Über die singulären Gebilde der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen.

Autor(en): **Nef, Walter**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **15 (1942-1943)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14884

Über die singulären Gebilde der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln

Von WALTER NEF, Zürich

Einleitung.

Herr *Rud. Fueter* hat in mehreren Arbeiten[1]) die Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln entwickelt. Insbesondere hat er das Problem, alle Möglichkeiten aufzuzählen, die für isolierte singuläre Punkte bestehen, vollständig gelöst. Sein Resultat[2]) ist kurz folgendes: Der Punkt $z = 0$ sei eine isolierte Singularität der rechtsregulären Funktion $w = f(z)$. Dann existieren rechtsreguläre Funktionen

$$p_{n_1 n_2 n_3}(z) \ , \quad q_{n_1 n_2 n_3}(z) \quad , \quad (n_1 \, , \, n_2 \, , \, n_3 = 0 \, , \, 1 \, , \, 2 \, , \ldots) \, ,$$

sodaß in einer gewissen Umgebung von $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \left[a_{n_1 n_2 n_3} \, p_{n_1 n_2 n_3}(z) + b_{n_1 n_2 n_3} \, q_{n_1 n_2 n_3}(z)\right]$$

ist. Hierbei sind die $a_{n_1 n_2 n_3}$ und $b_{n_1 n_2 n_3}$ konstante Quaternionen.

Nun zeigt schon das Beispiel der analytisch regulären Quaternionenfunktionen, welche durch die Zusammenfassung zweier analytischer Funktionen zweier komplexer Variabeln entstehen[3]), daß die Singularitäten im allgemeinen nicht isolierte Punkte sind, indem sie in diesem Falle eine im allgemeinen zweidimensionale Mannigfaltigkeit erfüllen. Allgemein lassen sich die Singularitäten in die *isolierten singulären Punkte*

---

[1]) *Rud. Fueter,* Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit 4 reellen Variabeln. Comm. Math. Helv., vol. 7, S. 307 (zitiert als *Fueter I*).

Rud. Fueter, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., vol. 8, S. 371 (zitiert als *Fueter II*).

Rud. Fueter, Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln I. Comm. Math. Helv., vol. 9, S. 320 (zitiert als *Fueter III*).

Rud. Fueter, Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., vol. 10, S. 306 (zitiert als *Fueter IV*).

[2]) *Fueter III.*

[3]) w_1, w_2 seien analytische Funktionen der komplexen Variabeln $z_1 = (x_0 + i_1 x_1)$, $z_2 = (x_2 + i_1 x_3)$. Dann ist $w = w_1 + i_2 w_2$ eine rechtsreguläre Funktion von z. Man nennt sie analytisch rechtsregulär.

und in ein- und zweidimensionale *singuläre Gebilde* einteilen. Ein singuläres Gebilde heißt *isoliert*, wenn in einer gewissen Umgebung desselben keine weiteren singulären Punkte liegen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den *eindimensionalen* singulären Gebilden. Dabei nehmen wir an, daß das Gebilde eine endliche geradlinige Strecke sei. Wir können dann annehmen, es liege auf der Strecke $-1 \leqslant c_0 \leqslant +1$ der reellen Achse[4]). Unter dieser Voraussetzung lösen wir das Problem vollständig. Wir beschränken uns vorerst auf unwesentlich singuläre Gebilde (§§ 4—17), um hernach (§ 18) die wesentlichen durch unwesentliche zu approximieren. In dem in Hauptsatz 11 ausgesprochenen Resultat unserer Untersuchungen spielt der Begriff des *Stieltjèsschen Integrals* eine zentrale Rolle. Es scheint mir beachtenswert, daß sich dieser Begriff hier als so eng mit der Funktionentheorie verknüpft erweist.

Mit dem Resultat dieser Arbeit wird eine Vermutung von Herrn *Fueter* bestätigt[5]).

1.

Das isolierte singuläre Gebilde $\mathfrak{S}$ der rechtsregulären Funktion $w = f(z)$ befinde sich auf der reellen Achse des R_4, und zwar auf ihrem Intervall $-1 \leqslant x_0 \leqslant +1$. R sei die aus den folgenden Punkten (x_0, x_1, x_2, x_3) gebildete Hyperfläche, welche $\mathfrak{S}$ in ihrem Innern enthält:

1. Die Punkte, für welche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \varrho^2$$

und

$$-1 - \eta \leqslant x_0 \leqslant 1 + \eta \quad \text{ist}.$$

2. Die Punkte, für welche

$$x_0 = -1 - \eta$$

oder

$$x_0 = +1 + \eta$$

und

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant \varrho^2 \quad \text{ist}.$$

Hierin bedeuten ϱ und η zwei beliebige positive Zahlen, die jedoch so klein zu wählen sind, daß innerhalb und auf R keine weiteren singulären

---

[4]) Ist $f(z)$ rechtsregulär, so ist es auch $f(az + b)$, wo a, b beliebige konstante Quaternionen sind.

[5]) *Rud. Fueter*, Über vierfach periodische Funktionen. Monatshefte für Math. und Physik, Bd. 48, S. 161.

Punkte außer denen von $\mathfrak{S}$ sich befinden. Die aus den Punkten (1) gebildete Fläche sei mit M, die aus den Punkten (2) gebildeten Flächen mit $G^{(-)}$ bzw. $G^{(+)}$ bezeichnet. K sei irgendeine R in ihrem Innern enthaltende geschlossene Hyperfläche, auf der und innerhalb der keine Singularitäten außer $\mathfrak{S}$ liegen.

2.

Es gilt nun:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_K f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1} + \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_R f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1}\,, \text{[6]}$$

für alle Punkte z außerhalb R und innerhalb K. Das erste Integral stellt eine innerhalb K reguläre, von K unabhängige Funktion dar, welche auf den Charakter von $f(z)$ auf $\mathfrak{S}$ keinen Einfluß hat. Deshalb bezeichnen wir im folgenden mit $f(z)$ die Funktion:

$$f^*(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_R f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1}\,.$$

3.

$c_0(\zeta)$ sei die reelle Komponente von ζ. Dann ist:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_R f(\zeta)\, dZ\, \Delta\left[(\zeta - c_0(\zeta)) - (z - c_0(\zeta))\right]^{-1}\,.$$

Wenn nun z außerhalb R liegt, und wenn, falls $|z - c_0(z)| < \varrho$ ist, zugleich $x_0 < -1 - \eta - \varrho$ oder $x_0 > 1 + \eta + \varrho$ erfüllt ist, so gilt: $|\zeta - c_0(\zeta)| < |z - c_0(\zeta)|$. Deshalb wird:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int\limits_R f(\zeta)\, dZ\, p_{n_1n_2n_3}(\zeta - c_0(\zeta))\cdot q_{n_1n_2n_3}(z - c_0(\zeta)) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\left\{\int\limits_{G^{(-)}} + \int\limits_{G^{(+)}} + \int\limits_M\right\} \text{[7]}\,.$$

---

[6]) *Fueter I*, S. 318.
[7]) *Fueter II*, S. 373.

Die drei Integrale untersuchen wir einzeln:

1.

$$\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{G^{(-)}} f(\zeta)\,dZ\,p_{n_1n_2n_3}(\zeta-c_0(\zeta))\cdot q_{n_1n_2n_3}(z-c_0(\zeta))=$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{G^{(-)}} f(\zeta)\,dZ\,p_{n_1n_2n_3}(\zeta+1+\eta)\cdot q_{n_1n_2n_3}(z+1+\eta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3} A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}\cdot q_{n_1n_2n_3}(z+1+\eta)\ . \tag{1}$$

2. Ebenso wird:

$$\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{G^{(+)}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3} B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}\cdot q_{n_1n_2n_3}(z-1-\eta).$$

3. Es sei K_{c_0} die zweidimensionale Kugelfläche, welche aus denjenigen Punkten von M besteht, für die $x_0=c_0$ ist $(-1-\eta<c_0<1+\eta)$. Den jedem Punkte von K_{c_0} zugeordneten Vektor, dessen Länge gleich dem Oberflächenelement auf K_{c_0} und dessen Richtung die Senkrechte auf K_{c_0} in der zur x_0-Achse senkrechten Hyperebene durch den Punkt $(c_0, 0, 0, 0)$ ist, bezeichnen wir mit dK.

Dann wird:

$$\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{M}=$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{-1-\eta}^{1+\eta}dc_0\left\{\int_{K_{c_0}} f(\zeta)\,dK\,p_{n_1n_2n_3}(\zeta-c_0)\right\}q_{n_1n_2n_3}(z-c_0)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\int_{-1-\eta}^{1+\eta}dc_0\,\vartheta^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}(c_0)\cdot q_{n_1n_2n_3}(z-c_0)\ ,$$

wo

$$\vartheta^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}(c_0)=\frac{1}{8\pi^2}\int_{K_{c_0}} f(\zeta)\,dK\,p_{n_1n_2n_3}(\zeta-c_0)\quad\text{ist.} \tag{2}$$

Es ist somit in dem zu Beginn dieses § bezeichneten Gebiete:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n=n_1+n_2+n_3}\left\{A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}\cdot q_{n_1n_2n_3}(z+1+\eta)+\right.$$
$$+B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}\cdot q_{n_1n_2n_3}(z-1-\eta)+$$
$$\left.+\int_{-1-\eta}^{1+\eta}dc_0\,\vartheta^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}(c_0)\cdot q_{n_1n_2n_3}(z-c_0)\right\}.$$

Also gilt für alle z in R_4 mit Ausnahme des Intervalls

$$-1-\eta \leqslant x_0 \leqslant 1+\eta$$

auf der reellen Achse:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} [A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3} \cdot q_{n_1n_2n_3}(z+1+\eta) + \right.$$
$$+ B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3} \cdot q_{n_1n_2n_3}(z-1-\eta) +$$
$$\left. + \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}(c_0) \cdot q_{n_1n_2n_3}(z-c_0)] \right\} .$$

4.

Wir schätzen nun die Koeffizienten $A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}$ und $B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}$ ab. Da $f(z)$ auf $G^{(-)}$ und $G^{(+)}$ regulär ist, ist es daselbst beschränkt und es möge gelten:

$$|f(z)| \leqslant M \quad \text{auf} \quad G^{(-)} \quad \text{und} \quad G^{(+)} .$$

Dann wird:

$$\left. \begin{array}{l} |A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}| \\ |B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}| \end{array} \right\} \leqslant \frac{4}{3} \pi \varrho^{n+3} \frac{M}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \quad , \quad (\text{vgl. } (1)) \tag{3}$$

da

$$|p_{n_1n_2n_3}(\zeta - c_0(\zeta))| \leqslant \frac{\varrho^n}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \quad \text{ist.}$$ [8])

Also wird

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \left\{ \begin{array}{l} A^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3} \cdot q_{n_1n_2n_3}(z+1+\eta) + \\ B^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3} \cdot q_{n_1n_2n_3}(z-1-\eta) \end{array} \right\} = 0 , \tag{4}$$

weil die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \frac{\varrho^n}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \cdot q_{n_1n_2n_3}(\xi)$$

absolut konvergiert, sobald $|\varrho| < 3\,|\xi|$ ist. [9])

Also ist nun:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1n_2n_3}(c_0) \cdot q_{n_1n_2n_3}(z-c_0) . \tag{5}$$

---

[8]) *Fueter III*, S. 327.
[9]) *Fueter III*, S. 328.

Jetzt setzen wir $\mathfrak{S}$ als *unwesentlich singulär* von der Ordnung N voraus. Darunter verstehen wir folgendes: Es gibt eine natürliche Zahl N von der Art, daß

$$|f(z)| < \frac{M}{\varrho^N} \, ,$$

wo ϱ den Abstand des Punktes z von $\mathfrak{S}$ bedeutet, d. h. die untere Grenze der Abstände des Punktes z von den einzelnen Punkten von $\mathfrak{S}$. Es wird dann (vgl. (2)):

$$\left| \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \right| = \left| \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{K_{c_0}} f(\zeta)\, dK\, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0) \right| <$$

$$< \frac{1}{8\pi^2} \frac{M}{\varrho^N} 4\pi\varrho^2 \frac{\varrho^n}{n_1!\; n_2!\; n_3!} = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{\varrho^{n+2-N}}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \, .$$

Wenn

$$|q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0)| < Q_{n_1 n_2 n_3}$$

für

$$-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$$

ist, so wird also:

$$\begin{aligned} &\Big| \lim_{\varrho = 0} \sum_{n=N-1}^{\infty} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \Big| \leqslant \\ &\leqslant \lim_{\varrho = 0} \sum_{n=N-1}^{\infty} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \frac{\varrho^{n+2-N}}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \cdot \frac{M\, Q_{n_1 n_2 n_3}}{2\pi} (2 + 2\eta) = 0 \, , \end{aligned} \tag{6}$$

wegen der absoluten Konvergenz der auftretenden Reihe[10]) für $|\varrho| < 3\, |z - c_0|_{\min}$ und dem in jedem Summanden auftretenden Faktor ϱ. Es wird somit:

$$f(z) = \lim_{\varrho = 0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \, . \tag{7}$$

Aus (3, 4, 6) folgt noch, *daß die Konvergenz in* (7) *gleichmäßig ist für alle* z *einer beliebigen abgeschlossenen Menge, welche keinen Punkt mit dem reellen Intervall* $-1 - \eta \leqslant x_0 \leqslant 1 + \eta$ *gemeinsam hat.* Denn für eine solche Menge sind alle $q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0)$ beschränkt.

5.

Satz 1. $\vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0)$ $(n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2 \ldots)$, $(\varrho > 0)$, *seien irgendwelche für* $\varrho > 0$ *in* $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ *stetige Funktionen von* c_0, *und es sei eine rechtsreguläre Funktion* $g(z)$ *in der Form dargestellt :*

[10]) *Fueter III*, S. 328.

$$g(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \;,$$

und zwar sei die Konvergenz gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Menge von z-Werten, die keine Punkte mit dem reellen Intervall $-1-\eta \leqslant x_0 \leqslant 1+\eta$ gemeinsam hat. $r(z)$ sei eine auf und in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{S}$ linksreguläre Funktion. Die geschlossene Hyperfläche S möge ganz in dieser Umgebung liegen und außerdem umschließe sie $\mathfrak{S}$. Dann gilt:

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot \frac{\partial^n r(c_0)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int_S g(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) \;.$$

Insbesondere existiert also der links stehende Grenzwert.

Beweis: Wir setzen

$$g^{(\varrho)}(z) = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \;.$$

Es wird dann:

$$\int_S g^{(\varrho)}(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) =$$
$$= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_S \left\{ \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0) \right\} dZ\, r(\zeta) \;.$$

Da alle auftretenden Funktionen stetig sind, können wir die Reihenfolge der Integrationen vertauschen:

$$\int_S g^{(\varrho)}(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) = \tag{8}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} \left\{ dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot \int_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0)\, dZ\, r(\zeta) \right\} \;.$$

Nun gilt für zwei beliebige, auf S rechts- bzw. linksreguläre Funktionen $w(z)$ und $v(z)$:

$$\int_S (w^{(k)}\, dZ\, v + w\, dZ\, v^{(k)}) = 0 \;, \quad (k = 0, 1, 2, 3) \;,$$

wo

$$w^{(k)}(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial x_k} \quad \text{ist.}$$ [11])

---

[11]) *Fueter IV*, S. 309.

Wenden wir diese Formel auf die Funktionen $w(z) = q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0)$ und $v(z) = r(z)$ an, so erhalten wir:

$$\int\limits_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0)\, dZ\, r(\zeta) = \int\limits_S q_{n_1 - 1\, n_2\, n_3}(\zeta - c_0)\, dZ \frac{\partial r(\zeta)}{\partial \xi_1} \quad ,$$

und durch $(n_1 + n_2 + n_3)$ - malige Anwendung derselben Formel:

$$\int\limits_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0)\, dZ\, r(\zeta) = \int\limits_S q_{0\,0\,0}(\zeta - c_0)\, dZ \frac{\partial^n r(\zeta)}{\partial \xi_1^{n_1}\, \partial \xi_2^{n_2}\, \partial \xi_3^{n_3}} =$$

$$= -2\pi^2 \frac{\partial^n r(c_0)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \quad [12]\ .$$

Setzen wir dies in (8) ein, so erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{n_1 n_2 n_3}^{(\varrho)}(c_0) \frac{\partial^n r(c_0)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_S g^{(\varrho)}(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) \quad .$$

Nun ist gleichmäßig auf S:

$$\lim_{\varrho=0} g^{(\varrho)}(\zeta) = g(\zeta) \quad .$$

Also existiert:

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{n_1 n_2 n_3}^{(\varrho)}(c_0) \frac{\partial^n r(c_0)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_S g(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) \ , \qquad \text{w. z. b. w.}$$

6.

$\vartheta(c_0)$ sei eine in $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ stetige und stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten das Integral

$$\int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta(c_0)\, q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \ , \qquad \text{worin } n_1 \neq 0 \text{ sei.}$$

---

[12]) *Fueter I*, S. 318.

Nun ist

$$q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) = -\frac{\partial}{\partial x_1} q_{n_1 - 1\, n_2\, n_3}(z - c_0) \ ^{13)} .$$

Da aber $q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0)$ eine linksreguläre Funktion ist, so gilt außerdem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0) = 0 \ , \ ^{14)}$$

also

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} q_{n_1-1, n_2, n_3}(z - c_0) = \left(-i_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - i_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0) .$$

Wegen

$$\frac{\partial q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0)}{\partial x_2} = - q_{n_1-1\, n_2+1\, n_3}(z - c_0) ,$$

$$\frac{\partial q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0)}{\partial x_3} = - q_{n_1-1\, n_2\, n_3+1}(z - c_0) ,$$

$$\frac{\partial q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0)}{\partial x_0} = - \frac{\partial q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0)}{\partial c_0} ,$$

wird schließlich:

$$\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta(c_0)\, q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) = \vartheta(c_0) \cdot i_1 \cdot q_{n_1-1\, n_2\, n_3}(z - c_0) \Big|_{-1-\eta}^{1+\eta} -$$

$$- \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta'(c_0) \cdot i_1 \cdot q_{n_1-1 n_2\, n_3}(z - c_0) +$$

$$+ \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta(c_0) \cdot i_3 \cdot q_{n_1-1 n_2+1\, n_3}(z - c_0) -$$

$$- \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta(c_0) \cdot i_2 \cdot q_{n_1-1 n_2 n_3+1}(z - c_0) .$$

Wir haben damit das gegebene Integral in eine Summe von Integralen zerlegt, in denen allen der erste Index der Funktion $q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0)$ um 1 erniedrigt ist, die übrigen erhöht werden, aber so, daß die Summe der Indizes gleich bleibt. Der neben diesen Integralen noch auftretende Summand wird im folgenden keine Rolle spielen. Auf dieselbe Art können wir natürlich den zweiten oder dritten Index erniedrigen.

---

[13]) *Fueter IV,* S. 314.

[14]) *Fueter I,* S. 310.

7.

In

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0)\, q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \quad (\text{vgl. } (7))$$

sei N_1 die größte der unter den ersten Indizes der $q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0)$ auftretenden Zahlen. In allen Summanden, in denen N_1 tatsächlich als erster Index auftritt, erniedrigen wir denselben nach dem in 6. beschriebenen Verfahren um 1. Wir erhalten dann eine neue Darstellung von $f(z)$, in welcher der höchste auftretende erste Index

$$\leqslant N_1 - 1$$

ist.

In allen Gliedern mit höchstem ersten Index erniedrigen wir denselben wieder um 1, usw. Schließlich erhalten wir eine Darstellung:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \left\{ \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{*(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0\, n_2 n_3}(z - c_0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{N-3} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \left[\alpha^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3} \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z + 1 + \eta) + \beta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3} \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - 1 - \eta)\right] \right\}.$$

Die Koeffizienten $\alpha^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}$, $\beta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}$ sind lineare Kombinationen der $\vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\pm 1 \pm \eta)$ und je endlich vieler ihrer Ableitungen an denselben Stellen. Wegen

$$\vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{K_{c_0}} f(\zeta)\, dK\, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0) \quad (\text{vgl. } (2))$$

wird:

$$\vartheta^{(\varrho)(\nu)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{K_{c_0}} f^{(\nu)}(\zeta)\, dK\, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c_0)\ .$$

Da aber $f(z)$ in allen Punkten mit $x_0 = \pm 1 \pm \eta$ regulär ist, so ist es mitsamt den in der Darstellung der $\alpha^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}$, $\beta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}$ auftretenden Ableitungen auf allen $K_{\pm 1 \pm \eta}$ gleichmäßig in ϱ beschränkt. Deshalb wird

$$\lim_{\varrho=0} \alpha^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3} = \lim_{\varrho=0} \beta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3} = 0\ . \tag{9}$$

Schreiben wir noch $\vartheta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}$ anstelle von $\vartheta^{*(\varrho)}_{0 n_2 n_3}$, so wird jetzt

$$f(z) = \lim \sum_{\varrho=0}^{N-2} \sum_{n=0} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \, \vartheta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \,. \qquad (10)$$

Da die Konvergenz in (7) *gleichmäßig war für jede abgeschlossene Menge von z-Werten, die keine Punkte mit dem reellen Intervall* $-1-\eta \leqq x_0 \leqq 1+\eta$ *gemeinsam hat, folgt vermittelst* (9) *dasselbe für* (10).

8.

Wir begeben uns nun in eine komplexe Zahlenebene mit den Einheiten $1, i$.

a) Wir betrachten die Folge von analytischen Funktionen im Einheitskreis $|z| < 1$:

$$\mu_k(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^{2k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \,.$$

Sie hat die Eigenschaften:

α) falls z reell ist, so ist $\mu_k(z)$ reell, $\mu_k(z) \geqq 1$, und $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(z) = +\infty$, außer für $z = 0$;

β) falls z rein imaginär ist, so ist $\mu_k(z)$ reell, $0 < \mu_k(z) \leqq 1$, und $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k(z) = 0$, außer für $z = 0$.

b) Die Folge von im Einheitskreis eindeutigen analytischen Funktionen:

$$\lambda_k(z) = \int_0^z \mu_k(z)\,dz \,, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei die Integration über einen beliebigen in $|z| < 1$ gelegenen Weg zu erstrecken ist, hat deshalb die folgenden Eigenschaften:

α) falls z reell ist, $z \gtreqless 0$, so ist $\lambda_k(z)$ reell und $\lambda_k(z) \gtreqless 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(z) = \pm\infty$;

β) falls z rein imaginär ist

mit $\left\{\begin{matrix}\text{positivem}\\\text{negativem}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten von i, so ist $\lambda_k(z)$ rein imaginär

mit $\left\{\begin{matrix}\text{positivem}\\\text{negativem}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten von i und $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(z) = 0$.

Es ist übrigens für alle rein imaginären z im Innern des Einheitskreises $|\lambda_k(z)| < 1$.

Deshalb nimmt keine der Funktionen $\lambda_k(z)$ auf der imaginären Achse die Werte $\pm i$ an. Ein rein imaginärer Wert kann aber von einer Funktion $\lambda_k(z)$ nur auf der imaginären Achse angenommen werden. Wäre nämlich $\lambda_k(x + iy)$ rein imaginär, $x \neq 0$, so wäre $\lambda_k(-x + iy) = \lambda_k(x + iy)$, aus Symmetriegründen.

Das ist aber für $x \neq 0$ nicht möglich, da die Funktionen $w = \lambda_k(z)$ das Kreisinnere $|z| < 1$ schlicht abbilden, wie wir jetzt zeigen wollen. Wäre nämlich für irgendein k die Abbildung nicht schlicht, also etwa

$$\lambda_k(z^*) = \lambda_k(z^{**}) \quad , \qquad z^* \neq z^{**} \ ,$$

so verbinden wir z^* und z^{**} durch eine in $|z| < 1$ verlaufende stetige Kurve. Das Bild derselben ist eine auf der Riemannschen Fläche der inversen Funktion $z = z(w)$ verlaufende Kurve, die zwei über demselben w-Wert liegende Punkte derselben verbindet und die ganz im Bildgebiet von $|z| < 1$ verläuft. Dieses müßte also einen Windungspunkt der Riemannschen Fläche enthalten, also eine singuläre Stelle der Funktion $z = z(w)$. Eine solche kann nur auftreten, wenn an der entsprechenden z-Stelle

$$\begin{array}{lll} \text{entweder} & w = \lambda_k(z) & \text{singulär ist} \\ \text{oder} & w' = \lambda_k'(z) = 0 & \text{ist.} \end{array}$$

Beides ist für $|z| < 1$ nirgends der Fall.

Keine Funktion $\lambda_k(z)$ nimmt also für $|z| < 1$ die Werte $\pm i$ an. Eine nähere Betrachtung zeigt sogar, daß es je eine feste Umgebung dieser Werte gibt, so daß die Funktionen keine Werte der Umgebung annehmen.

c) Nun betrachten wir die Folge von Funktionen

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[\lambda_k\left(\frac{z}{3}\right)\right], \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$
$$(|z| < 3),$$

wo von der Funktion arctg der Hauptwert zu nehmen ist. Da die Funktion arctg als einzige singuläre Stellen die Punkte $\pm i$ hat, folgt aus dem zuletzt über $\lambda_k(z)$ gesagten, daß die $\varphi_k(z)$ für $|z| < 3$ gleichmäßig in k beschränkt sind. Aus (b, α) ergibt sich, daß für reelles $z \gtrless 0$: $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(z) = \pm 1$, $\varphi_k(0) = 0$.

d) Jetzt beachten wir noch die folgende leicht nachzuprüfende Tatsache:

$$\varphi(x + iy) = u_0(x, y) + i u_1(x, y)$$

sei eine analytische Funktion der Variabeln $x + iy$. Dann ist

$$\varphi(z) = u_0(x_0, x_1) + i_1\, u_1(x_0, x_1)$$

eine zugleich rechts- und linksreguläre Funktion der Quaternionenvariabeln $z = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$. Es sei nun:

$$\varphi_k(x + iy) = u_{k0}(x, y) + i\, u_{k1}(x, y) \ .$$

Wir bilden die Folge von regulären Quaternionenfunktionen

$$\varphi_k(z) = u_{k0}(x_0, x_1) + i_1 u_{k1}(x_0, x_1) \ .$$

Aus dem unter (c) gesagten ergibt sich, daß diese Funktionenfolge die Eigenschaften hat:

1. *Die $\varphi_k(z)$ sind in $| x_0 + i_1 x_1 | < 3$ rechts- und linksregulär.*
2. $\varphi_k(0) = 0$.
3. *Auf der reellen Achse ist für* $| z | < 3 : \varphi_k(z) < 1$.
4. *Auf der reellen Achse ist für* $x_0 \gtrless 0 : (| x_0 | < 3) \lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(z) = \pm 1$.
5. *Es gibt eine Umgebung U von $\mathfrak{S}$* (z. B. $| z | < 2$) *innerhalb derer die $\varphi_k(z)$ gleichmäßig in k beschränkt sind. U möge so gewählt werden, daß es von einer geschlossenen Hyperfläche S begrenzt wird. Innerhalb und auf S möge gelten:*
$$| \varphi_k(z) | < M \ . \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

9.

Jetzt greifen wir auf die Darstellung (10) zurück:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\, n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0\, n_2 n_3}(z - c_0) \ ;$$

wir werden im folgenden über dieselbe beweisen:

Hauptsatz 2. *Zu jedem Indexsystem* $(0, \nu_2, \nu_3)$ $(\nu_2 + \nu_3 \leqslant N - 2)$ *gibt es eine Funktion* $\alpha_{0\, \nu_2 \nu_3}(c_0)$, *die in* $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ *von beschränkter Schwankung ist, und für die gilt:*

$$\lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\, \nu_2 \nu_3}(c_0) \cdot r(c_0) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\, \nu_2 \nu_3}(c_0)\right] \cdot r(c_0)$$

für jede auf $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ *stetige Funktion* $r(c_0)$.

Den **Beweis** werden wir durch eine vollständige Induktion bezüglich $\nu = \nu_2 + \nu_3$ führen. Wir setzen voraus, daß der Satz für $\nu < \nu_0$ gilt.

Dann folgt, daß

$$h_{\nu_0}(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=\nu_0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \, \vartheta^{(\varrho)}_{0\, n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0\, n_2 n_3}(z - c_0)$$

existiert, und wir beweisen:

Hilfssatz 3. *Es existiere die Funktion*

$$h_{\nu_0}(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=\nu_0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \, \vartheta^{(\varrho)}_{0\, n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0\, n_2 n_3}(z - c_0)$$

für alle z, *die nicht auf* $\mathfrak{S}$ *liegen. Dann gibt es zu jedem Indexsystem* $(0, \nu_2, \nu_3)$ *mit* $\nu_2 + \nu_3 = \nu_0$ *eine Funktion* $\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)$, *sodaß für jede in* $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ *stetige Funktion* $r(c_0)$:

$$\lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \, \vartheta^{(\varrho)}_{0\, \nu_2 \nu_3}(c_0) \cdot r(c_0) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot r(c_0)$$

ist.

Der **Beweis** dieses Hilfssatzes wird in den §§ 10—16 geführt.

Für späteren Gebrauch setzen wir noch

$$h^{(\varrho)}_{\nu_0}(z) = \sum_{n=\nu_0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \, \vartheta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{0\, n_2 n_3}(z - c_0) \;, \tag{11}$$

und stellen fest, daß aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz in (10) und aus der Gültigkeit des Hauptsatzes 2 für $\nu < \nu_0$ folgt:

$$h_{\nu_0}(z) = \lim_{\varrho=0} h^{(\varrho)}_{\nu_0}(z) \;, \tag{12}$$

gleichmäßig in jeder abgeschlossenen Menge von z-Werten, die keine Punkte mit dem Intervall $-1 - \eta \leqslant x_0 \leqslant 1 + \eta$ gemeinsam hat.

10.

Wir wenden jetzt Satz 1 an, indem wir an Stelle von $g(z)$ die Funktion $h_{\nu_0}(z)$ und an Stelle von $r(z)$ die Funktion $p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(z)$, $[\nu_2 + \nu_3 = \nu_0$, ν_1 beliebig$]$ einsetzen.

Bedenken wir, daß die Funktion $p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z)$ folgende Eigenschaften hat:

1. $$\frac{\partial^{n_2+n_3} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z)}{\partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} = 0 \quad , \quad \text{sobald } n_2 > \nu_2 \text{ oder } n_3 > \nu_3 \; ,$$

2. $$\frac{\partial^{\nu_0} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z)}{\partial x_2^{\nu_2}\, \partial x_3^{\nu_3}} = p_{\nu_1 0 0}(z) =$$
$$= \frac{1}{\nu_1!}\,(x_1 - i_1 x_0)^{\nu_1} = \frac{(-i_1)^{\nu_1}}{\nu_1!}\,(x_0 + i_1 x_1)^{\nu_1} \, , \quad ^{15})$$

so erhalten wir (nach Satz 1, (11) und (12)):

$$\int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0 \nu_2 \nu_3}(c_0)\, p_{\nu_1 0 0}(c_0) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_S h^{(\varrho)}_{\nu_0}(\zeta)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta)$$

und (13)

$$\lim_{\varrho=0} \int\limits_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0 \nu_2 \nu_3}(c_0) \cdot p_{\nu_1 0 0}(c_0) = -\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_S h_{\nu_0}(\zeta)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(\zeta) \; .$$

Da die in 8 definierten Funktionen $\varphi_k(z)$ $(k = 1,2,\ldots)$ analytische Funktionen der Variabeln $x_0 + i_1 x_1$ sind, gibt es solche Koeffizienten $a^{(k)}_{\nu_1}$ $(k, \nu_1 = 0, 1, \ldots)$, daß

$$\varphi_k(z) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} p_{\nu_1 0 0}(z) \cdot a^{(k)}_{\nu_1} \; , \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

für alle z aus der Umgebung U von $\mathfrak{S}$.

Setzen wir nun

$$\chi_k(z) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z) \cdot a^{(k)}_{\nu_1} \; , \quad (k = 1, 2, \ldots) \; ,$$

so folgt aus der in k gleichmäßigen Beschränktheit der $\varphi_k(z)$ in U diejenige der $\chi_k(z)$ [16].

Nun multiplizieren wir (13) von rechts mit $a^{(k)}_{\nu_1}$ und summieren über ν_1. Dann erhalten wir:

---

[15]) *Fueter II*, S. 372.

[16]) *Fueter III*, S. 327.

$$\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi_k(c_0) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_S h^{(\varrho)}_{\nu_0}(\zeta)\, dZ\, \chi_k(\zeta)$$

und (14)

$$\lim_{\varrho=0}\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi_k(c_0) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_S h_{\nu_0}(\zeta)\, dZ\, \chi_k(\zeta)\ .$$

11.

Wir setzen (vgl. § 8):

$$\varphi(c_0) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(c_0) = \begin{cases} -1 & \text{für } c_0 < 0 \\ 0 & \text{für } c_0 = 0 \\ +1 & \text{für } c_0 > 0\ , \end{cases}$$

und beweisen:

Hilfssatz 4. *Bei festem* ϱ *ist:*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi_k(c_0) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi(c_0)\ .$$

Beweis: a) Wir halten ϱ fest. Es sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann ist:

$$\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi_k(c_0) = \int_{-1-\eta}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{1+\eta}\ .$$

Das mittlere Integral wollen wir mit $E_k(\varepsilon)$ bezeichnen. Da die Konvergenz (§ 8, d, 4) in $<-1-\eta\ ,\ -\varepsilon>$ und $<+\varepsilon, 1+\eta>$ gleichmäßig ist, so wird:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi_k(c_0) = \int_{-1-\eta}^{-\varepsilon} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\varphi(c_0) +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} E_k(\varepsilon) + \int_{+\varepsilon}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}\cdot\varphi(c_0)\ .$$

Nun ist $|E_k(\varepsilon)| < 2\,\varepsilon\,\Theta$, wo Θ das Maximum von $\vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)$ in $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ ist.

Lassen wir also ε nach 0 gehen, so erhalten wir:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot \varphi_k(c_0) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot \varphi(c_0) \quad .$$

Wir setzen nun:

$$A_{0\nu_2\nu_3}(r(c_0)) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot r(c_0) \quad , \tag{15}$$

für irgendeine in $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ definierte Funktion $r(c_0)$, falls der rechts stehende Grenzwert existiert. *Damit haben wir im Bereich derjenigen Funktionen $r(c_0)$, für die $A_{0\nu_2\nu_3}(r(c_0))$ existiert, ein Funktional definiert.* Das Ziel der nächsten Paragraphen ist es, zu zeigen, daß der Existenzbereich dieses Funktionals alle in $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ stetigen Funktionen umfaßt.

Vorläufig beweisen wir:

Satz 5. *Das Funktional $A_{0\nu_2\nu_3}$ existiert für die Funktion $\varphi(c_0)$ und es ist*

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi(c_0)) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0)) \quad .$$

Beweis: Wir beweisen zuerst, daß

$$\lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0))$$

existiert.

Nun ist:

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0)) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot \varphi_k(c_0) = \qquad \text{(vgl. (15))}$$

$$= \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho_1)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot \varphi_k(c_0) +$$

$$+ \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \left[\vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) - \vartheta^{(\varrho_1)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot \varphi_k(c_0) = I_1^{(k)}(\varrho_1) + I_2^{(k)}(\varrho_1) \tag{16}$$

bei beliebigem ϱ_1. Nach (14) ist

$$I_2^{(k)}(\varrho_1) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \left[\vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) - \vartheta^{(\varrho_1)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot \varphi_k(c_0) =$$

$$= \lim_{\varrho=0} -\frac{1}{2\pi^2} \int_S \left[h^{(\varrho)}_{\nu_0}(\zeta) - h^{(\varrho_1)}_{\nu_0}(\zeta)\right] dZ\, \chi_k(\zeta) \quad .$$

Wir behaupten, daß $\lim\limits_{\varrho_1=0} I_2^{(k)}(\varrho_1) = 0$ ist.

Es sei nämlich auf S: $|\chi_k(z)| < N$. (Die $\chi_k(z)$ sind auf S gleichmäßig in k beschränkt.)

Dann können wir auf Grund von (12) eine Funktion $\eta(\varrho_1)$ so bestimmen, daß auf S:

$$| h_{\nu_0}^{(\varrho)}(\zeta) - h_{\nu_0}^{(\varrho_1)}(\zeta) | \leqslant \eta(\varrho_1) \quad \text{für} \quad \varrho \leqslant \varrho_1 , \tag{17}$$

und daß

$$\lim_{\varrho_1=0} \eta(\varrho_1) = 0 \quad \text{ist.}$$

Dann ist

$$\left| \int_S [h_{\nu_0}^{(\varrho)}(\zeta) - h_{\nu_0}^{(\varrho_1)}(\zeta)]\, dZ\, \chi_k(\zeta) \right| \leqslant \eta(\varrho_1) \cdot S^* \cdot N$$

für $\varrho < \varrho_1$ und alle k, wo S^* den Inhalt der Hyperfläche S bedeutet. Es ist somit

$$\lim_{\varrho_1=0} I_2^{(k)}(\varrho_1) = 0$$

gleichmäßig in k.

Nun sei ε eine beliebige positive Zahl. Wir wählen ϱ_1 so klein, daß $|I_2^{(k)}(\varrho_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird. Alsdann wählen wir k_0 so, daß für $k_1 > k_0$ und $k_2 > k_0$:

$$| I_1^{(k_2)}(\varrho_1) - I_1^{(k_1)}(\varrho_1) | < \frac{\varepsilon}{3} ,$$

wird. Das ist möglich nach Hilfssatz 4.

Dann wird nach (16) für $k_1 > k_0$ und $k_2 > k_0$:

$$| A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_{k_2}(c_0)) - A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_{k_1}(c_0)) | < \varepsilon ,$$

d. h. die Folge der $A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0))$ ist konvergent. Ihren Grenzwert wollen wir jetzt berechnen. Gehen wir in (16) zum $\lim\limits_{k\to\infty}$ über, so erhalten wir:

$$\lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0)) = \lim_{k\to\infty} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{0\nu_2\nu_3}^{(\varrho_1)}(c_0) \cdot \varphi_k(c_0) +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \left[\lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 [\vartheta_{0\nu_2\nu_3}^{(\varrho)}(c_0) - \vartheta_{0\nu_2\nu_3}^{(\varrho_1)}(c_0)]\, \varphi_k(c_0) \right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} [I_1^{(k)}(\varrho_1) + I_2^{(k)}(\varrho_1)] = \lim_{\varrho_1=0} \left[\lim_{k\to\infty} [I_1^{(k)}(\varrho_1) + I_2^{(k)}(\varrho_1)] \right] .$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden:

$$I_2^{(k)}(\varrho_1) \leqslant \eta(\varrho_1)\, S^* N$$

für alle k, also auch

$$\lim_{k\to\infty} I_2^{(k)}(\varrho_1) \leqslant \eta(\varrho_1) \cdot S^* \cdot N$$

und

$$\lim_{\varrho_1=0} [\lim_{k\to\infty} I_2^{(k_1)}(\varrho_1)] = 0 \ .$$

Somit wird:

$$\lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0)) = \lim_{\varrho_1=0} [\lim_{k\to\infty} I_1^{(k)}(\varrho_1)] \ ,$$

also nach Hilfssatz 4:

$$\lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0)) = \lim_{\varrho_1=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \vartheta^{(\varrho_1)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0) \cdot \varphi(c_0) = A_{0\,\nu_2\,\nu_3}(\varphi(c_0)) \ ,$$

w. z. b. w.

12.

Die in diesem Paragraphen auftretenden Funktionen haben reelles Argument; ihr Wertevorrat besteht jedoch aus Quaternionen. Wir wollen zuerst definieren, was wir im Bereich dieser Funktionen unter einer Funktion von beschränkter Schwankung verstehen.

Definition: *Die Funktion $\sigma(c_0)$, die von der eben beschriebenen Art ist, heißt in dem (reellen) Intervall $a \leqslant c_0 \leqslant b$ von beschränkter Schwankung, wenn bei beliebiger Wahl der Punkte x_i mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (n beliebig), stets die Ungleichheit erfüllt ist:*

$$\sum_{k=1}^{n} | \sigma(x_k) - \sigma(x_{k-1}) | < G \ ,$$

wo G eine von der Auswahl der Punkte x_i unabhängige positive Zahl ist.

Man beweist ohne weiteres:

Hilfssatz 6. *Wenn $\sigma(c_0)$ von beschränkter Schwankung ist, so sind es auch seine vier Komponenten im Sinne der Theorie der reellen Funktionen.*

Hilfssatz 7. *Wenn die vier Komponenten der Funktion $\sigma(c_0)$ im Sinne der Theorie der reellen Funktionen von beschränkter Schwankung sind, so ist es $\sigma(c_0)$ im eben definierten Sinne.*

Wir geben nun auf dem Intervall $< a, b >$ eine Folge von Unterteilungen:

$$U^{(\nu)} : a = x_0^{(\nu)} < x_1^{(\nu)} < \cdots < x_{n_\nu}^{(\nu)} < x_{n_\nu - 1}^{(\nu)} = b \,, \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit der Eigenschaft:

$\lim\limits_{\nu \to \infty} d^{(\nu)} = 0$, wo $d^{(\nu)}$ die größte unter den Längen der Teilintervalle von $U^{(\nu)}$ ist. Dann gilt:

Satz 8. *$\sigma(c_0)$ sei in $< a, b >$ von beschränkter Schwankung. $r(c_0)$ sei im selben Intervall stetig. Dann existiert das Stieltjèssche Integral:*

$$\int_a^b d\left[\sigma(c_0)\right] \cdot r(c_0) =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \sum_{k=1}^{n_\nu} \left[\sigma(x_k^{(\nu)}) - \sigma(x_{k-1}^{(\nu)})\right] \cdot r(\xi_k^{(\nu)}) \quad (x_{k-1} \leqslant \xi_k^{(\nu)} \leqslant x_k) \;.$$

Beweis: Es sei

$$\sigma = \sum_{m=0}^{3} i_m \sigma_m \;, \quad r = \sum_{n=0}^{3} i_n r_n \;.$$

Dann ist:

$$\left[\sigma(x_k^{(\nu)}) - \sigma(x_{k-1}^{(\nu)})\right] \cdot r(\xi_k^{(\nu)}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{3} \sum_{n=0}^{3} i_m i_n \left[\sigma_m(x_k^{(\nu)}) - \sigma_m(x_{k-1}^{(\nu)})\right] \cdot r_n(\xi_k^{(\nu)}) \;.$$

Nach Hilfssatz 6 sind die Funktionen σ_m von beschränkter Schwankung. Die Funktionen r sind stetig. Wie in der Theorie der reellen Funktionen gezeigt wird, existiert dann

$$\int_a^b d\left[\sigma_m(c_0)\right] \cdot r_n(c_0) \qquad (m, n = 0, 1, 2, 3) \;.$$ [17])

Also existiert auch

$$\int_a^b d\left[\sigma(c_0)\right] \cdot r(c_0) = \sum_{m=0}^{3} \sum_{n=0}^{3} i_m i_n \int_a^b d\left[\sigma_m(c_0)\right] \cdot r(c_0) \,, \quad \text{w. z. b. w.}$$

---

[17]) *H. Lebesgue,* Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1928. S. 253f.

13.

Wenden wir alle Überlegungen von § 11 statt auf die Funktionen $\varphi_k(z)$, $\varphi(z)$, $\chi_k(z)$ auf die Funktionen $\varphi_k(z-a_0)$, $\varphi(z-a_0)$, $\chi_k(z-a_0)$ (a_0 reell, $-2 < a_0 < +2$) ($\varphi_k(z)$ ist ja regulär für $|z| < 3$) an, so erhalten wir als Analogon zu Satz 5:

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi(c_0-a_0)) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\varphi_k(c_0-a_0)) \ , \tag{18}$$

wo

$$\varphi(c_0-a_0) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(c_0-a_0) = \begin{cases} -1 \text{ für } c_0 < a_0 \,, \\ 0 \text{ für } c_0 = a_0 \,, \\ +1 \text{ für } c_0 > a_0 \,, \end{cases} \text{ ist.}$$

Nun definieren wir die Funktion:

$$\begin{aligned}\psi(c_0-a_0) &= \tfrac{1}{2}\,[1-\varphi(c_0-a_0] = \\ &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{2}\,[1-\varphi_k(c_0-a_0)] = \\ &= \lim_{k\to\infty} \psi_k(c_0-a_0) = \begin{cases} 1 \text{ für } c_0 < a_0 \,, \\ \tfrac{1}{2} \text{ für } c_0 = a_0 \,, \\ 0 \text{ für } c_0 > a_0 \,. \end{cases}\end{aligned}$$

Setzen wir in (18): $a_0 < -1-\eta$, so erhalten wir die Existenz von $A_{0\nu_2\nu_3}((1))$. Somit existiert auch

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\psi(c_0-a_0)) \ ,$$

und es gilt

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\psi(c_0-a_0)) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\psi_k(c_0-a_0) \ . \tag{19}$$

Wir setzen nun

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\psi(c_0-a_0)) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\cdot\psi(c_0-a_0) = \alpha_{0\nu_2\nu_3}(a_0) \tag{20}$$

und beweisen:

Satz 9. *Die Funktion $\alpha_{0\nu_2\nu_3}(a_0)$ ist in $-1-\eta \leqq a_0 \leqq 1+\eta$ von beschränkter Schwankung.*

Beweis: Auf Grund von Hilfssatz 7 beweisen wir, daß jede Komponente von $\alpha_{0\nu_2\nu_3}(a_0)$ von beschränkter Schwankung ist. Nun ist:

$$\begin{aligned}&|\,\alpha^{(i)}_{0\nu_2\nu_3}(x_j) - \alpha^{(i)}_{0\nu_2\nu_3}(x_{j-1})\,| = \\ &= e_j\,(\alpha^{(i)}_{0\nu_2\nu_3}(x_j) - \alpha^{(i)}_{0\nu_2\nu_3}(x_{j-1})) \quad (e_j = \pm 1) \ .\end{aligned}$$

g sei ein Polynom in $x_0 + i_1 x_1$ mit reellen Koeffizienten, das folgende Eigenschaften hat:

1. Auf der reellen Achse ist es $\gtreqless 0$ in allen offenen Intervallen (x_{j-1}, x_j), in denen $e_j = \pm 1$ ist.
2. In den Punkten x_j ist $g = 0$, wenn es in beiden angrenzenden Intervallen entgegengesetztes Vorzeichen hat, sonst ist es $\neq 0$.
3. Die Umgebung U von $\mathfrak{S}$ wird durch $g(z)$ auf einen Teilbereich abgebildet.

Daß ein Polynom mit den Eigenschaften (1) und (2) existiert, ist klar. Um aus einem solchen eines mit der Eigenschaft (3) zu erhalten, braucht man es nur mit einer genügend kleinen reellen Konstanten zu multiplizieren.

Wir bilden nun die Funktionsschar:

$$T_k(z) = \varphi_k(g(z)) \qquad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Auf Grund obiger Eigenschaft (3) und Eigenschaft (d, 5) in § 8 gilt:

$$| T_k(z) | < M \quad \text{in} \quad U .$$

Wegen obiger Eigenschaften (1) und (2) und der Eigenschaften (d, 2, 4) in § 8 wird:

$$\lim_{k\to\infty} T_k(c_0) = T(c_0) = \begin{cases} \pm 1 \text{ in } (x_{j-1}, x_j), \text{ wenn } e_j = \pm 1 \text{ ist.} \\ \pm 1 \text{ in } x_j, \text{ wenn } e_j = e_{j+1} = \pm 1 \text{ ist.} \\ 0 \text{ in } x_j, \text{ wenn } e_j \neq e_{j+1} \text{ ist.} \end{cases}$$

Es ist also:

$$T(c_0) = \sum_j e_j [\psi(c_0 - x_j) - \psi(c_0 - x_{j-1})] .$$

Aus der Existenz von

$$A_{0\nu_2\nu_3}(\psi(c_0 - x)) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(\psi_k(c_0 - x)) \quad (\text{vgl. } (19))$$

folgt deshalb die von

$$A_{0\nu_2\nu_3}(T(c_0)) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(T_k(c_0)) .$$

Weil $T_k(z)$ eine analytische Funktion der Variabeln $(x_0 + i_1 x_1)$ ist, ist in U:

$$T_k(z) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} p_{\nu_1 00}(z) \cdot b_{\nu_1}^{(k)} .$$

Setzen wir:

$$\Sigma_k(z) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(z) \cdot b_{\nu_1}^{(k)} \quad ,$$

so erhalten wir, indem wir (13_2) von rechts mit $b_{\nu_1}^{(k)}$ multiplizieren und summieren:

$$A_{0\,\nu_2\nu_3}(T_k(c_0)) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_S h_{\nu_0}(\zeta)\, dZ\, \Sigma_k(\zeta) \quad .$$

Aus der aus obiger Eigenschaft (3) folgenden in k gleichmäßigen Beschränktheit der $T_k(\zeta)$ auf S folgt diejenige der $\Sigma_k(\zeta)$. Es sei $|\Sigma_k(\zeta)| \leqslant P$ auf S. Dann wird:

$$|A_{0\,\nu_2\nu_3}(T_k(c_0))| \leqslant \frac{1}{2\pi^2} \cdot H \cdot S^* P \quad ,$$

wo H das Maximum von $h_{\nu_0}(z)$ auf S und S^* den Inhalt der Hyperfläche S bedeutet.

Also wird auch

$$|A_{0\,\nu_2\nu_3}(T(c_0))| \leqslant \frac{1}{2\pi^2} H\, S^*\, P \quad .$$

Aus

$$\alpha_{0\,\nu_2\nu_3}(a_0) = A_{0\,\nu_2\nu_3}(\psi(c_0 - a_0))$$

und

$$T(c_0) = \sum_j e_j [\psi(c_0 - x_j) - \psi(c_0 - x_{j-1})]$$

folgt aber:

$$A_{0\,\nu_2\nu_3}(T(c_0)) = \sum_j e_j [\alpha_{0\,\nu_2\nu_3}(x_j) - \alpha_{0\,\nu_2\nu_3}(x_{j-1})] \quad .$$

Die Zahlen $e_j = \pm 1$ waren aber so gewählt, daß auf der rechten Seite die i-te Komponente von $[\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$ überall positives Vorzeichen hat. Deshalb ist

$$\sum_j |\alpha_{0\,\nu_2\nu_3}^{(i)}(x_j) - \alpha_{0\,\nu_2\nu_3}^{(i)}(x_{j-1})| = \sum_j e_j(\alpha_{0\,\nu_2\nu_3}^{(i)}(x_j) - \alpha_{0\,\nu_2\nu_3}^{(i)}(x_{j-1})) \leqslant$$

$$\leqslant |\sum_j e_j(\alpha_{0\,\nu_2\nu_3}(x_j) - \alpha_{0\,\nu_2\nu_3}(x_{j-1}))| = |A_{0\,\nu_2\nu_3}(T(c_0))| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi^2} H\, S^*\, P \quad \text{w.z.b.w.}$$

Somit existiert nach Satz 8 für jede in $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ stetige Funktion $r(c_0)$ das Stieltjèssche Integral

$$\int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot r(c_0) \quad .$$

Es existiert auch für die Funktionen, die in $<-1-\eta,\, 1+\eta>$ endlich viele Unstetigkeitsstellen haben, von denen keine mit einer der abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen von $\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)$ zusammenfällt. Unter diesen werden wir insbesondere diejenigen Funktionen brauchen, die im Innern eines jeden Intervalls, das von zwei aufeinanderfolgenden Unstetigkeitsstellen begrenzt ist, konstant sind, und die an den Unstetigkeitsstellen den Mittelwert der oberen und unteren Limesfunktion annehmen. Solche Funktionen wollen wir im folgenden mit $t(c_0)$ bezeichnen. Offenbar kann jede Funktion $t(c_0)$ mit Hilfe der in § 13 definierten Funktionen $\psi(c_0 - a_0)$ in der Form dargestellt werden:

$$t(c_0) = \sum_j g_j\left(\psi(c_0 - c_j) - \psi(c_0 - c_{j-1})\right) \quad , \tag{21}$$

wo die c_j alle Unstetigkeitsstellen von $t(c_0)$ durchlaufen und wo g_j der Wert von $t(c_0)$ in (c_{j-1}, c_j) ist.

Setzen wir

$$t_k(c_0) = \sum g_j\left(\psi_k(c_0 - c_j) - \psi_k(c_0 - c_{j-1})\right) \quad ,$$

so wird

$$t(c_0) = \lim_{k\to\infty} t_k(c_0) \quad , \tag{22}$$

und aus

$$A_{0\nu_2\nu_3}\left(\psi(c_0 - c_j)\right) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}\left(\psi_k(c_0 - c_j)\right) \qquad (\text{vgl. } (19))$$

folgt

$$A_{0\nu_2\nu_3}\left(t(c_0)\right) = \lim_{k\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}\left(t_k(c_0)\right) \quad . \tag{23}$$

Nun bemerken wir, daß aus der Definition der Funktion $\alpha_{0\nu_2\nu_3}$ (vgl. (20)) unmittelbar folgt:

$$A_{0\nu_2\nu_3}\left(\psi(c_0 - c_j)\right) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot \psi(c_0 - c_j) \quad .$$

Daraus folgt wegen (21):

$$A_{0\nu_2\nu_3}\left(t(c_0)\right) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot t(c_0) \quad . \tag{24}$$

$r(c_0)$ sei jetzt irgendeine auf $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ stetige Funktion. Dann gibt es eine solche Folge von Funktionen $t^{(\mu)}(c_0)$, $(\mu = 0, 1, \ldots)$, von der Art der im vorigen Paragraphen betrachteten Funktionen $t(c_0)$, daß gleichmäßig auf $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$:

$$r(c_0) = \lim_{\mu\to\infty} t^{(\mu)}(c_0) \quad \text{ist.} \tag{25}$$

Falls in demselben Intervall $|\, r(c_0)\,| < G$ ist, so können auch alle $|\, t^{(\mu)}(c_0)\,| < G$ gewählt werden. Das tun wir auch. Nun sei

$$t^{(\mu)}(c_0) = \lim_{k\to\infty} t_k^{(\mu)}(c_0) \;, \quad \text{gemäß (22).}$$

Ferner sei $\{\varepsilon_\mu\}$, $(\mu = 0, 1, \ldots)$ eine beliebige Nullfolge. Nach (23) können wir zu jedem μ ein $k_\mu^{(0)}$ so bestimmen, daß für $k_\mu \geqslant k_\mu^{(0)}$:

$$|\, A_{0\,\nu_2\nu_3}(t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0)) - A_{0\,\nu_2\nu_3}(t^{(\mu)}(c_0))\,| < \varepsilon_\mu \tag{26}$$

wird. Wir wählen nun zu jedem μ ein k_μ so, daß

1. $k_\mu \geqslant k_\mu^{(0)}$, daß also (26) gilt.
2. $r(c_0) = \lim\limits_{\mu\to\infty} t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0)$ wird, (27)

und zwar gleichmäßig in $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$.

Die Erfüllbarkeit der Forderung (2) ergibt sich aus der Gleichmäßigkeit der Konvergenz (§ 8, d, 4) in jedem abgeschlossenen Intervall, das den Punkt $x_0 = 0$ nicht enthält, und daraus, daß auf der reellen Achse stets

$$0 < \psi_k(c_0) < 1$$

ist. Es gilt dann:

$$A_{0\,\nu_2\nu_3}(r(c_0)) = \lim_{\mu\to\infty} A_{0\,\nu_2\nu_3}(t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0)) \;. \tag{28}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, daß der rechts stehende Grenzwert existiert. Es ist:

$$A_{0\,\nu_2\nu_3}(t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0)) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{0\,\nu_2\nu_3}^{(\varrho)}(c_0) \cdot t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0) = \tag{29}$$

$$= \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{0\,\nu_2\nu_3}^{(\varrho_1)}(c_0) \cdot t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0) +$$

$$+ \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0 \left[\vartheta_{0\,\nu_2\nu_3}^{(\varrho)}(c_0) - \vartheta_{0\,\nu_2\nu_3}^{(\varrho_1)}(c_0)\right] \cdot t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0) = K_1^{(\mu)}(\varrho_1) + K_2^{(\mu)}(\varrho_1)$$

bei beliebigem ϱ_1. Wegen obiger Forderung (2) ist die Folge

$$\{K_1^{\mu}(\varrho_1)\} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

konvergent.

Für $K_2^{(\mu)}(\varrho_1)$ finden wir nach der schon § 10 angewendeten Methode:

$$K_2^{(\mu)}(\varrho_1) = -\lim_{\varrho=0} \frac{1}{2\pi^2} \int_S [h_{\nu_0}^{(\varrho)}(\zeta) - h_{\nu_0}^{(\varrho_1)}(\zeta)]\, dZ \cdot \sigma^{(\mu)}(\zeta) \;,$$

wo $\sigma^{(\mu)}(\zeta)$ diejenige Funktion ist, die aus $t_{k_\mu}^{(\mu)}(\zeta)$ dadurch hervorgeht, daß man $t_{k_\mu}^{(\mu)}(\zeta)$ in eine Reihe nach den $p_{\nu_1 00}(\zeta)$ entwickelt und darin $p_{\nu_1 00}(\zeta)$ durch $p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)$ ersetzt. Wegen $|\, h^{(\varrho)}(\zeta) - h^{(\varrho_1)}(\zeta) \,| < \eta(\varrho_1)$ ($\varrho \leqslant \varrho_1$, ζ auf S) (vgl. § 11) wird:

$$|\, K_2^{(\mu)}(\varrho_1) \,| \leqslant \frac{1}{2\pi^2} \cdot \eta(\varrho_1) \cdot S^* \cdot C \;, \tag{30}$$

wo C eine solche Zahl ist, daß auf S:

$$|\, \sigma^{(\mu)}(\zeta) \,| < C \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

wird.

Eine solche Zahl existiert nämlich. Es ist ja:

$$|\, \sigma^{(\mu)}(\zeta) \,| \leqslant \frac{\varrho^{\nu_2+\nu_3}}{\nu_2!\, \nu_3!} \,|\, \tau^{(\mu)}(\zeta) \,| \;,$$

wo $\tau^{(\mu)}(\zeta)$ die Funktion ist, die durch absolute Summation der Reihe für $t_{k_\mu}^{(\mu)}(\zeta)$ entsteht. Die in μ gleichmäßige Beschränktheit der $\tau^{\mu}(\zeta)$ auf S ist dann gleichbedeutend mit derjenigen der $t_{k_\mu}^{(\mu)}(\zeta)$. Diese aber können wir so beweisen:

Es ist

$$|\, t_{k_\mu}^{(\mu)}(\zeta) \,| = |\, \sum_j g_j^{(\mu)} (\psi_{k_\mu}(\zeta - c_j) - \psi_{k_\mu}(\zeta - c_{j-1})) \,| \leqslant$$
$$\leqslant G \cdot \sum_j |\, \psi_{k_\mu}(\zeta - c_j) - \psi_{k_\mu}(\zeta - c_{j-1}) \,| \;.$$

Die Behauptung, daß dies unter einer von μ unabhängigen Schranke liegt, ist äquivalent damit, daß die $\psi_k(\zeta - c_0)$ als Funktionen von c_0 in $-1 - \eta \leqslant c_0 \leqslant 1 + \eta$ gleichmäßig in k und ζ (ζ auf S) von beschränkter Schwankung sind. Wir wissen aber, daß diese Funktionen gleichmäßig in k und ζ beschränkt sind. Da sie analytische Funktionen der Variabeln $x_0 + i_1 x_1$ sind, haben auch ihre Ableitungen diese Eigenschaft, also sind sie selber von gleichmäßig beschränkter Schwankung.

Da nun $\lim\limits_{\varrho_1=0} \eta(\varrho_1) = 0$ (nach (17)), so wird auf Grund von (30) auch

$$\lim_{\varrho_1=0} K_2^{(\mu)}(\varrho_1) = 0 \quad .$$

Nun sei ε eine beliebige positive Zahl. Wir wählen ϱ_1 so, daß $|K_2^{\mu}(\varrho_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$, und hernach für dieses ϱ_1 eine Zahl μ_0 so, daß für $\mu_1 \geqslant \mu_0$ und $\mu_2 \geqslant \mu_0$: $|K_1^{\mu_2}(\varrho_1) - K_1^{\mu_1}(\varrho_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ wird. Es ist dann für solche μ_1, μ_2:

$$|A_{0\nu_2\nu_3}(t_{k_{\mu_2}}^{(\mu_2)}(c_0)) - A_{0\nu_2\nu_3}(t_{k_{\mu_1}}^{(\mu_1)}(c_0))| < \varepsilon \quad ,$$

d. h. die Folge der $A_{0\nu_2\nu_3}(t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0))$ ist konvergent.

Nunmehr gehen wir in (29) zum $\lim\ \mu \to \infty$ über:

$$\lim_{\mu\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(t_{k_\mu}^{(\mu)}(c_0)) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta_{0\nu_2\nu_3}^{(\varrho_1)}(c_0) \cdot r(c_0) + \lim_{\mu\to\infty} K_2^{(\mu)}(\varrho_1) \quad .$$

Gehen wir hierin schließlich zum $\lim\ \varrho_1 = 0$ über, so erhalten wir unsere Behauptung (28).

16.

Nach (24) ist:

$$A_{0\nu_2\nu_3}(t^{(\mu)}(c_0)) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot t^{(\mu)}(c_0) \quad ,$$

also wegen (25):

$$\lim_{\mu\to\infty} A_{0\nu_2\nu_3}(t^{(\mu)}(c_0)) = \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0\nu_2\nu_3}(c_0)\right] \cdot r(c_0) \quad . \tag{31}$$

Daraus und aus (27_1) und (28) folgt die Behauptung von Hilfssatz 3. Setzen wir in demselben $\nu_0 = 0$, so wird $h_{\nu_0}(z) = h_0(z) = f(z)$, was sicher existiert. Hilfssatz 3 gibt uns in diesem Fall den Hauptsatz 2 für $\nu_2 = \nu_3 = 0$. Damit ist der letztere durch vollständige Induktion bewiesen.

Aus (10) und Hauptsatz 2, angewendet auf $r(c_0) = q_{0 n_2 n_3}(z - c_0)$, ergibt sich:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \quad .$$

Gehen wir die Definitionen der Funktionen $\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)$ (vgl. (20)) nochmals durch, so sehen wir, daß bei beliebigen $o < \varepsilon < \eta$:

$$\int_{-1-\eta}^{-1-\varepsilon} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) = 0$$

$$\int_{1+\varepsilon}^{1+\eta} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) = 0 \quad .$$

Es ist deshalb:

$$f(z) = \lim_{\varepsilon=0} \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \quad .$$

Definieren wir nun die Funktionen:

$$\delta_{0 n_2 n_3}(c_0) = \begin{cases} \alpha_{0 n_2 n_3}(-1) + \lim\limits_{\varepsilon=0} \int_{-1-\varepsilon}^{-1} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] & \text{für } c_0 = -1 \; , \\ \alpha_{0 n_2 n_3}(c_0) & \text{für } -1 < c_0 < +1 \; , \\ \alpha_{0 n_2 n_3}(+1) + \lim\limits_{\varepsilon=0} \int_{1}^{1+\varepsilon} d\left[\alpha_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] & \text{für } c_0 = +1 \; , \end{cases}$$

so wird:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1}^{+1} d\left[\delta_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \quad .$$

Schließlich beachten wir noch, daß wir in § 6 statt den ersten Indizes alle 2. oder 3. Indizes auf 0 hätten reduzieren können. So erhalten wir:

Hauptsatz 10. *Die Funktion $f(z)$ sei im ganzen R_4 rechtsregulär mit Ausnahme der Strecke $-1 \leqslant x_0 \leqslant +1$ der reellen Achse, welche also ein eindimensionales, isoliertes singuläres Gebilde darstelle. Das Gebilde sei unwesentlich singulär von der Ordnung N . Dann gibt es solche Funktionen*

$$\begin{aligned}
&\delta_{0\,n_2 n_3}(c_0)\ , \quad (n_2 + n_3 \leqslant N - 2)\ ,\\
&\delta_{n_1 0\, n_3}(c_0)\ , \quad (n_1 + n_3 \leqslant N - 2)\ ,\\
&\delta_{n_1 n_2 0}(c_0)\ , \quad (n_1 + n_2 \leqslant N - 2)\ ,
\end{aligned}$$

die für $-1 \leqslant c_0 \leqslant +1$ *von beschränkter Schwankung sind, daß im ganzen* R_4 *mit Ausnahme der Punkte des singulären Gebildes* $f(z)$ *in jede der Reihen entwickelt werden kann:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1}^{+1} d\left[\delta_{0\,n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0\,n_2 n_3}(z - c_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_3} \int_{-1}^{+1} d\left[\delta_{n_1 0\, n_3}(c_0)\right] \cdot q_{n_1 0\, n_3}(z - c_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{n=n_1+n_2} \int_{-1}^{+1} d\left[\delta_{n_1 n_2 n_0}(c_0)\right] \cdot q_{n_1 n_2 0}(z - c_0)\ .$$

Umgekehrt hat jede in dieser Form darstellbare Funktion das reelle Intervall $-1 \leqslant x_0 \leqslant +1$ *als singuläres Gebilde, das unwesentlich von einer Ordnung* $\leqslant N + 1$ *ist.*

18.

Wir gehen zu dem Fall über, wo $\mathfrak{S}$ ein *wesentlich singuläres Gebilde* der rechtsregulären Funktion $w = f(z)$ ist. Es ist dann:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \quad (\text{vgl. } (5))\ .$$

Aus der absoluten Konvergenz der unter dem lim-Zeichen stehenden Reihe folgt, daß es zu jedem ϱ ein $n_0(\varrho)$ gibt, sodaß

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \right| < \varepsilon(\varrho)$$

ist, für alle z, deren Abstand von $\mathfrak{S} \geqslant 2\varrho$ ist. Hierbei ist $\varepsilon(\varrho)$ irgendeine positive Funktion mit $\lim\limits_{\varrho=0} \varepsilon(\varrho) = 0$. Führen wir die Bezeichnung ein:

$$f^{(\varrho)}(z) = \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} dc_0\, \vartheta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(c_0) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c_0) \ ,$$

so wird

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} f^{(\varrho)}(z) \ .$$

Nun ist $f^{(\varrho)}(z)$ eine rechtsreguläre Funktion, die das reelle Intervall $-1-\eta \leqslant x_0 \leqslant 1+\eta$ als unwesentlich singuläres Gebilde von einer Ordnung $\leqslant (n_0+3)$ hat. Nach Hauptsatz 10 ist also für alle z in R_4, die nicht auf $-1-\eta \leqslant x_0 \leqslant 1+\eta$ liegen:

$$f^{(\varrho)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\delta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \ ,$$

wo

$$\delta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0) \equiv 0 \quad \text{für} \quad n_2 + n_3 > n_0(\varrho) + 1 \ .$$

Also wird:

$$f(z) = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\delta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0)$$

für alle z in R_4 mit Ausnahme der Punkte von $-1-\eta \leqslant x_0 \leqslant 1+\eta$ auf der reellen Achse. Nun können wir die Theorie der §§ 9—16 wörtlich auf den Fall übertragen, wo an Stelle der über $-1-\eta \leqslant c_0 \leqslant 1+\eta$ erstreckten Riemannschen Integrale Stieltjèssche auftreten. Wir finden dann, wenn wir

$$\delta_{0 n_2 n_3}(a_0, \eta) = \lim_{\varrho=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\delta^{(\varrho)}_{0 n_2 n_3}(c_0)\right] \cdot \psi(c_0 - a_0)$$

setzen: (vgl. 20)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\delta_{0 n_2 n_3}(c_0, \eta)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0)$$

für jedes $\eta > 0$, also auch

$$f(z) = \lim_{\eta=0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d\left[\delta_{0 n_2 n_3}(c_0, \eta)\right] \cdot q_{0 n_2 n_3}(z - c_0) \ .$$

Wenden wir das ganze Verfahren nochmals an, so erhalten wir schließlich:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d[\delta_{0\,n_2\,n_3}(c_0)] \cdot q_{0\,n_2\,n_3}(z - c_0) \quad ,$$

wenn wir

$$\delta_{0\,n_2\,n_3}(a_0) = \lim_{\eta=0} \int_{-1-\eta}^{1+\eta} d[\delta_{0\,n_2\,n_3}(c_0\,,\,\eta)] \cdot \psi(c_0 - a_0)$$

setzen.

Da wir ebensogut alle 2. oder alle 3. Indizes auf 0 hätten reduzieren können, so erhalten wir:

Hauptsatz 11. *Die rechtsreguläre Funktion* $w = f(z)$ *habe als einziges singuläres Gebilde das Intervall* $-1 \leqslant x_0 \leqslant +1$ *der reellen Achse des* R_4. *Dann gilt für alle* z *in* R_4 *mit Ausnahme der Punkte dieses singulären Gebildes jede der folgenden Entwicklungen:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_2+n_3} \int_{-1}^{+1} d[\delta_{0\,n_2\,n_3}(c_0)] \cdot q_{0\,n_2\,n_3}(z - c_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_3} \int_{-1}^{+1} d[\delta_{n_1\,0\,n_3}(c_0)] \cdot q_{n_1\,0\,n_3}(z - c_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2} \int_{-1}^{+1} d[\delta_{n_1\,n_2\,0}(c_0)] \cdot q_{n_1\,n_2\,0}(z - c_0) \quad .$$

Hierin sind die Funktionen $\delta_{0\,n_2\,n_3}(c_0)$ $(n_2, n_3 = 0, 1 \ldots)$, *usw. in* $-1 \leqslant c_0 \leqslant +1$ *von beschränkter Schwankung.*

(Eingegangen den 1. Juli 1942.)