheta_k^2 f_k^1+\vartheta_k^3 f_k^0)\right|\end{array}\right\}. \tag{5}$$

Diese Ungleichung (5) ist also für eine beliebige natürliche Zahl n und n beliebige Quaternionen $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_n$ erfüllt.

Nach dieser Umformung der Voraussetzungen von Satz 2 fragen wir auf Grund des Satzes 1 nach den Bedingungen für die Lösbarkeit des Gleichungssystems

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)]\; f_k(P)=c_k\qquad(k=1,2,3,\ldots) \tag{6}$$

durch eine Quaternionenfunktion

$$\Theta(\mu)=\Theta^0(\mu)+i_1\Theta^1(\mu)+i_2\Theta^2(\mu)+i_3\Theta^3(\mu)\,,$$

deren totale Variation auf $\mathfrak{M}$ höchstens gleich einer vorgegebenen Konstanten G ist. Zerlegen wir (6) in Komponenten, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^0]\, f_k^0 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^1]\, f_k^1 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^2]\, f_k^2 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^3]\, f_k^3 = c_k^0 \\
&\int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^0]\, f_k^1 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^1]\, f_k^0 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^2]\, f_k^3 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^3]\, f_k^2 = c_k^1 \\
&\int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^0]\, f_k^2 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^1]\, f_k^3 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^2]\, f_k^0 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^3]\, f_k^1 = c_k^2 \\
&\int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^0]\, f_k^3 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^1]\, f_k^2 - \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^2]\, f_k^1 + \int\limits_{\mathfrak{M}} d[\Theta^3]\, f_k^0 = c_k^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ seien vier mit $\mathfrak{M}$ homöomorphe kompakte metrische Räume und $\mathfrak{M}^*$ ihre Vereinigungsmenge. Zwischen $\mathfrak{M}$ und jedem der 4 Kompakta $\mathfrak{M}_j$ zeichnen wir je einen festen Homöomorphismus σ_j aus ($j = 0, \ldots, 3$). Es sei $\sigma_j(P)$ der dem Punkte $P \subset \mathfrak{M}_j$ vermöge σ_j entsprechende Punkt in $\mathfrak{M}$. Wir definieren auf $\mathfrak{M}^*$ die folgenden stetigen Funktionen:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_k^0(P) &= \begin{cases} f_k^0(\sigma_0(P)), & \text{wenn } P \subset \mathfrak{M}_0 \\ -f_k^1(\sigma_1(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_1 \\ -f_k^2(\sigma_2(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_2 \\ -f_k^3(\sigma_3(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_3 \end{cases} \\
\varphi_k^1(P) &= \begin{cases} f_k^1(\sigma_0(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_0 \\ f_k^0(\sigma_1(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_1 \\ f_k^3(\sigma_2(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_2 \\ -f_k^2(\sigma_3(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_3 \end{cases} \\
\varphi_k^2(P) &= \begin{cases} f_k^2(\sigma_0(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_0 \\ -f_k^3(\sigma_1(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_1 \\ f_k^0(\sigma_2(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_2 \\ f_k^1(\sigma_3(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_3 \end{cases} \\
\varphi_k^3(P) &= \begin{cases} f_k^3(\sigma_0(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_0 \\ f_k^2(\sigma_1(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_1 \\ -f_k^1(\sigma_2(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_2 \\ f_k^0(\sigma_3(P)), & \quad ,, \quad P \subset \mathfrak{M}_3 \end{cases}
\end{aligned}
\right\}
(k = 1, 2, 3, \ldots)\,.
$$

Wir fragen jetzt nach den Bedingungen für die Existenz einer totaladditiven Funktion $\Gamma(\mu)$ von beschränkter Schwankung auf $\mathfrak{M}^*$, deren totale Variation höchstens gleich einer gegebenen Konstanten G ist, und für die gilt:

$$\int_{\mathfrak{M}^*} d[\Gamma(\mu)]\, \varphi_k^l = c_k^l \qquad (l = 0, \ldots, 3\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots)\ . \tag{8}$$

Notwendig und hinreichend ist nach Satz 1, daß für jede natürliche Zahl n und $4n$ beliebige reelle Zahlen $\vartheta_1^l, \ldots, \vartheta_n^l$ $(l = 0, \ldots 3)$ gilt:

$$\left| \sum_{l=0}^{3} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^l\, c_k^l \right| \leqslant G \max_{\text{auf } \mathfrak{M}^*} \left| \sum_{l=0}^{3} \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k^l\, \varphi_k^l \right| .$$

Diese Bedingung ist aber identisch mit (5), falls $G = 2F$ ist, und also für $G = 2F$ erfüllt. Also hat (8) eine Lösung $\Gamma(\mu)$ auf $\mathfrak{M}^*$, deren totale Variation $\leqslant 2F$ ist.

Auf $\mathfrak{M}$ definieren wir nun die totaladditiven Mengenfunktionen

$$\Theta^j(\mu) = \Gamma(\sigma_j^{-1}(\mu)) \qquad (j = 0, \ldots 3)\ .$$

Die Summe der totalen Variationen dieser 4 Funktionen ist $\leqslant 2F$, und aus (8) folgt, daß die $\Theta^j(\mu)$ die Gleichungen (7) befriedigen. Setzen wir also

$$\Theta(\mu) = \Theta^0(\mu) + i_1\Theta^1(\mu) + i_2\Theta^2(\mu) + i_3\Theta^3(\mu)\ ,$$

so ist

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)]\, f_k(P) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)\ ,$$

und die totale Variation von $\Theta(\mu)$ ist höchstens gleich $2F$, w. z. b. w.

(Eingegangen den 28. August 1944.)