Über eine verallgemeinerte Hillsche Determinante.

Über eine verallgemeinerte Hillsche Determinante

Von J. O. Fleckenstein, Basel

1. Charlier, Davis u. a.[1]) haben die Differentialgleichung n. Ordnung

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + p_2(t)\frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \cdots + p_n(t)\, y = 0$$

mit periodischen Koeffizienten $p_i(t)$, Poincaré das damit äquivalente System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{dy_s}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \theta_{sk}(t)\, y_k = 0$$

mit periodischen $\theta_{sk}(t)$ allgemein behandelt. Im Folgenden soll nun das Hillsche System von Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\frac{d^2 y_s}{dt^2} + \sum_{k=1}^{n} \theta_{sk}(t)\, y_k = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

betrachtet werden.

Es seien die $\theta_{sk}(t)$ periodische Funktionen von t mit der Periode 2π, die in Fourierreihen entwickelbar sind

$$\theta_{sk}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_{skm}\, e^{mit} ,$$

wobei $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |\theta_{skm}|$ konvergiert. Es sollen ferner alle $\theta_{sso} = \theta_s^2$ verschieden sein.

G. Lemaître und O. Godart[2]) haben gezeigt, daß die Hillsche Methode auch auf das System (1) anwendbar ist. Nach dem Floquetschen Theorem ist nämlich

$$y_s = e^{\nu i t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_{sm}\, e^{mit} \tag{2}$$

---

[1]) *H. Poincaré*, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tom. I, chap. II, n⁰ 29, Paris 1892.

C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels, Bd. I, 1. Abschn., § 5. Leipzig 1902.

H. T. Davis, The Theory of linear operators. Bloomington 1936. Chapt. IX, pp. 433—440.

[2]) *G. Lemaître* et *O. Godart*, Généralisation de la méthode de Hill, Bull. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci. 5. sér., tom. XXIV, 1938, pp. 19—23.

eine allgemeine Lösung von (1), wobei ν der Poincarésche charakteristische Exponent und z_{sr} zu bestimmende Konstanten sind. Geht man mit dem Ansatz (2) in (1) ein, so erhält man

$$-(\nu+r)^2 \sum z_{sr} e^{rit} + \sum \sum \theta_{skl} \sum z_{kl'} e^{(l+l')it} = 0 \quad , \quad (l+l'=r) \; ,$$

indem man den laufenden Index m durch r, l resp. l' ersetzt. Der Koeffizientenvergleich von e^{rit} liefert dann das n-fache unendliche Gleichungssystem

$$-(\nu+r)^2 z_{sr} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \theta_{skl} \, z_{k,r-l} = 0 \; . \tag{3}$$

Dieses homogene lineare System soll nun nach den z_{sr} als zu bestimmenden Unbekannten aufgelöst werden. Dazu ist notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Determinante dieses Systems verschwindet.

Diese Determinante $\Delta^{(n)}(\nu)$ ist eine verallgemeinerte Hillsche Determinante mit „n^2-fachem Ursprung“ [3]). Ihre Elemente sind, wenn man noch aus Konvergenzgründen alle Zeilen von (3) durch $r^2 - \theta_s^2$ dividiert,

$$\frac{(\nu+r)^2 \, \delta_{sk} \, \delta_{rl} - \theta_{sk,\, r-l}}{r^2 - \theta_s^2} \qquad \begin{pmatrix} r\, , l = -\infty \, \ldots\ldots \, \infty \\ s\, , k = \;\; 1\, , 2\, , \ldots\ldots \; n \end{pmatrix} .$$

Die δ_{sk}, δ_{rl} bedeuten dabei die Kroneckerschen Symbole

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0\, , & i \neq j \\ 1\, , & i = j\, . \end{cases}$$

2. Das analytische Problem ist die Bestimmung des charakteristischen Exponenten ν aus der Gleichung $\Delta^{(n)}(\nu) = 0$. Da nur die in der Hauptdiagonalen der Determinante $\Delta^{(n)}(\nu)$ stehenden Elemente den Exponenten ν enthalten, die Hauptdiagonalelemente aber die anderen in ihrem Betrag überwiegen, ist zu vermuten, daß die Bestimmung von ν aus $\Delta^{(n)}(\nu) = 0$ auf eine Gleichung vom Grade $2n$ führt, da in erster Näherung der Wert von $\Delta^{(n)}(\nu)$ gleich dem Produkt der Hauptdiagonaldeterminanten $\prod_{s=1}^{n} \Delta_s^{(1)}(\nu)$ ist, und nach Hill für die einfache Differentialgleichung

[3]) Diese Bezeichnung stammt von *E. Lamla*, Über eine Verallgemeinerung der Hillschen Determinante, Crelles Journal, Bd. 179, 1938, pp. 134—142. Lamla betrachtet ausführlich eine solche verallgemeinerte Determinante für den Fall $n = 2$. Die Eigenschaften einer verallgemeinerten Hillschen Determinante von n^2-fachem Ursprung werden durch Analogieschlüsse angegeben.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \theta(t)\, y = 0$$

die entsprechende Determinante

$$\Delta^{(1)}(\nu) = \Delta^{(1)}(0) - \frac{\sin^2 \pi \nu}{\sin^2 \pi \theta_s}$$

gefunden wird[4]).

Neben der Determinante $\Delta^{(n)}(\nu)$ betrachten wir noch die Determinante $\Box^{(n)}(\nu)$, die entsteht, wenn man alle Zeilen von (3) statt durch $r^2 - \theta_s^2$ durch $(\nu + r)^2 - \theta_s^2$ dividiert. Ihre Elemente sind allgemein

$$\frac{(\nu + r)^2\, \delta_{sk}\, \delta_{rl} - \theta_{sk,\, r-l}}{(\nu + r)^2 - \theta_s^2} \quad .$$

Die Hauptdiagonalelemente sind alle gleich 1.
Das Produkt der Hauptdiagonalelemente von $\Delta^{(n)}(\nu)$ ist

$$\prod_{s=1}^{n} \prod_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_s^2 - (\nu + r)^2}{\theta_s^2 - r^2} = \prod_{s=1}^{n} \frac{\sin \pi (\theta_s - \nu)\, \sin \pi (\theta_s + \nu)}{\sin^2 \pi\, \theta_s} = \prod_{s=1}^{n} \psi_s(\nu) \; .$$

Man erkennt ohne weiteres, daß

$$\Delta^{(n)}(\nu) = \Box^{(n)}(\nu) \cdot \prod_{s=1}^{n} \psi_s(\nu) \tag{4}$$

ist. Wir bemerken noch, daß wegen $\psi_s(0) = 1$ die beiden Determinanten für $\nu = 0$ gleich werden:

$$\Delta^{(n)}(0) = \Box^{(n)}(0) \quad . \tag{5}$$

Die Entwicklung einer unendlichen Determinante, deren Hauptdiagonalelemente 1 sind, in eine nach Potenzen der Elemente fortschreitende Reihe erhält man wie folgt:

Man betrachte das unendliche Produkt

$$\Pi\,(\nu) = \prod_{s=1}^{n} \prod_{r=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\,\theta_{sk,\, r-l}\,|}{|\,(r + \nu)^2 - \theta_s^2\,|}\right) , \tag{6}$$

welches das Produkt der Summen aller Elemente der einzelnen Zeilen der Determinante $\Box^{(n)}(\nu)$ darstellt. Nach dem formalen Bildungsgesetz der Determinanten besteht dann die Ungleichung

$$|\,\Box^{(n)}(\nu)\,| \leqslant |\,\Pi(\nu)\,| \quad . \tag{7}$$

[4]) *G. W. Hill*, On the part of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, Acta Mathematica, Vol. VIII, 1886, pp. 1—36.

Es ist klar, daß alle Terme des Produkts reell und positiv sind. Um nun die Entwicklung der Determinante zu erhalten, braucht man nur, falls die $\frac{\theta_{sk,r-l}}{(r+\nu)^2-\theta_s^2}$ reell sind, jeden Term in der Entwicklung des Produktes mit $0, +1$ oder -1 zu versehen; falls die $\frac{\theta_{sk,r-l}}{(\nu+\nu)^2-\theta_s^2}$ imaginär sind, muß man jeden Term mit einem Koeffizienten multiplizieren, dessen Modul 0 oder 1 ist.

Nach (7) sichert die Konvergenz des Produktes Π die Konvergenz der Determinante $\square^{(n)}$. [5])

Entwickelt man nun

$$e^{\sum\limits_{k,s=1}^{n}\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\theta_{sk,r-l}}{(r+\nu)^2-\theta_s^2}\right|}$$

in eine Reihe, so erhält man sicher mindestens alle Terme des Produktes Π. Wenn nun

$$\sum_{k,s=1}^{n}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\theta_{sk,\,r-l}}{(r+\nu)^2-\theta_s^2}\right|$$

konvergiert, und zwar als Funktion von ν betrachtet, *gleichmäßig* konvergiert, so konvergiert die Reihe, in die das Produkt entwickelt wurde und damit unsere Determinante gleichmäßig.

Nach der Voraussetzung ist nun $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty}|\theta_{sk,\,r-l}|$ konvergent, und $\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\nu+r)^2-\theta_s^2}$ konvergiert außer in der Umgebung der Stellen $\nu=-r\pm\theta_s$ gleichmäßig. Trennt man die singulären Punkte durch hinreichend kleine geschlossene Kurven aus dem Konvergenzbereich aus, so ist in dem übrigen Gebiet die Determinante $\square^{(n)}(\nu)$ absolut und gleichmäßig konvergent.

3. Die Determinante $\square_r^{(n)}(\nu)$ endlicher Ordnung ist als Produktsumme analytischer Funktionen $\frac{\theta_{sk,r-l}}{(\nu+r)^2-\theta_s^2}$ selber analytisch. Da nun für $r\to\infty$

$$\square_r^{(n)}(\nu)\to\square^{(n)}(\nu)\,,$$

so ist auch die Grenzfunktion $\square^{(n)}(\nu)$ analytisch.

Die Hillsche Determinante $\square^{(n)}(\nu)$ ist eine außer an ihren singulären Stellen $\nu=-r\pm\theta_s$ analytische Funktion von ν.

[5]) Wir folgen hier, ohne von der allgemeinen H. von Kochschen Theorie der unendlichen Determinanten Gebrauch zu machen, dem Beweis von H. Poincaré, Bull. astron., tom. XVII, 1900, pp. 134—143, für die einfache Hillsche Determinante.

Diese singulären Stellen sind nun einfache Pole. Betrachten wir nämlich das Verhalten der Funktion $\square^{(n)}(\nu)$ an einem dieser Pole, etwa $\nu = -r^* + \theta_{s^*}$.

In dem Produkt Π bleiben dann alle Faktoren endlich mit Ausnahme des Faktors

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l} \left| \frac{\theta_{sk,\, r^*-l}}{(r^* + \nu)^2 - \theta_{s^*}^2} \right| .$$

Es sei nun $\Pi'(\nu)$ das Produkt, das durch Unterdrücken dieses Faktors gebildet wird. Beachtet man, daß

$$\Pi'(\nu) = \Pi(\nu) \cdot \left| \frac{(r^* + \nu)^2 - \theta_{s^*}^2}{\left|(r^* + \nu)^2 - \theta_{s^*}^2\right| + \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l} \left|\theta_{sk,\, r^*-l}\right|} \right|$$

ist, so erkennt man sofort, daß für $\nu \to -r^* + \theta_{s^*}$

$$\Pi(\nu)\,\{\nu + r^* - \theta_{s^*}\}$$

endlich bleibt. Wegen (7) bleibt also auch

$$\square^{(n)}(\nu)\,\{\nu + r^* - \theta_{s^*}\}$$

endlich. Alle Stellen $\nu = -r \pm \theta_s$ sind also einfache Pole. $\square^{(n)}(\nu)$ ist eine meromorphe Funktion von ν.

Da $\square^{(n)}(\nu)$ absolut konvergiert, kann man die Reihenfolge der Zeilen und Kolonnen vertauschen. Vertauscht man ν mit $\nu + 1$, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Ebenso kann man ν in $-\nu$ verwandeln ohne den Wert der Determinante zu ändern.

$\square^{(n)}(\nu)$ ist also eine *gerade periodische Funktion* von ν mit der Periode 1.

Wir betrachten nun die Funktion

$$F(\nu) = \square^{(n)}(\nu) - \sum_{s=1}^{n} K_s \operatorname{tg} \pi \theta_s \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \pi(\theta_s + \nu) + \operatorname{ctg} \pi(\theta_s - \nu)}{2} \right\} \tag{8}$$

oder, da

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \theta_s (\operatorname{ctg} \pi(\theta_s + \nu) + \operatorname{ctg} \pi(\theta_s - \nu)) = \frac{1}{\psi_s(\nu)}$$ [6]

ist

$$F(\nu) = \square^{(n)}(\nu) - \sum_{s=1}^{n} \frac{K_s}{\psi_s(\nu)} ,$$

[6]) Den unter [2]) genannten Autoren ist dort ein Versehen unterlaufen. Es muß

$$\frac{\sin^2 \pi \theta_s}{\sin 2\pi \theta_s} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi \theta_s \quad \text{statt} \quad \frac{\sin^2 \pi \theta_s}{\cos 2\pi \theta_s} \quad \text{heißen.}$$

wo die K_s vorderhand gewisse, noch unbestimmte Konstanten sind. Da sowohl $\square^{(n)}(\nu)$ als auch die $\frac{1}{\psi_s(\nu)}$ meromorphe Funktionen sind, ist zunächst auch $F(\nu)$ meromorph. $\square^{(n)}(\nu)$ und $\frac{1}{\psi_s(\nu)}$ haben die gleichen Pole. Man kann also die Konstanten K_s so wählen, daß $F(\nu)$ an diesen Polen endlich bleibt. Entwickelt man in der Nähe des Pols p_s

$$\operatorname{ctg} \pi(p_s - \nu) = \frac{1}{\pi(p_s - \nu)} - \frac{1}{3}\pi(p_s - \nu) + \cdots ,$$

so erkennt man, daß die K_s (von Zahlfaktoren abgesehen) den Residuen der Funktionen $\frac{1}{\psi_s(\nu)}$ an ihren Polen entsprechen.

$F(\nu)$ ist also eine ganze transzendente Funktion.

Die ν-Ebene ist durch zur reellen Axe senkrechte Streifen von der Breite 1 aufgeteilt, in denen wegen der Periodizität $F(\nu)$ jedesmal den gleichen Wert hat. Es genügt also, das Verhalten der Funktion $F(\nu)$ in einem dieser Periodizitätsbänder zu untersuchen, etwa für $\Re(\nu)$ im Intervall $< 0,1 >$.

Wenn ν in einem solchen Band bleibt, kann ν nur dadurch unendlich werden, daß $\Im(\nu) \to \infty$ geht. Es ist aber klar, daß

$$\lim_{\Im(\nu)\to\infty} \left| \frac{1}{(\nu + r)^2 - \theta_s^2} \right| = 0 \quad \text{ist.}$$

Es verschwinden dann also alle Elemente der Determinante $\square^{(n)}(\nu)$ mit Ausnahme derjenigen der Hauptdiagonale. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist also

$$\lim_{\Im(\nu)\to\infty} \square^{(n)}(\nu) = 1 \;.$$

Da $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\psi_s(\nu)} = 0$ ist, so ist

$$\lim_{\nu\to\infty} F(\nu) = 1 \;.$$

$F(\nu)$ ist also eine ganze Funktion, die überall in der ν-Ebene beschränkt bleibt. Nach dem Liouvilleschen Satz muß sie eine Konstante sein.

Also ist $F(\nu) \equiv 1$.

4. Hiermit folgt nun aus (8)

$$\Box^{(n)}(\nu) = 1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{K_s}{\psi_s(\nu)}$$

und wegen (4)

$$\Delta^{(n)}(\nu) = \prod_{s=1}^{n} \psi_s(\nu) \left\{ 1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{K_s}{\psi_s(\nu)} \right\} . \tag{9}$$

Sind die Konstanten K_s bekannt, so liefert die Bedingung

$$\Delta^{(n)}(\nu) = 0 \; ,$$

falls ν kein Pol ist, wegen

$$\operatorname{ctg} \pi (\theta_s \pm \nu) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} \pi \theta_s \operatorname{tg} \pi \nu}{\operatorname{tg} \pi \theta_s \pm \operatorname{tg} \pi \nu}$$

für die transzendente Unbekannte $x = tg \pi \nu$

$$\sum_{s=1}^{n} K_s \operatorname{tg} \pi \theta_s \frac{1 + \operatorname{tg} \pi \theta_s}{x^2 - \operatorname{tg}^2 \pi \theta_s} x + 2 = 0$$ 4.

eine algebraische Gleichung vom Grad $2n$.

Die genannten Autoren schlagen vor, die K_s durch Bestimmung des Wertes der Determinante $\Delta^{(n)}(\nu)$ für n verschiedene Werte von ν zu berechnen. Geringer ist aber die Rechenarbeit, wenn man die wegen $\psi_s(0) = \dfrac{1}{\psi_s(0)} = 1$ aus (9) für $\nu = 0$ folgende Relation

$$K_n = \Delta^{(n)}(0) - \Delta^{(n-1)}(0) \quad , \quad \Delta^{(0)}(0) = 1 \tag{10}$$

benutzt[7]), da man so nur sukzessive die Hillschen Determinanten höherer Ordnung zu berechnen hat. Es handelt sich also nur noch um die Berechnung von $\Delta^{(n)}(0)$.

5 [8]). Unsere verallgemeinerte Determinante von Hill gehört zu einem Typus, zu dessen Definition man von n^2 zweifach unendlichen Zahlenfolgen $\vartheta_{skrl} = \vartheta_{rl}^{(sk)}$ ausgeht, wobei jede Folge in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas geordnet ist, derart, daß sich s, r auf die Zeilen, k, l auf die Spalten bezieht. Die verallgemeinerte Hillsche Determinante $\Delta^{(n)}(\nu)$ enthält also gleichsam n^2 unendliche Determinanten, von denen aber nur die die Gesamt-Hauptdiagonale als Hauptdiagonale enthaltenden gewöhnliche Hillsche Determinanten $\Delta_s^{(1)}(\nu)$ sind. Die Elemente sind allgemein

$$\vartheta_{skrl} = \vartheta_{rl}^{(sk)} = \frac{(\nu + r)^2 \, \delta_{sk} \, \delta_{rl} - \theta_{sk,\, r-l}}{(\nu + r)^2 - \theta_s^2} \; .$$

---

[7]) $\Delta^{(n-k)}$ ist eine verallgemeinerte Hillsche Determinante von $(n - k)^2$-fachem Ursprung usw.

[8]) An dieser Stelle möchte ich für Mitarbeit am Abschnitt 5 Herrn Dr. O. Mäder herzlichst danken.

Diese unendliche Determinante von n^2-fachem Ursprung kann durch eine leichte Überlegung in eine gewöhnliche unendliche Determinante (mit einfachem Ursprung, wo also der Zeilen- und Spaltenindex nur einmal von $-\infty$ bis ∞ läuft) verwandelt werden. Es bleibt nämlich der Wert einer endlichen Determinante ungeändert, wenn die Elemente der Hauptdiagonale beliebig vertauscht werden und außerhalb der Hauptdiagonale jedes Element a_{mn} in die Zeile des Elementes a_{mm} und die Spalte des Elementes a_{nn} gesetzt wird. Bei absoluter Konvergenz, die in unserem Falle vorhanden ist, gilt dasselbe auch für unendliche Determinanten. Wir ordnen also die Hauptdiagonale

$$\ldots\ \vartheta^{(11)}_{-1-1}\ \vartheta^{(11)}_{00}\ \vartheta^{(11)}_{11}\ldots\vartheta^{(22)}_{-1-1}\ \vartheta^{(22)}_{00}\ \vartheta^{(22)}_{11}\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \vartheta^{(nn)}_{-1-1}\ \vartheta^{(nn)}_{00}\ \vartheta^{(nn)}_{11}\ \ldots\ ,$$

um in

$$\ldots\vartheta^{(11)}_{-1-1}\ \vartheta^{(22)}_{-1-1}\ldots\ \vartheta^{(nn)}_{-1-1}\ \vartheta^{(11)}_{00}\ \vartheta^{(22)}_{00}\ldots\ \vartheta^{(nn)}_{00}\ \vartheta^{(11)}_{11}\ \vartheta^{(22)}_{11}\ldots\ \vartheta^{(nn)}_{11}\ldots\ .$$

Die neuen Zeilen- und Spaltenindizes seien nun definiert durch

$$\vartheta^{(sk)}_{rl} = \vartheta_{nr+s,\,nl+k} = \vartheta_{i,j}\ .$$

Wegen $s, k = 1, 2 \ldots n$ sind durch i, j die Indizes r, s, l, k eindeutig bestimmt, nämlich

$$r = \left[\frac{i-1}{n}\right],\quad s = i - nr\ ;\qquad l = \left[\frac{j-1}{n}\right],\quad k = j - nl\ .$$

($[a]$ größte ganze Zahl $\leqslant a$). Die Determinante hat die Form einer gewöhnlichen 4seitigen unendlichen Determinante, wobei unter der größenordnungsmäßigen Voraussetzung

$$|\,\theta_{s_p k_p,\,\pm j}\,| \geqslant |\,\theta_{s_q k_q,\,\pm(j+i)}\,|\ ,\qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant p\,,\ q \leqslant n \\ 0 \leqslant i\,,\ j \leqslant \infty \end{pmatrix}$$

die Elemente nach ihrer Größe geordnet sind, indem je n gleichwertige sowohl in Zeilen als Kolonnen zusammenstehen. Zu dem Index $r-l$ gehört dann gleichsam jedesmal eine Determinante von n^2 Elementen $\vartheta^{(sk)}_{rl}$.

Die Entwicklung einer unendlichen Determinante, deren Hauptdiagonale aus Einsern besteht, lautet allgemein

$$|\,\vartheta_{ij}\,| = 1 + \sum_{t=2}^{\infty}\ \sum_{-\infty < i_1 < i_2 < \cdots < i_t < +\infty} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{i_1 i_2} & \ldots & \vartheta_{i_1 i_t} \\ \vartheta_{i_2 i_1} & 0 & \ldots & \vartheta_{i_2 i_t} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \vartheta_{i_t i_1} & \vartheta_{i_t i_2} & \ldots & 0 \end{vmatrix}\ .$$

Unsere Entwicklung beginnt also mit

$$\Delta^{(n)}(0) = 1 + \sum_{s<k} \sum_{r} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{rl}^{(sk)} \\ \vartheta_{lr}^{(ks)} & 0 \end{vmatrix} + \sum_{s,k} \sum_{r<l} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{rl}^{(sk)} \\ \vartheta_{lr}^{(ks)} & 0 \end{vmatrix} + \cdots \tag{11}$$

6. Eine nähere Überlegung ergibt nun 4 derartige kubische Glieder, 8 biquadratische, allgemein $2^{\nu-1}$ von der Ordnung ν. Die Summationen verlaufen z. B. bei kubischen Gliedern

$$\sum_{s<k<h} \sum_{r}, \quad \sum_{s<k,h} \sum_{r<l}, \quad \sum_{s,k<h} \sum_{r<l}, \quad \sum_{s,k,h} \sum_{r<l<m}$$

usf.

Eine erste Näherung des Wertes unserer Determinante erhalten wir nun, indem wir sie bis zu den quadratischen Gliedern in θ entwickeln. Diese Entwicklung läßt sich nun wie folgt geschlossen angeben.

Das erste quadratische Glied ergibt

$$\sum_{s<k} \sum_{r} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{rr}^{(sk)} \\ \vartheta_{rr}^{(ks)} & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{s<k} \sum_{r} \frac{\theta_{sk,0}\, \theta_{ks,0}}{(r^2 - \theta_s^2)\,(r^2 - \theta_k^2)} =$$

$$= - \sum_{s<k} \frac{\theta_{sk,0}\, \theta_{ks,0}}{\theta_s^2 - \theta_k^2} \sum_{r} \left\{ \frac{1}{r^2 - \theta_s^2} - \frac{1}{r^2 - \theta_k^2} \right\} = \sum_{s<k} \frac{\theta_{sk,0}\, \theta_{ks,0}}{\theta_s^2 - \theta_k^2} \left\{ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \theta_s}{\theta_s} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \theta_k}{\theta_k} \right\},$$

während das zweite Glied sich schreiben läßt

$$\sum_{s,k} \sum_{r<l} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{rl}^{(sk)} \\ \vartheta_{lr}^{(ks)} & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{s,k} \sum_{r<l} \frac{\theta_{sk,\,r-l}\, \theta_{ks,\,l-r}}{(r^2 - \theta_s^2)\,(l^2 - \theta_k^2)} =$$

$$= - \sum_{s,k} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_{sk,-t} \cdot \theta_{ks,t}}{(r^2 - \theta_s^2)\,[(r+t)^2 - \theta_k^2]} =$$

$$= - \sum_{s,k} \sum_{t=1}^{\infty} \theta_{sk,-t}\, \theta_{ks,t} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\theta_s[(\theta_s + t)^2 - \theta_k^2]} \cdot \frac{1}{r - \theta_s} - \right.$$

$$- \frac{1}{2\theta_s[(\theta_s - t)^2 - \theta_k^2]} \cdot \frac{1}{r + \theta_s} - \frac{1}{2\theta_k[\theta_s^2 - (\theta_k - t)^2]} \, \frac{1}{r + t - \theta_k} +$$

$$\left. + \frac{1}{2\theta_k[\theta_s^2 - (\theta_k + t)^2]} \cdot \frac{1}{r + t + \theta_k} \right\}.$$

Da alle Terme gleichmäßig konvergieren, und die Identität besteht

$$\sum_r \frac{1}{\theta+r} = \sum_r \frac{1}{\theta-r} = \sum_r \frac{1}{\theta+r+t} = \sum_r \frac{1}{\theta-r-t} = \pi \operatorname{ctg} \pi \theta \quad ,$$

so folgt

$$\sum_{s,k} \sum_{r<l} \begin{vmatrix} 0 & \vartheta_{rl}^{(sk)} \\ \vartheta_{lr}^{(ks)} & 0 \end{vmatrix} = \sum_{s,k} \left\{ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \theta_s}{2\,\theta_s} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\theta_{sk,-t}\, \theta_{ks,t}}{(\theta_s+t)^2-\theta_k^2} + \frac{\theta_{sk,-t}\, \theta_{ks,t}}{(\theta_s-t)^2-\theta_k^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \theta_k}{2\,\theta_k} \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{\theta_{sk,-t}\, \theta_{ks,t}}{(\theta_k+t)^2-\theta_s^2} + \frac{\theta_{sk,-t}\, \theta_{ks,t}}{(\theta_k-t)^2+\theta_s^2} \right) \right\} ,$$

womit die erste Näherung der Determinante $\Delta^{(n)}(0)$ in Verallgemeinerung der Rechnung von Hill erhalten ist.

(Eingegangen den 1. April 1943.)