

Gibt es unentscheidbare Sätze?

Autor(en): **Finsler, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **16 (1943-1944)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-15566>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Gibt es unentscheidbare Sätze?

Von PAUL FINSLER, Zürich

1. Formale Systeme

Vor ungefähr 18 Jahren habe ich gezeigt, daß man in formalen Systemen allgemeiner Art Sätze angeben kann, die durch formale Beweise in den Systemen selbst nicht entscheidbar sind, die aber durch eine inhaltliche Überlegung doch entschieden werden können¹⁾. Dabei wurden nur solche formalen Beweise als zulässig betrachtet, bei denen der inhaltlich festzustellende Sinn einen logisch einwandfreien Beweis ergibt.

Später hat Herr *K. Gödel* versucht, in den *Principia Mathematica* und verwandten Systemen ebenfalls formal unentscheidbare Sätze anzugeben²⁾. Er konstruiert zu diesem Zweck einen Satz, der seine eigene formale Unbeweisbarkeit behauptet. Eine inhaltliche Überlegung zeigt, daß ein solcher Satz in einem widerspruchsfreien System richtig, also tatsächlich unbeweisbar und damit auch unentscheidbar sein muß. Wäre er nämlich falsch, so wäre er formal beweisbar und folglich richtig. Merkwürdig bleibt, daß eine solche unmittelbare Einsicht hier im speziellen Fall von denselben als gültig betrachtet wird, die glauben, sie als allgemeines Beweisprinzip verwerfen zu müssen.

Nun muß aber bei Gödel ein formaler Beweis nur gewissen formalen Bedingungen genügen ohne Rücksicht auf seinen wirklichen Sinn. Diese abgeänderte, in den formalen Theorien allerdings übliche Behandlungsweise hat jedoch zur Folge, daß jetzt prinzipiell kein Hindernis mehr besteht, den oben angegebenen, sehr einfachen und, solange er gedanklich geführt wird, korrekten Beweis für den angeblich formal unbeweisbaren Satz doch formal darzustellen. Dies ergibt aber einen Widerspruch und es folgt, daß Herr Gödel keineswegs die Existenz von Sätzen nachgewiesen hat, die in einem allgemeinen Sinne formal nicht entscheidbar wären, sondern er hat gezeigt, daß die von ihm betrachteten Systeme,

¹⁾ Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, *Math. Zeitschr.* 25 (1926), S. 676—682. Das in § 9 dieser Arbeit gegebene Beispiel läßt sich auch durchführen, wenn nur die „in endlich vielen Schritten“ vorzunehmenden Beweise arithmetischer Natur für einfache Zahlenfolgen durch einen passenden Formalismus festgelegt werden, es beantwortet also eine von *P. Lévy* in seiner Abhandlung *Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de démonstration*, *Revue de Métaphysique et de Morale* 33 (1926), S. 253—258, insbes. S. 254, im Anschluß an Ausführungen von *R. Wavre*, *Logique formelle et logique empiriste*, ebenda S. 65—75, aufgestellte Frage.

²⁾ Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I, *Monatsh. f. Math. und Phys.* 38 (1931), S. 173—198.

sofern sie nur gewisse einfache und inhaltlich korrekte Schlüsse enthalten, formal widerspruchsvoll sind.

Wenn also umgekehrt diese Systeme doch widerspruchsfrei sein sollen, so muß darin wenigstens einer von diesen Schlüssen fehlen. Tatsächlich kommt in den üblichen Systemen³⁾ der folgende Schluß nicht vor:

„Aus der Beweisbarkeit von \mathfrak{A} folgt \mathfrak{A} “,

oder in Zeichen:

„Bew $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$.“

Man darf also im Rahmen der formalen Systeme diesen Schluß zum mindesten nicht für Beweise verwenden!

Wenn man nun aber den genannten Schluß in das System aufnimmt, so ändert sich der Begriff der Beweisbarkeit, und zwar, wie schon bemerkt, so stark, daß entweder der formal unentscheidbare Satz nicht mehr darstellbar oder aber das System widerspruchsvoll und somit jeder Satz beweisbar wird. Um dies zu vermeiden, muß man die Aufnahme des Schlusses verbieten!

Daß nun aber ein richtiger Satz „unentscheidbar“ wird, wenn man eine zu seinem Beweis notwendige Schlußweise verbietet, dürfte doch wohl selbstverständlich sein. Wenn man die Schlußweise der vollständigen Induktion verbietet, so ist schon $a + b = b + a$ für natürliche Zahlen ein „unentscheidbarer“ Satz.

Die „Inkonsistenz“ gewisser neuerer Formalismen wurde durch *S. C. Kleene* und *J. B. Rosser* nachgewiesen⁴⁾. Es konnte dabei wohl der Eindruck entstehen, daß die Widersprüche in diesen Systemen von der Aufnahme an sich unzulässiger Schlußweisen herrühren. Nach den vorangehenden Bemerkungen braucht dies aber nicht der Fall zu sein. An sich einwandfreie, auf die Formalisierung bezügliche Schlüsse können gerade durch die Formalisierung falsch werden, so daß also diese nicht zu „größerer Exaktheit“, sondern zur Vernichtung führt.

Wenn man aber bei den Beweisen nicht allein auf die Form, sondern, wie zu Anfang bemerkt, auf die inhaltliche Bedeutung achtet, so verschwinden die Widersprüche, man braucht nichts mehr zu verbieten und kann tatsächlich formal unentscheidbare Sätze angeben. Wenn man jetzt die Beweise für die Wahrheit solcher Sätze formal darzustellen versucht, so mißlingt dies, weil diese Beweise eben durch die Formalisierung inhaltlich widerspruchsvoll, also falsch und daher ungültig werden. Die Beweise werden durch ihre formale Darstellung in derselben Weise falsch, wie die Behauptung „Ich schweige“ falsch wird, sobald man sie ausspricht.

³⁾ Wie mir Herr *P. Bernays* bestätigt hat.

⁴⁾ *The inconsistency of certain formal logics*, *Ann. of Math.* 36 (1935), S. 630—636.

Wie man sieht, hängen diese Dinge eng mit den logischen Paradoxien zusammen; solange über diese keine Klarheit besteht, kann man auch keine feste Grundlage finden. Nun habe ich schon mehrfach angegeben, wie die Paradoxien zu lösen sind⁵⁾, doch scheint dies bisher kaum beachtet oder verstanden worden zu sein. Ich bespreche deshalb hier noch die Paradoxie des „Lügners“.

Die Überzeugung, daß jede Paradoxie lösbar sein muß, führt auch bei der Betrachtung eines Satzes zum Ziel, der seine eigene Unbeweisbarkeit in absolutem Sinne behauptet, und man erhält hierbei Aufschluß über die Existenz oder Nichtexistenz von absolut unentscheidbaren Sätzen.

2. Die Paradoxie des „Lügners“

Man könnte fragen, ob die Paradoxien nicht eher zur Philosophie als zur Mathematik gehören. Während aber in der Philosophie viele Meinungen bestehen können, darf es in der Mathematik nur eine strenge, objektive Unterscheidung zwischen wahr und falsch geben. Dieser Standpunkt kann und soll aber auch bei der Behandlung der logischen Paradoxien eingenommen werden; diese sind deshalb zur reinen Mathematik zu rechnen.

Man kann Sätze angeben, die ihre eigene Falschheit behaupten, so z. B. den Satz „Ich lüge“ oder „Die hier stehende Behauptung ist falsch“. Es entsteht die Frage, ob ein solcher Satz wahr oder falsch oder vielleicht sinnlos ist.

Man schließt etwa so: Wenn der angegebene Satz wahr wäre, so müßte er falsch sein, wäre er aber falsch, so müßte er wahr sein. Der Satz kann also weder wahr noch falsch sein, er ist daher sinnlos oder er hat wenigstens „keinen eindeutigen Sinn“.

Diese Überlegung ist jedoch nicht haltbar, denn sie führt selbst zu einem Widerspruch. Wir wollen jeden Satz, der nicht entweder eindeutig wahr oder eindeutig falsch ist, als „sinnlos“ bezeichnen. Ein wahrer Satz ist aber nicht sinnlos, ebenso ist ein falscher Satz nicht sinnlos.

Wenn nun der angegebene Satz sinnlos wäre, so wäre die in ihm enthaltene Behauptung eindeutig falsch, denn die Behauptung besagt ja, daß der Satz falsch, also nicht sinnlos sei. Es folgt also, wenn der Satz sinnlos wäre, so wäre er falsch. Einen „veränderlichen“ Sinn kann der

⁵⁾ S. z. B. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 34 (1925), S. 143—155; Über die Lösung von Paradoxien, Philos. Anzeiger 2 (1927), S. 183—192, 202—203; A propos de la discussion sur les fondements des mathématiques, Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques (Zurich 1941), S. 162—180.

Satz aber schon deshalb nicht besitzen, weil er selbst nicht veränderlich ist.

Die richtige Lösung ergibt sich aus der Bemerkung, daß man bei einer Behauptung nicht nur auf den formalen Ausdruck, sondern auf den wirklichen Sinn zu achten hat. Jede Behauptung hat aber den Sinn, daß das, was behauptet wird, wahr sein soll. Wenn jedoch gleichzeitig behauptet wird, daß gerade dies falsch sei, so werden zwei entgegengesetzte Aussagen behauptet und dies ergibt zusammen eine falsche Behauptung. „ \mathfrak{A} und Nicht- \mathfrak{A} “ ist immer falsch, gleichgültig, ob \mathfrak{A} oder Nicht- \mathfrak{A} wahr ist. Der angegebene Satz ist also eindeutig falsch⁶).

Aus der Tatsache, daß der Satz falsch ist, ergibt sich nun aber nicht, daß er dann doch wahr sein müßte, denn ein Satz kann sehr gut falsch sein, auch wenn ein Teil dessen, was er aussagt, wahr ist. Man kann bei dem Satz zwischen einer expliziten und einer impliziten Behauptung unterscheiden. Die explizite Behauptung, daß der Satz falsch sei, wäre für sich genommen wahr, aber zusammen mit der impliziten Behauptung, daß er wahr sei, ergibt sich ein falscher Satz. Wenn ich jedoch sage: Die Behauptung „Ich lüge“ ist falsch, so ist dies ein wahrer Satz. Es ist ein wesentlicher Unterschied, ob sich die Behauptung auf sich selbst oder auf einen anderen Satz bezieht.

Ein Hauptgrund für das Entstehen von Paradoxien ist der, daß die impliziten Aussagen, die tatsächlich vorhanden sind, übersehen oder nicht beachtet werden, und diese Gefahr wird jedenfalls bei einer rein formalen Behandlung nur verstärkt.

Man wirft den inhaltlichen Überlegungen gelegentlich vor, sie seien „vage“, und meint, nur eine rein formale Darstellung sei hinreichend „scharf“. Dieses Bestreben, den Sinn vollständig durch Formeln zu ersetzen, gleicht aber dem Versuch, die Farbe von Gegenständen nur nach ihrer Form zu beurteilen. Es ist verständlich, daß Farbenblinde an solchen „formalen“ Definitionen ein großes Interesse besitzen; daß dies aber der beste Weg ist, um über die Farben Aufschluß zu erhalten, kann doch wohl bezweifelt werden⁷).

Wenn man sich aber bei den inhaltlichen Überlegungen an den Satz vom ausgeschlossenen Dritten hält, indem man eben diejenigen Dinge

⁶) Herrn K. Dürr verdanke ich die Bemerkung, daß sich diese Erklärung schon bei A. Geulincx findet: *Methodus inveniendi argumenta* (1663), s. Arnoldi Geulincx Antverpiensis Opera philosophica, rec. J. P. N. Land, Bd. II (1892), S. 25.

⁷) Vgl. z. B. A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, *Studia philosophica* (1935), S. 261—405. Aus § 1 dieser Arbeit geht hervor, daß der Verfasser nicht entscheiden kann, welche der von ihm angeführten Sätze tatsächlich wahr und welche falsch sind.

untersucht, für welche dieser Satz gilt, und wenn man sich ferner klar macht, daß dabei jeder einzelne Widerspruch schon alles zerstören würde, so erkennt man, daß es eine schärfere Unterscheidung als die zwischen wahr und falsch in diesem Gebiet nicht geben kann. Man erkennt auch, daß jede logische Paradoxie lösbar sein muß, daß ein Widerspruch nicht aus dem Nichts entstehen, sondern nur da herauskommen kann, wo man ihn hineingelegt hat, daß man also nur vermeiden muß, sich zu widersprechen, um eine widerspruchsfreie Mathematik zu erhalten.

3. Die absolute Entscheidbarkeit

Wir wollen auch weiterhin eindeutige Sätze betrachten, also solche, die nur entweder wahr oder falsch sind. Jede Behauptung, die nicht eindeutig wahr oder eindeutig falsch ist, soll als „sinnlos“ bezeichnet werden.

Es sei nun der folgende Satz vorgelegt⁸⁾:

„Die hier stehende Behauptung ist unbeweisbar.“

Dabei sollen jetzt aber nicht nur formale Beweise in Betracht gezogen werden, sondern auch beliebige ideelle, sofern sie nur inhaltlich einwandfrei sind. Diese letztere Bedingung besagt, daß aus der Beweisbarkeit eines Satzes seine Wahrheit folgen muß. Dies ist eine notwendige Forderung, die man an den Begriff der Beweisbarkeit stellen muß. Weiteren Einschränkungen soll aber dieser Begriff nicht unterzogen werden, denn es wäre sonst immer denkbar, daß ein Satz, der sich mit einer solchen Einschränkung nicht beweisen läßt, ohne diese Einschränkung, also auf anderem Wege, doch beweisbar wäre, und dies soll eben vermieden werden. Wir betrachten also den Begriff der Beweisbarkeit in seinem größtmöglichen Umfang.

Es ist aber einleuchtend, daß man nicht einfach fordern darf, jeder wahre Satz müsse beweisbar sein. Man kann vielmehr die Frage stellen, ob es wahre Sätze gibt, die nicht beweisbar sind. Es wären dies absolut unentscheidbare Sätze.

Wenn der oben angegebene Satz, welcher seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, wahr wäre, so wäre er selbst ein Beispiel eines solchen unentscheidbaren Satzes. Um aber zu wissen, daß er wahr ist, müßte man ihn beweisen, und dies ist gemäß seiner Aussage unmöglich. Auf diese Weise läßt sich also das genannte Problem nicht lösen.

Wir wollen aber doch den Satz näher untersuchen. Man kommt zunächst wieder zu einer Paradoxie. Der Satz kann nämlich auf jeden Fall

⁸⁾ Eine ähnliche Formulierung findet sich bei *D. Hilbert* und *P. Bernays*, *Grundlagen der Mathematik*, 2. Bd. (Berlin 1939), S. 269—270.

nicht sinnlos sein, denn daraus würde folgen, daß die in ihm enthaltene Behauptung und somit der Satz selbst wahr wäre. Ein sinnloser Satz ist ja sicher unbeweisbar, denn ein beweisbarer Satz ist wahr, also nicht sinnlos.

Macht man nun aber die Annahme, der Satz und die in ihm enthaltene Behauptung wären falsch, dann wäre er nicht unbeweisbar, sondern beweisbar und folglich wahr. Wenn der Satz aber nicht sinnlos und nicht falsch sein kann, so muß er wahr sein. Damit ist anscheinend bewiesen, daß der Satz wahr ist. Für eine unbeweisbare Behauptung kann es jedoch einen solchen Beweis nicht geben.

Um den Widerspruch zu lösen, muß man wieder die implizite Aussage des Satzes berücksichtigen, welche besagt, daß die Behauptung wahr sein soll. Es ist zu untersuchen, ob diese Aussage mit der expliziten Behauptung, daß sie unbeweisbar sei, verträglich ist oder nicht, und wir kommen damit zu dem früheren Problem zurück, nämlich zu der Frage, ob es wahre, aber unbeweisbare Sätze gibt oder nicht.

Machen wir zunächst die Annahme, daß es solche Sätze nicht geben kann, dann sind die beiden Begriffe „wahr“ und „unbeweisbar“ miteinander unvereinbar, die implizite und die explizite Aussage des angegebenen Satzes widersprechen sich und der Satz selbst ist falsch. Man erkennt auch, daß der Satz nur dann falsch sein kann, wenn die beiden Begriffe miteinander unverträglich sind, denn sonst würde aus der Falschheit des Satzes folgen, daß die explizite Behauptung für sich falsch wäre, daß der Satz also nicht unbeweisbar, sondern beweisbar wäre und somit nicht falsch sein könnte.

Machen wir jetzt also diese Annahme, daß es wahre und zugleich unbeweisbare Sätze gibt, dann sind die beiden Begriffe miteinander verträglich und der angegebene Satz kann nicht falsch sein. Da der Satz aber, wie schon gezeigt wurde, auch nicht sinnlos sein kann, so ist, unter der gemachten Annahme, bewiesen, daß der Satz wahr sein muß.

Jetzt können wir aber den folgenden Schluß ziehen:

Wenn von irgendeinem eindeutigen Satz die absolute Unentscheidbarkeit beweisbar ist, so ist auch die eben gemachte Annahme beweisbar, d. h. dann ist beweisbar, daß es wenigstens einen wahren und zugleich unbeweisbaren Satz gibt, denn entweder der betreffende Satz oder seine Negation ist dann ein solcher. Dadurch wird dann aber der soeben angegebene Beweis, daß der Satz, welcher seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, wahr ist, zu Ende geführt, und dies ergibt einen Widerspruch. Es folgt also das Resultat:

Es gibt keinen eindeutigen Satz, für den die absolute Unentscheidbarkeit beweisbar ist.

Es bleiben hier zunächst noch zwei Möglichkeiten, nämlich:

Der Satz: „Es gibt eindeutige, aber absolut unentscheidbare Sätze“ ist entweder falsch, oder er ist wahr, aber unbeweisbar.

Wäre er nämlich beweisbar, so wäre wiederum beweisbar, daß es wahre und zugleich unbeweisbare Sätze gibt, und dies führt, wie eben gezeigt, zu einem Widerspruch.

Die Falschheit des Satzes im ersten Fall kann also noch beweisbar sein, während der zweite Fall höchstens widerlegbar ist. Dies kann man nun auch so ausdrücken:

Die Annahme, daß es keine eindeutigen, absolut unentscheidbaren Sätze, also keine „unlösbaren mathematischen Probleme“ gibt, ist nicht widerlegbar, sie ist „absolut widerspruchsfrei“.

D. Hilbert hat das Problem gestellt⁹⁾, zu zeigen, daß eine entsprechende Annahme keinen „finiten“ Widerspruch ergibt; wie man sieht, läßt sich das Problem in absolutem Sinne lösen.

Wenn man sich auf den Standpunkt stellt, daß jeder „absolut widerspruchsfreie“, d. h. jeder nicht widerlegbare Satz als wahr betrachtet werden darf, so muß jeder falsche Satz widerlegbar und folglich jeder wahre Satz beweisbar sein, sofern eben diese Begriffe „wahr“ und „falsch“ als absolute Gegensätze, d. h. als unvereinbar angesehen werden. Der Satz, welcher seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, ist dann notwendig falsch. Es ist aber noch zu untersuchen, ob dieser Standpunkt gerechtfertigt ist.

Die gegenteilige Annahme würde besagen: Es gibt einen falschen Satz, der nicht widerlegbar ist. Was bedeutet es aber, daß ein Satz falsch ist? Es kann dies jedenfalls keine andere Bedeutung haben als die, daß er einen Widerspruch enthält.

Nun macht man in der Mathematik wohl immer die Annahme, daß etwas Vorhandenes auch als gegeben betrachtet werden darf. Dies ist jedenfalls ein evidentes Prinzip¹⁰⁾, sofern es sich um ein abstraktes Gegebensein, nicht um eine praktische Aufweisbarkeit handelt.

Wenn nun aber ein in einem Satz enthaltener Widerspruch gegeben ist, so wird der Satz durch eben diesen Widerspruch widerlegt.

⁹⁾ Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), S. 161—190, insbes. S. 180.

¹⁰⁾ Es handelt sich hier nicht um das Auswahlprinzip; auch das Gegebensein einer Gesamtheit würde genügen.

Es folgt also, daß tatsächlich jeder falsche Satz ideell widerlegbar ist. Wenn aber die Negation eines Satzes widerlegbar ist, so ist der Satz selbst beweisbar. Es folgt also weiter, daß jeder wahre Satz beweisbar und somit *jeder beliebige eindeutige Satz ideell entscheidbar* ist.

Das Problem der ideellen Entscheidbarkeit läßt sich also auf diese Weise, durch Zurückführung auf die Bedeutung der Begriffe, sehr einfach lösen; die vorhergehenden Betrachtungen sind jedoch nicht überflüssig, da sie auf andern Schlüssen beruhen, die auch für die praktische Entscheidbarkeit von Bedeutung sind.

Man könnte vielleicht noch den folgenden Einwand versuchen:

Es wäre denkbar, daß ein Satz \mathfrak{A} keinen Widerspruch enthält, daß aber die Negation von \mathfrak{A} , also $\bar{\mathfrak{A}}$, ebenfalls widerspruchsfrei wäre und erst das „Zusammentreffen“ beider Aussagen, also „ \mathfrak{A} und $\bar{\mathfrak{A}}$ “, einen Widerspruch ergibt. Wie ist dann die Entscheidung zu treffen?

Der Satz \mathfrak{A} kann hier nicht falsch sein; da aber auch $\bar{\mathfrak{A}}$ nicht falsch ist, so kann \mathfrak{A} nicht wahr sein. Es folgt also, daß \mathfrak{A} sinnlos ist. Auch für eine sinnlose Aussage ergibt das Zusammentreffen mit ihrer Negation einen Widerspruch.

Die Annahme, daß \mathfrak{A} sinnlos ist, ergibt jedoch keinen Widerspruch. Andernfalls würde nämlich folgen, daß \mathfrak{A} wahr oder falsch sein müßte. Dies würde aber besagen, daß entweder $\bar{\mathfrak{A}}$ oder \mathfrak{A} einen Widerspruch enthält, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist.

Muß nun aber eine sinnlose Behauptung nicht falsch sein, da sie ja implizit behauptet, sie sei wahr, und dies doch nicht stimmt?

Für Sätze, die wirkliche Behauptungen darstellen, ist diese Auffassung tatsächlich richtig; es gibt dann also keine sinnlosen, sondern nur wahre oder falsche Behauptungen, und der soeben betrachtete Fall kann hier nicht eintreten. In der Tat, wenn der Satz \mathfrak{A} eine unbedingte Behauptung darstellt und keinen Widerspruch enthält, so behauptet die Negation von \mathfrak{A} , daß diese Behauptung \mathfrak{A} trotzdem falsch sei; sie enthält also einen Widerspruch und ist somit falsch. Die Negation von \mathfrak{A} besagt ja stets: \mathfrak{A} ist falsch; es muß also der ganze Satz verneint werden, nicht nur eine darin enthaltene explizite Aussage. Es ist aber ein Widerspruch gegenüber der Bedeutung von „falsch“, wenn von einer widerspruchsfreien Behauptung gesagt wird, sie sei falsch.

Man kann sich aber auch Sätze denken, die nicht den Sinn haben, daß sie ihre unbedingte Wahrheit behaupten sollen. Nach unseren Festsetzungen sind diese Sätze als sinnlos zu bezeichnen, auch wenn sie in anderem Zusammenhang einen Sinn haben können.

Als Beispiel könnte das Parallelenaxiom genommen werden, oder auch der Satz:

„Die Zahl n ist eine gerade Zahl.“

Es kommt hier auf den Sinn des Satzes an. Wenn über die Zahl n sonst nichts ausgesagt und der Satz als unbedingte Behauptung gemeint ist, so ist er falsch, denn die Zahl n kann auch eine ungerade Zahl sein. Wenn der Satz aber nur eine Annahme, eine Forderung oder Festsetzung bedeutet, so ist er keine Behauptung, d. h. er ist als Behauptung ein sinnloser Satz, wenn er auch als Annahme sinnvoll sein kann.

4. Die praktische Entscheidbarkeit

Die soeben abgeleiteten Ergebnisse liefern noch kein Hilfsmittel, um bei einem beliebigen Satz die Entscheidung wirklich durchzuführen. Sie haben aber doch nicht nur theoretische Bedeutung. Insbesondere können sie einen Ansporn¹¹⁾ dazu liefern, auch schwierige Probleme anzugreifen, und eine Erleichterung, sie zu lösen, denn es ist doch sicher viel leichter, etwas zu suchen und zu finden, wenn man weiß, daß es da ist, als wenn man mit der Möglichkeit rechnen muß, daß es das, was man sucht, gar nicht gibt.

Von praktischer Bedeutung ist aber auch die Folgerung:

Es ist unmöglich, von irgendeinem eindeutigen Satz (der also nur wahr oder falsch sein kann) die absolute Unentscheidbarkeit zu beweisen.

Es läßt sich also z. B. das Cantorsche Kontinuumproblem sicher nicht in der Weise erledigen, daß man zeigt, die betreffende Vermutung ist weder beweisbar noch widerlegbar.

Weiter findet man:

Wenn von einem eindeutigen Satz gezeigt werden kann, daß er auf keine Weise widerlegbar ist, so ist er damit schon bewiesen.

Die Resultate ändern sich aber, sobald man den Begriff der Beweisbarkeit einschränkt. Eine zunächst sehr schwierig erscheinende Paradoxie erhält man, wenn man zwar ideelle, rein gedanklich geführte Beweise zuläßt, aber doch nur so weit, als wir sie tatsächlich durchführen können. Um die Sache deutlich zu machen, will ich die Beweisbarkeit auf die mir selbst zur Verfügung stehenden Hilfsmittel einschränken. Ich betrachte jetzt den Satz:

„Die hier stehende Behauptung kann ich nicht beweisen.“

Ist dieser Satz wahr oder falsch oder etwa sinnlos? Die früheren

¹¹⁾ Vgl. *D. Hilbert, Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten (1900), S. 253 bis 297, insbes. S. 262 (Gesammelte Abhandlungen 3. Bd., S. 290—329, insbes. S. 298).

Schlüsse versagen, da ich sicher nicht jeden Satz entscheiden kann. Aber der angegebene Satz kann nicht sinnlos sein, denn sonst wäre er bestimmt wahr. Die implizite Behauptung, daß der Satz wahr sei, steht mit der expliziten nicht in Widerspruch, und aus der Annahme, der Satz sei falsch, folgt, daß die explizite Behauptung für sich falsch ist, d. h. es folgt, daß ich den Satz beweisen kann; ein beweisbarer Satz muß aber wahr sein. Damit habe ich anscheinend bewiesen, daß der Satz wahr sein muß, und doch kann dies nicht stimmen, denn wenn er wahr ist, kann ich ihn nicht beweisen.

Die Bemerkung, daß hier die nicht scharf festgelegte persönliche Leistungsfähigkeit eine Rolle spielt, kann für sich genommen die Paradoxie nicht beseitigen. Es bleibt die Frage, ob der Satz tatsächlich wahr oder falsch ist.

Um die Lösung zu finden, ist es gut, sich an ähnlichen Paradoxien zu orientieren. So ist, wie sich oben schon gezeigt hat, ein Satz, der seine eigene formale Unbeweisbarkeit behauptet, wahr, der zugehörige Beweis ist aber nur dann einwandfrei, wenn er nicht in formaler Darstellung geführt wird. Ebenso ist es nun hier: Der oben angegebene Satz ist wahr, der zugehörige Beweis ist aber nur dann einwandfrei, wenn ich ihn nicht selbst führe. Sobald ich selbst versuche, den Satz zu beweisen, verstricke ich mich in Widersprüche und der Beweis wird falsch. Es ist mir also tatsächlich nicht möglich, den angegebenen Satz zu beweisen. Daß ich ihn nicht beweisen kann, das allerdings kann ich leicht beweisen, denn aus der Annahme, ich könnte ihn beweisen, ergibt sich ja sofort ein Widerspruch. Damit habe ich aber noch nicht bewiesen, daß der Satz wahr ist, denn wenn er falsch wäre, könnte ich ihn ebenfalls nicht beweisen.

Darf ich trotzdem behaupten, daß der Satz wahr ist?

Antwort: Ja, aber nur deshalb, weil ich den Satz glauben muß. Ich weiß ja, daß der Beweis des Satzes in Ordnung ist, sobald andere als ich ihn führen. Andere können wohl etwas tun, was ich nicht tun kann; ich jedoch kann das nicht. Die anderen verstricken sich nicht in einen Widerspruch, wenn sie den Satz beweisen wollen, der besagt, daß ich ihn nicht beweisen kann. Wenn ich nun aber weiß, daß andere einen Satz beweisen können, den ich nicht beweisen kann, so bleibt mir nichts anderes übrig, als diesen Satz zu glauben.

Daß es Dinge gibt, die man nicht beweisen kann und doch glauben muß, hat man wohl schon oft gesagt. Es erscheint aber doch merkwürdig, daß hier ein bestimmter Satz vorliegt, von dem sich dies direkt zeigen läßt.

Es bleibt noch die Frage, ob durch diese Erkenntnis die vorhergehenden Resultate nicht stark eingeschränkt werden, da wir ja unsere menschliche Unvollkommenheit nicht abstreifen können. Tatsächlich wird man Sätze bilden können, deren Beweis praktisch so kompliziert ist, daß man damit nicht zum Ziel gelangt¹²⁾. Die vorstehenden Betrachtungen zeigen aber, daß Sätze, die wir nachweisbar nicht entscheiden können, in irgendeiner Weise auf unsere Leistungsfähigkeit Bezug nehmen müssen, daß sie also nicht der reinen Mathematik angehören. Dies gilt auch für den Fall, daß man direkt zeigen könnte, daß wir bestimmte, an sich mögliche mathematische Operationen nicht ausführen und auch nicht auf ausführbare Operationen zurückführen können; mathematisch gesehen würde dies nur eine Annahme und kein Beweis sein.

Wenn man sich aber auf rein formale Darstellungen beschränkt, so ist man an einen tatsächlich abzählbaren Bereich gebunden, und dabei kann allerdings viel Wertvolles verloren gehen.

¹²⁾ Vgl. dazu *P. Cérésolle, L'irréductibilité de l'intuition des probabilités et l'existence de propositions mathématiques indémonstrables*, *Archives de psychologie* 15 (1915), S. 255—305.

(Eingegangen den 7. April 1944).