# Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre.

# Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre

Par E. FELDHEIM, Budapest

On sait que les polynômes de Laguerre[1])

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \qquad (R\alpha > -1) \tag{1}$$

satisfont *à la relation de multiplication*

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda - 1)^{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k} L_k^{(\alpha)}(x) \ , \tag{2}$$

$\lambda$ étant un facteur arbitraire.

Cette relation forme un cas particulier de la relation de multiplication établie, pour les fonctions de Whittaker, dans un travail de *M. A. Erdélyi*[2]); explicitement, elle figure dans une Note récente du même auteur[3]), et dans un de nos travaux actuellement sous presse[4]).

Nous nous proposons de chercher, dans la présente Note, tous les polynômes possédant une relation de multiplication de forme semblable, et de déterminer, parmi ces polynômes ceux qui forment un système orthogonal.

Considérons donc le système de polynômes

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \ , \tag{3}$$

et cherchons à déterminer les coefficients $a_{nk}$ de manière que ces polynômes admettent la relation de multiplication

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk} (\lambda - 1)^{n-k} \Phi_k(x) \ , \tag{4}$$

---

[1]) Si $\alpha$ n'est pas entier, on remplace, comme il est d'usage, le coefficient $\binom{n+\alpha}{n-k}$ par $\dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-k)!\,\Gamma(k+\alpha+1)}$.

[2]) *A. Erdélyi*, Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Math. Zeitschrift. t. 42. 1936, p. 125—143.

[3]) *A. Erdélyi*, On certain Hankel Transforms, Quarterly Journal of. Math. t. 9. 1938, p. 196—198, paru au mois de Septembre 1938.

[4]) *E. Feldheim*, Formules d'inversion et autres relations pour les polynômes orthogonaux classiques. Bull. Soc. Math. de France, sous presse.

$\lambda$ étant quelconque, et les coefficients $A_{nk}$ étant encore inconnus. Or, de (3),

$$\lambda^n \Phi_n \left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \lambda^{n-k} x^k ,$$

d'où, moyennant la relation

$$\lambda^{n-k} = \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r} (\lambda - 1)^r ,$$

on tire

$$\lambda^n \Phi_n \left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-r} a_{nk} \binom{n-k}{r} (\lambda - 1)^r x^k . \tag{5}$$

En confrontant cette relation à (4), on aura

$$A_{n,n-r} \Phi_{n-r}(x) = \sum_{k=0}^{n-r} a_{rk} \binom{n-k}{r} x^k ,$$

et, faisant usage de (3),

$$\binom{n-k}{n-s} a_{nk} = A_{ns} a_{sk} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, s ; s = 0, 1, 2, \ldots, n; n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(n-s)! \; A_{ns} = \frac{(n-k)! \; a_{nk}}{(s-k)! \; a_{sk}} . \tag{7}$$

Nous voyons que le second membre de (7) doit être indépendant de $k$, ce qui n'est possible que si l'on a

$$(n-k)! \; a_{nk} = b_n c_k ,$$

c'est-à-dire

$$a_{nk} = \frac{b_n c_k}{(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Alors, de (7),

$$A_{ns} = \frac{b_n}{b_s \cdot (n-s)!} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, n) .$$

*En résumé, les polynômes*

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_n c_k}{(n-k)!} x^k \tag{8}$$

*possèdent la relation de multiplication*

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_n}{b_k\,(n-k)\,!}\,(\lambda-1)^{n-k}\Phi_k(x)\ , \quad (n=0\,,1\,,2\,,\ldots) \tag{9}$$

*et ce sont les seuls polynômes admettant cette propriété.*

Si l'on fait tendre, dans (9), le paramètre $\lambda$ vers 0, on trouve la *formule d'inversion des polynômes* (8) :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{c_n b_k (n-k)\,!}\,\Phi_k(x)\ . \tag{10}$$

Si nous posons ici

$$\Phi_n(x) = b_n \omega_n(x)\ , \tag{8'}$$

la relation (9) prend la forme

$$\lambda^n\,\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda-1)^{n-k}}{(n-k)\,!}\,\omega_k(x)\ , \tag{9'}$$

et nous voyons que les coefficients de ce développement sont parfaitement définis en tant qu'ils ne dépendent d'aucun facteur arbitraire. On peut en déduire, par des passages à la limite $\lambda \to \infty$ et $\lambda = 0$, les expressions inverses de $\omega_n(x)$ et $x^n$.[5])

Passons maintenant à la recherche des polynômes $\Phi_n(x)$ ou $\omega_n(x)$ satisfaisant à (8), (9), et (8'), (9'), qui forment un système orthogonal.

Rappelons que si les polynômes $\omega_n(x)$ forment un système orthogonal, ils doivent vérifier une relation de récurrence de la forme

$$x\,\omega_n(x) = A_n \omega_{n+1}(x) + B_n \omega_n(x) + C_n \omega_{n-1}(x)\ , \tag{11}$$

où, moyennant (8) et (8'), les coefficients $A_n$, $B_n$ et $C_n$ ont la valeur

$$A_n = \frac{c_n}{c_{n+1}}\ , \quad B_n = A_{n-1} - A_n\ , \quad C_n = \frac{1}{2}\,(B_{n-1} - B_n)\ . \tag{12}$$

La formule (11) entraîne, entre les coefficients du développement (8'), la relation

$$\frac{c_{k-1}}{c_k} = A_{k-1} = A_n + (n-k+1)\,B_n + (n-k+1)\,(n-k)\,C_n\ ,$$
$$(k=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ldots,n+1)\ . \tag{13}$$

On en tire

---

[5]) Si l'on fait, dans (4), $\frac{x}{\lambda} = y$, et $\lambda \to \infty$, on trouve, eu égard à (3), la relation: $A_{nk} a_{kk} = a_{nk}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Les $A_{nk}$ seront liés par la relation $\binom{n-k}{n-s} A_{nk} = A_{ns} A_{sk}$ $(k = 0\ , 1\ , 2\ , \ldots, s\ ;\ s = 0\ , 1\ , 2\ , \ldots\ , n)$, identique à (6).

$$A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1} = B_k - B_{k+1} = 2C_n = B_{n-1} - B_n$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\; n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Cette relation n'est possible que si les deux membres sont des constantes indépendantes des indices $k$ et $n$, que nous appelons $2\varrho$. Alors

$$C_n = \varrho\,,\quad B_n = B_0 - 2n\varrho = -(A_0 + 2n\varrho)\,,$$

d'où encore

$$A_n = (n+1)\,(A_0 + n\varrho)\,.$$

La relation (11) prend ainsi la forme

$$x\,\omega_n(x) = (n+1)\,(A_0 + n\varrho)\,\omega_{n+1}(x) - (A_0 + 2n\varrho)\,\omega_n(x) + \varrho\,\omega_{n-1}(x). \tag{11'}$$

D'autre part, comme

$$A_n = \frac{c_n}{c_{n+1}} = \varrho\,(n+1)\left(n + \frac{A_0}{\varrho}\right)\,,$$

on en tire l'expression suivante des coefficients $c_k$:

$$c_k = \frac{c_0\,\Gamma\left(\dfrac{A_0}{\varrho}\right)}{\varrho^k\,k!\;\Gamma\left(\dfrac{A_0}{\varrho} + k\right)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{15}$$

Ensuite, si l'on écrit

$$\int_a^b \omega_n^2(x)\,p(x)\,dx = S_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$(a, b)$ étant l'intervalle d'orthogonalité, et $p(x)$ la fonction-poids, on déduit de (11′) l'expression

$$S_n = \varrho^n c_n = \frac{S_0\,\Gamma\left(\dfrac{A_0}{\varrho}\right)}{n!\,\Gamma\left(\dfrac{A_0}{\varrho} + n\right)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Si nous posons finalement

$$\frac{A_0}{\varrho} = \alpha + 1 \qquad (R\,\alpha > -1)$$

nous trouvons que le polynôme satisfaisant à notre problème est :

$$\omega_n(x) = c_0\,\Gamma(\alpha + 1)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(k + \alpha + 1)}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^k\,, \tag{16}$$

$\varrho$ étant un paramètre arbitraire. En comparant à l'expression (1) des polynômes de Laguerre, nous voyons que

$$\omega_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{b_n} = \frac{c_0 \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}\left(-\frac{x}{\varrho}\right) . \qquad (17)$$

*Le seul polynôme orthogonal vérifiant la relation de multiplication (4) est donc, à un facteur constant, et un changement d'unité près, le polynome de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, donné par le développement (1).*

On reconnaît aussi, dans (11′), la relation de récurrence bien connue liant trois polynômes de Laguerre consécutifs.

Remarquons que les polynômes d'Hermite classiques, étant des cas particuliers (pour $\alpha = \pm \frac{1}{2}$) des polynômes de Laguerre, vérifient une relation de multiplication de forme analogue à (4). En effet, tenant compte des relations connues:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n n!\, 2^{2n} L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2) , \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n n! 2^{2n+1} x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2) ,$$

on déduit de (2), que [6])

$$\lambda^n H_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1-\lambda^2)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} H_{n-2k}(x) .$$ [7])

---

[6]) Voir, pour cette formule, les travaux cités sous [2]), [3]) et [4]).

[7]) En général, on aura la relation de multiplication

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} g_{n-k}(\lambda-1)\, \Phi_k(x) ,$$

où $g_{n-k}(\lambda-1)$ est un polynôme de degré $n-k$ en $\lambda-1$ : $g_{n-k} = \sum_{r=0}^{n-k} A_r (\lambda-1)^r$, et les coefficients $A_r$ ont pour valeur: $A_r = \sum_{s=k}^{n-r} a_{ns} b_{sk} \binom{n-s}{r}$ . Ici $a_{ns}$ et $b_{ns}$ désignent respectivement les coefficients du développement (3), et de son inversion:

$$x^n = \sum_{s=0}^{n} b_{ns} \Phi_s(x).$$

(Reçu le 7 mai 1940.)