

Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete.

Autor(en): **Aardenne-Ehrenfest, T. van / Wolff, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **16 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-15567>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Über die Grenzen der einfachzusammenhängenden Gebiete

Von T. van AARDENNE-EHRENFEST und
JULIUS WOLFF, Utrecht (Holland)

Primenden *erster Art* der Grenze eines Gebietes sind diejenigen, welche aus nur *einem* Punkte bestehen. Ein solcher Grenzpunkt ist erreichbar. Primenden *zweiter Art* sind diejenigen, welche einen erreichbaren und mindestens *einen* unerreichbaren Grenzpunkt enthalten.

Frau T. van Aardenne-Ehrenfest hat festgestellt, daß aus zwei Sätzen von J. Wolff (siehe Fußnote ¹) und die Behauptung beim untenstehenden Beweise) die negative Beantwortung einer bekannten Frage von Carathéodory hervorgeht:

Satz. *Es gibt kein einfachzusammenhängendes Gebiet, dessen Grenze nur aus Primenden zweiter Art besteht.*

Beweis: Wir nehmen für einen Augenblick an, daß ein Gebiet G vorliege, dessen Grenze g nur aus Primenden zweiter Art bestehe. Wir bilden G konform auf die Halbebene $D(x > 0)$ ab mittels der Abbildungsfunktion $f(z) = f(x + iy)$. Nach einem früher bewiesenen Satz¹) besteht in jedem Punkte iy der imaginären Axe d der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + iy) = \varphi(y) \quad (1)$$

Es sei ε eine positive Zahl. Wir behaupten, daß jedes Rechteck $R(0 < x < a; b < y < c)$ ein Rechteck $R_1(0 < x < a_1 < a; b < b_1 < y < c_1 < c)$ enthält, in welchem die Schwankung von $f(z)$ kleiner als ε ist. Zum Beweise nehmen wir für einen Augenblick an, es existiere ein R mit der Eigenschaft, daß in jedem R_1 die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sei. Nach (1) ist $\varphi(y)$ Limes einer stetigen Funktion. Folglich liegen die Stetigkeitspunkte von $\varphi(y)$ überall dicht. Es sei y_0 ein Stetigkeitspunkt des Intervalles $(b < y < c)$ und $i_0(b_0 < y < c_0)$ ein Inter-

¹) La représentation conforme au voisinage d'un point frontière. Proceedings Akad. v. Wetensch., Amsterdam, vol. 45 n^o 2, 1942, p. 169—170.

Nach dem dort bewiesenen Satze ist $\varphi(y)$ sogar der Winkellimes von $f(z)$ für $z \rightarrow iy$. Mittlerweile sahen wir, daß R. Nevanlinna diesen Satz sogar für jede beschränkte holomorphe Funktion in D bewiesen hat (Eindeutige analytische Funktionen, Springer 1936).

vall, das y_0 enthält, innerhalb des Intervalles ($b < y < c$) liegt und genügend klein ist, damit

$$| \varphi(y) - \varphi(y_0) | < \frac{\varepsilon}{4} \text{ auf } i_0. \quad (2)$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden ($x > 0, y = y_0$) ein Punkt $z_1 = x_1 + i y_0$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_1 < \frac{1}{2}; | f(z) - \varphi(y_0) | < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für } 0 < x < x_1, y = y_0. \quad (3)$$

Im Rechteck $R_1(0 < x < x_1; b_0 < y < c_0)$ soll nach Voraussetzung die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_1 einen Punkt $\zeta_1 = \xi_1 + i \eta_1$ mit $| f(\zeta_1) - \varphi(y_0) | > \frac{\varepsilon}{3}$. Wegen der Stetigkeit von $f(z)$ in D besteht ein Intervall i_1 innerhalb R_1 , das ζ_1 enthält, parallel zur imaginären Axe d ist und genügend klein, damit

$$| f(z) - \varphi(y_0) | > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_1. \quad (4)$$

Nach (1) und (2) liegt auf der Halbgeraden ($x > 0, y = \eta_1$) ein Punkt $z_2 = x_2 + i \eta_1$ mit den Eigenschaften

$$0 < x_2 < \xi_1; \quad 0 < x_2 < \frac{1}{2^2}; \quad | f(z) - \varphi(y_0) | < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für } 0 < x < x_2, y = \eta_1. \quad (5)$$

Im offenen Rechteck R_2 , zwischen den beiden Projektionen von i_1 auf d und auf die Gerade $x = x_2$, soll die Schwankung von $f(z)$ größer oder gleich ε sein. Folglich enthält R_2 einen Punkt $\zeta_2 = \xi_2 + i \eta_2$ mit $| f(\zeta_2) - \varphi(y_0) | > \frac{\varepsilon}{3}$, also ein Intervall i_2 innerhalb R_2 , das ζ_2 enthält, parallel zu d ist und genügend klein, damit

$$| f(z) - \varphi(y_0) | > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt von } i_2. \quad (6)$$

Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Folge von Intervallen i_n , parallel zu d , deren Abszissen kleiner als $\frac{1}{2^n}$, so beschaffen, daß für $n = 1, 2, \dots$ die Projektion von i_{n+1} auf d innerhalb derjenigen von i_n liegt, und daß

$$| f(z) - \varphi(y_0) | > \frac{\varepsilon}{3} \text{ in jedem Punkt jedes } i_n. \quad (7)$$

Es existiert eine Gerade $y = h$, welche jedes i_n schneidet. Nach (1) und (7) ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \geq \frac{\varepsilon}{3} . \quad (8)$$

Nach (2) aber ist

$$| \varphi(h) - \varphi(y_0) | \leq \frac{\varepsilon}{4} . \quad (9)$$

Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. Daraus aber ergibt sich wegen der Willkür von ε , daß diejenigen Punkte $i y$ auf d , wo $\varphi(y)$ zweidimensionaler Limes von $f(z)$ ist, ein Residuel (nach der Denjoy'schen Benennung) M bilden, das heißt: die Komplementärmenge von M besteht aus höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Punkt-mengen; also enthält jedes Intervall auf d eine perfekte Teilmenge von M . Weil den Punkten von M Primenden erster Art auf der Grenze von G entsprechen, ist nicht nur unser Satz bewiesen, sondern sogar folgender schärfere

Satz. *Hat die Grenze g eines einfachzusammenhängenden Gebietes G nur Primenden erster und zweiter Art, so hat die Menge m der Primenden erster Art die Mächtigkeit des Kontinuums. Bei Abbildung von G auf die Halbebene D entspricht m einem Residuel auf der Begrenzungsgeraden d von D .*

(Eingegangen den 20. April 1944.)