Über eine Formel mit einem speziellen Differentialoperator.

Über eine Formel mit einem speziellen Differentialoperator

Von H. Hadwiger, Bern

In der vorliegenden Note befassen wir uns kurz mit einigen Identitäten mit dem Differentialoperator

$$\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}$$

welche zum Teil rein formalen Charakter haben. Zunächst leiten wir die Formel

$$\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^n F(x) = 2^n (n-1)!\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{(\nu-1)!}\binom{-n}{n-\nu}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2n-\nu} F^{(\nu)}(x) \tag{1}$$

für $n \geqq 1$ ab, und behandeln dann einige geeignete Anwendungen.

Zum Nachweis von (1) gehen wir aus von einer Formel von *I. J. Schwatt* [1])

$$\frac{d^n}{du^n}F\left\{x(u)\right\} = \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{\nu!}\sum_{\lambda=1}^{\nu}\binom{\nu}{\lambda}\left\{-x(u)\right\}^{\nu-\lambda}\frac{d^n}{du^n}\left\{x(u)\right\}^{\lambda}\right]F^{(\nu)}\left\{x(u)\right\}, \tag{2}$$

für die *O. Perron* [2]) einen kurzen Beweis gegeben hat. Setzen wir in (2)

$$x(u) = \sqrt{2u}\,, \quad \frac{d}{du} = \frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\,,$$

so ergibt sich nach einiger Umrechnung

$$\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right)^n F(x) = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu n}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n-\nu} F^{(\nu)}(x)\ , \tag{3}$$

$$A_{\nu n} = (-1)^{\nu}\frac{2^n n!}{\nu!}\sum_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^{\lambda}\binom{\nu}{\lambda}\binom{\frac{\lambda}{2}}{n}\ . \tag{4}$$

---

[1]) *I. J. Schwatt,* An introduction to the Operations with series. Press of the University of Pensylvania, Ch. I (83).

[2]) *O. Perron,* Über eine Formel des Herrn Schwatt. Math. Zeitschr. **31,** 159—160 (1929).

Wir zeigen nun, daß der Koeffizient (4) sich in der geschlossenen Form

$$A_{\nu n} = 2^{\nu-n} \binom{-n}{n-\nu} \frac{(n-1)\,!}{(\nu-1)\,!} \tag{5}$$

schreiben läßt, womit dann (1) bewiesen ist. Greift man auf (3) zurück, so ergibt sich aus

$$\left(\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\right) \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu\, n} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n-\nu} F^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n+1} A_{\nu\; n+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{2\,n+2-\nu} F^{(\nu)}(x)$$

die Rekursion

$$A_{\nu\; n+1} = (\nu - 2n)\, A_{\nu\, n} + A_{\nu-1\, n} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n)\ , \tag{6}$$

durch die alle $A_{\nu n}$ unter Berücksichtigung der Bedingungen

$$A_{11} = 1\ ,\quad A_{0\,n} = 0\ ,\quad A_{\nu n} = 0 \qquad (\nu > n) \tag{7}$$

eindeutig bestimmt sind. Es ist nun zu verifizieren, daß das System (5) die Lösung darstellt. Mit Verwendung der Formel

$$\binom{-n}{\mu} = (-1)^{\mu}\, \frac{(n+\mu-1)\,!}{\mu\,!\ (n-1)\,!}$$

erhält man für die rechte Seite von (6)

$$(-1)^{n+1-\nu}\, 2^{\nu-n-1} \left\{ \frac{(2n-\nu)\,!}{(n+1-\nu)\,!\ (\nu-2)\,!} + \right.$$
$$\left. + \, 2\,(2n-\nu)\, \frac{(2n-1-\nu)\,!}{(n-\nu)\,!\ (\nu-1)\,!} \right\}\ ,$$

und nach kleiner Umrechnung

$$(-1)^{n+1-\nu}\, 2^{\nu-n-1}\, \frac{n!}{(\nu-1)\,!}\ \frac{(2n+1-\nu)\,!}{n\,!\ n+1-\nu)\,!}\ ,$$

und so die linke Seite von (6), was zu zeigen war.

Insbesondere ist

$$A_{nn} = 1\,(n \geqq 1)\ ;\ A_{1n} = (-1)^{n-1}\ 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-3) \quad (n > 1)\ . \tag{8}$$

Nachfolgend treten wir auf einige Anwendungen der Formel (1) ein. Setzen wir in (1)

$$F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}\ ,$$

so erhalten wir nach kleiner Umrechnung zunächst

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{\alpha x}}{x} = n\,!\;\; e^{\alpha x}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}\sum_{\mu=0}^{n}\frac{1}{\mu!}\binom{-n-1}{n-\mu}[2\alpha x]^\mu. \tag{9}$$

Bezeichnet

$$L_n(z,a) = (-1)^n e^z z^{-a}\frac{d^n}{dz^n}\left\{e^{-z} z^{n+a}\right\} \tag{10}$$

das verallgemeinerte Laguerresche Polynom[3]), das explicite durch

$$L_n(z,a) = (-1)^n n\,!\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n+a}{n-\mu}\frac{(-z)^\mu}{\mu!} \tag{11}$$

gegeben ist, so gewinnt man durch Vergleich von (9) und (11) das Resultat

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{\alpha x}}{x} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} L_n(-2\alpha x\,,\ -2n-1)\ . \tag{12}$$

Verwendet man in (12) für die Laguerreschen Polynome die Darstellung (10), so erhält man die Formel

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{\alpha x}}{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-\alpha x}\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{e^{2\alpha x}}{x^{n+1}}\right\}\ . \tag{13}$$

Werden weiter die bekannten Relationen[4])

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{1}{x}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(x) \tag{14}$$

und

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \tag{15}$$

herangezogen, so ergibt sich ein Zusammenhang, der zwischen den Besselschen Funktionen halbzahliger Ordnung und den Laguerreschen Polynomen besteht, und den der Verfasser früher auf anderem Wege gewonnen hat. Es handelt sich um die Beziehungen[5])

---

[3]) Betreffend Literatur vgl. *W. Hahn*, Jahresbericht der D. M. V. **44**, 234—236 (1934).

[4]) *E. T. Whittaker* und *G. N. Watson*, A course of modern analysis. Cambridge 1927, Seite 364.

[5]) *H. Hadwiger*, Über eine spezielle Serie der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome. Jahresbericht der D. M. V. **47**, 35—42 (1937).

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= \left(\frac{1}{2x}\right)^n \frac{1}{\sqrt{-2\pi x}} \left\{ e^{ix} L_n(-2ix, -2n-1) - e^{-ix} L_n(2ix, -2n-1) \right\} \tag{16}$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x) =$$

$$\left(-\frac{1}{2x}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left\{ e^{ix} L_n(-2ix, -2n-1) + e^{-ix} L_n(2ix, -2n-1) \right\}. \tag{17}$$

Wenn $F(u)$ an der Stelle $x \neq 0$ regulär ist, so gilt für nicht zu große z die Reihenentwicklung [6])

$$F(\sqrt{x^2+2z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\,!} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n F(x)\ . \tag{18}$$

Wählen wir

$$F(u) = \frac{e^{\alpha u}}{u}\ ,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf (12)

$$\frac{x\, e^{\alpha\{\sqrt{x^2+2z}-x\}}}{\sqrt{x^2+2z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2x^2}\right)^n}{n\,!} L_n(-2\alpha x, -2n-1)\ , \tag{19}$$

eine Reihe, die für $|z| < \frac{x^2}{2}$ konvergiert. Wenn wir $z = 2x^2\xi$ und $\alpha = -\frac{1}{2}$ setzen, so erhalten wir die für $|\xi| < \frac{1}{4}$ konvergente Entwicklung

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}\{\sqrt{1+4\xi}-1\}}}{\sqrt{1+4\xi}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^n L_n(x, -2n-1)}{n!}\ . \tag{20}$$

Wählen wir in (18)

$$F(u) = \frac{\sin u}{u} \quad \text{bzw.} \quad F(u) = \frac{\cos u}{u}\ ,$$

so gewinnen wir mit Verwendung der Formeln (14) und (15) die Reihe

[6]) Die Entwicklung ergibt sich formal nach der Kettenregel. Sie kann als Spezialfall allgemeinerer Reihen dieser Art dargestellt werden. Vgl. hierzu *Levi-Cività*, Rend. dei Lincei, (5) XVI (1907) Seite 3.

$$\frac{\sin \sqrt{x^2+2z}}{\sqrt{x^2+2z}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{x}\right)^n}{n!} J_{n+\frac{1}{2}}(x) \,, \tag{21}$$

$$\frac{\cos \sqrt{x^2+2z}}{\sqrt{x^2+2z}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^n}{n!} J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \,, \tag{22}$$

die für $|z| < \infty$ bzw. $|z| < \frac{x^2}{2}$ konvergieren. Setzen wir hier noch $z = \xi x^2$, so ergeben sich die Formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n J_{n+\frac{1}{2}}(x) \frac{\xi^n}{n!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\sin \sqrt{1+2\xi}\, x}{\sqrt{1+2\xi}}, \tag{23}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n J_{-n-\frac{1}{2}}(x) \frac{\xi^n}{n!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{\cos \sqrt{1+2\xi}\, x}{\sqrt{1+2\xi}} \,, \tag{24}$$

die für $|\xi| < \infty$ bzw. $|\xi| < \frac{1}{2}$ Gültigkeit haben. Als Spezialfall von (23) gewinnt man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{n!} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \,, \tag{25}$$

und ebenso aus (23) durch Integration

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi} \frac{\sin \sqrt{1+2\xi}\, x}{\sqrt{1+2\xi}} \, d\xi = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n J_{n+\frac{1}{2}}(x) \,,$$

oder nach der naheliegenden Substitution

$$1 + 2\xi = \theta^2$$

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}} \sin x\theta \, d\theta = \sqrt{\frac{\pi x}{2e}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n J_{n+\frac{1}{2}}(x) \,. \tag{26}$$

Ähnliche Formeln hat *J. G. Rutgers*[7]) angegeben.

(Eingegangen den 19. Januar 1943.)

[7]) *J. G. Rutgers*, Sur des séries et des intégrales contenantes les fonctions de Bessel. 2. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 636—647 (1941).