Notiz zur Lagrangeschen Lösung des Keplerschen Problems.

Autor(en): **Fleckenstein, J.O.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **13 (1940-1941)**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-13552

Notiz zur Lagrangeschen Lösung des Keplerschen Problems

Von J. O. Fleckenstein, Basel

1. Daß schon Lagrange[1]) bei der Auflösung der Keplerschen Gleichung

$$t = x + \varepsilon \sin x \qquad (0 \leqq \varepsilon < 1) \tag{1}$$

nach x mit Hilfe seines Reversionstheorems

$$x = t - \varepsilon \sin t + \frac{\varepsilon^2}{2\,!} \frac{d}{dt} (\sin^2 t) - \frac{\varepsilon^3}{3\,!} \frac{d^2}{dt^2} (\sin^3 t) + \cdots \tag{2}$$

bei vorausgesetzter — aber von ihm nicht bewiesener — Konvergenz dieser Reihe auf die Besselschen Funktionen

$$J_n(n\varepsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^{\kappa} \frac{n^{n+2\kappa}}{(n+\kappa)\,!\,\kappa\,!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\kappa} \tag{3}$$

als Koeffizienten in der Entwicklung

$$x = t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon) \sin nt \ ; \quad A_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon) \ , \tag{4}$$

gestoßen ist, wird verschiedentlich von den Autoren vermerkt; daß er aber die Besselsche Entdeckung vorweggenommen hat, darauf scheint nur Whittaker[2]) hinzuweisen. In der Tat liegt die analytische Pointe in der Lagrangeschen Rechnung nicht in der bloßen Umformung der Reihenglieder und der Ersetzung der Potenzen $\sin^{\nu} t$ in (2) durch die sinus der Vielfachen des Arguments, die ihm dann zufällig die Besselschen Funktionen liefert, sondern in der Einführung des Differentialoperators $p = \frac{d}{dt}$, den Lagrange wie einen Heaviside-Operator handhabt.

Bestimmt man eine gesuchte Zeitfunktion $B(t)$ durch Anwendung einer Operatorenrechnung auf eine vorgegebene Funktion $S(t)$

$$B(t) = f(p)\, S(t) \ ,$$

---

[1]) *J. L. Lagrange*, Sur le problème de Képler (1771), s. Oeuvres, t. III, p. 113—138.

[2]) *H. C. Plummer*, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Cambridge (1918), bemerkt, daß er Whittaker die "reference, which seems to have been overlooked" verdankt und schreibt, daß Lagrange "... thus anticipating Bessels work of (1824) of more than half a century later".

indem man etwa $f(p)$ nach Taylor entwickelt, so bedeutet bekanntlich die Ersetzung des Operators p durch eine algebraisch zu behandelnde Größe den Übergang von dem Bereich der dem Operator unterzogenen Funktion zu einem zugeordneten anderen, d. h. eine Funktionaltransformation, wo sich dann der Operator als eine algebraische Multiplikation abbildet. Im Fall des Heaviside-Operators ist diese Transformation die Laplacesche, die als Spezialfall die Fouriersche Integraltransformation enthält, womit der Zusammenhang zwischen Lagranges mehr „induktiver" Rechnung und der allgemeinen Fourierschen Entwicklung, die dann später Bessel anwendet, angedeutet sein mag.

Während Bessel[3]) mit einem Integraloperator die Besselschen Funktionen erhält, gewinnt sie Lagrange auf dem dazu inversen Weg mittels des Differentialoperators

$$p^{\nu} = \frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}$$

als Fourierkoeffizienten der Reihe (4). Eine kurze, direkte Herleitung der Besselschen Funktionen auf dem Lagrangeschen Weg ergibt sich nun wie folgt.

2. Mit dem Operator p schreiben wir das Reversionstheorem (2)

$$x = t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^{n-1}}{n!} \varepsilon^n \sin^n t ,$$

und nach (4) haben wir also folgende merkwürdige Relation herzuleiten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\varepsilon \sin t)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin nt . \tag{5}$$

Wir setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p^{n-1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sin^n t = \sum_{n=1}^{K} (-1)^n p^{n-1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sin^n t + R_K ,$$

wo im Falle der Konvergenz $\lim\limits_{K\to\infty} R_K = 0$ ist.

Die Reihen $\sum \begin{matrix}\sin^n\\ \cos^n\end{matrix} t$ können wir[4]) folgendermaßen in Reihen, die nach $\begin{matrix}\sin n\\ \cos n\end{matrix} t$ fortschreiten, umformen:

Es sei

$$C_K = \sum_{n=1}^{K} b_n (2\cos t)^n , \quad b_n = \frac{\alpha^n}{2^n} .$$

---

[3]) *F. W. Bessel*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, p. 17 (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wiss. math. Cl. 1816—1817).

[4]) vgl. *E. W. Brown* und *C. Shook*, Planetary Theory, Cambridge 1933, p. 45 u. ff.

Da C_K eine gerade Funktion von t ist, kann C_K in Cosinustermen der Vielfachen von t entwickelt werden. Mit der Abkürzung $z = \alpha e^{it}$, so daß $2\alpha\ \cos\ t = z + \frac{\alpha^2}{z}$ ist, haben wir nach dem Binomischen Satz

$$C_K = \sum_{n=1}^{K} 2^{-n} \left(z + \frac{\alpha^2}{z}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{K} 2^{-n} z^n \left(1 + n\frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{n(n-1)}{2\,!} \cdot \frac{\alpha^4}{z^4} + \cdots \frac{\alpha^{2n}}{z^{2n}}\right).$$

Die Koeffizienten der $\cos nt$ erhält man aus den Koeffizienten von z^n und $\alpha^{2n} z^{-n}$, die also jeweils gleich sein müssen, sodaß es genügt, nur die Koeffizienten von z^n, $n > 0$ zu sammeln und dann z^n durch $2\alpha^n \cos nt$ zu ersetzen. Demnach ist allgemein der Koeffizient von $2 \cos nt$

$$b_n + (n+2)\, b_{n+2} + \frac{(n+4)\,(n+3)}{1 \cdot 2}\, b_{n+4} + \frac{(n+6)\,(n+5)\,(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_{n+6} + \cdots$$

(wir notieren nur die ersten Glieder des Koeffizienten). Durch analoge Überlegungen findet man, daß in

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} (-1)^n\, b_n\, (2 \sin t)^n$$

die Terme mit ungeradem $n = 2\mu + 1$ die sinus der ungeraden Vielfachen von t, die Terme mit geradem Index $n = 2\mu$ die cosinus der geraden Vielfachen von t enthalten. Mit den gleichen Substitutionen wie oben folgt dann mit

$$2i\alpha\ \sin\ t = z - \frac{\alpha^2}{z}$$

und

$$S_K = \sum_{n=1}^{K} 2^{-n} \left(z - \frac{\alpha^2}{z}\right)^n (-1)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{K} 2^{-n} z^n \left(1 - n\frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{n(n-1)}{2\,!} \cdot \frac{\alpha^4}{z^4} - \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3\,!} \cdot \frac{\alpha^6}{z^6} + \cdots\right) (-1)^{\frac{n}{2}} \tag{6}$$

als Koeffizient von $2 \sin (2\mu + 1)\, t$

$$(-1)^\mu \Big\{ b_{2\mu+1} + (2\mu + 3)\; b_{2\mu+3} + \frac{(2\mu+5)\,(2\mu+4)}{1 \cdot 2}\, b_{2\mu+5} + $$
$$+ \frac{(2\mu+7)\,(2\mu+6)\,(2\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, b_{2\mu+7} + \cdots \Big\}$$

und als Koeffizient von $2 \cos 2\mu t$

$$(-1)^{\mu}\Big\{ b_{2\mu} + (2\mu+2)\, b_{2\mu+2} + \frac{(2\mu+4)\,(2\mu+3)}{1\cdot 2}\, b_{2\mu+4} +$$

$$+ \frac{(2\mu+6)\,(2\mu+5)\,(2\mu+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\, b_{2\mu+6} + \cdots \Big\} .$$

Führt man jetzt

$$b_n = \frac{p^{n-1}\,\varepsilon^n}{2^n\, n\,!}$$

ein, so erhält man in der Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{K} (-1)^n \frac{1}{n\,!}\, p^{n-1} (\varepsilon \sin t)^n$$

als Koeffizienten von $2 \sin (2\mu + 1)\, t$

$$(-1)^{\mu}\Big\{ \frac{p^{2\mu}\,\varepsilon^{2\mu+1}}{(2\mu+1)\,!\; 2^{2\mu+1}} + (2\mu+3) \frac{p^{2\mu+2}\,\varepsilon^{2\mu+3}}{(2\mu+3)\,!\;\; 1\,!\;\; 2^{2\mu+3}} +$$

$$+ (2\mu+5)\;(2\mu+4) \frac{p^{2\mu+4}\,\varepsilon^{2\mu+5}}{(2\mu+5)\,!\;\; 2\,!\;\; 2^{2\mu+5}} +$$

$$+ \cdots \{ (2\mu+2\lambda+1) \cdots (2\mu+\lambda+2) \} \frac{p^{2\mu+2\lambda}\,\varepsilon^{2\mu+2\lambda+1}}{(2\mu+2\lambda+1)!\;\lambda\,!\;\; 2^{2\mu+2\lambda+1}} + \cdots \Big\},$$

$$(\lambda = 3, 4, 5, \ldots \mu)\,,$$

und als Koeffizienten von $2 \cos 2\mu t$

$$(-1)^{\mu}\Big\{ \frac{p^{2\mu-1}\,\varepsilon^{2\mu}}{(2\mu)\,!\; 2^{2\mu}} + (2\mu+2) \frac{p^{2\mu+1}\,\varepsilon^{2\mu+2}}{(2\mu+2)\,!\;\; 1\,!\;\; 2^{2\mu+2}} +$$

$$+ (2\mu+4)\;(2\mu+3) \frac{p^{2\mu+3}\,\varepsilon^{2\mu+4}}{(2\mu+4)\,!\;\; 2\,!\;\; 2^{2\mu+4}} +$$

$$+ \cdots \{ (2\mu+2\lambda) \cdots (2\mu+\lambda+1) \} \frac{p^{2\mu+2\lambda-1}\,\varepsilon^{2\mu+2\lambda}}{(2\mu+2\lambda)\,!\;\lambda\,!\;\; 2^{2\mu+2\lambda}} + \cdots \Big\},$$

$$(\lambda = 3, 4, 5, \ldots \mu)\,.$$

Nun ist allgemein

$p^{2\mu+2\lambda}$ angewendet auf $\sin (2\mu+1)\, t$ gleich $(-1)^{\mu+\lambda}\,(2\mu+1)^{2\mu+2\lambda} \sin (2\mu+1)\, t$

$p^{2\mu+2\lambda-1}$ angewendet auf $\cos 2\mu t$ gleich $(-1)^{\mu+\lambda}\,(2\mu)^{2\mu+2\lambda-1} \sin\, 2\mu t$.

Ersetzt man also in den Koeffizienten die p^{ν} durch ihre Differentiationsresultate, so erhalten wir allgemein für die Koeffizienten von $\sin 2\mu t$

$$\left\{\frac{(2\mu)^{2\mu-1}}{(2\mu)\,!\;0\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu}+(-1)^1\frac{(2\mu)^{2\mu+1}}{(2\mu+1)\,!\;1\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2}+\right.$$

$$\left.+(-1)^2\frac{(2\mu)^{2\mu+3}}{(2\mu+2)\,!\;2\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+4}+\cdots(-1)^\lambda\frac{(2\mu)^{2\mu+2\lambda-1}}{(2\mu+\lambda)\,!\;\lambda\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2\lambda}+\cdots\right\}$$

und von $\sin(2\mu+1)\,t$

$$\left\{\frac{(2\mu+1)^{2\mu}}{(2\mu+1)\,!\;0\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+1}+(-1)^1\frac{(2\mu+1)^{2\mu+2}}{(2\mu+2)\,!\;1\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+3}+\right.$$

$$\left.+(-1)^2\frac{(2\mu+1)^{2\mu+4}}{(2\mu+3)!\;2!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+5}+\cdots(-1)^\lambda\frac{(2\mu+1)^{2\mu+2\lambda}}{(2\mu+1+\lambda)!\,\lambda!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2\lambda+1}+\cdots\right\},$$

also für S_K eine Reihe, die nach $\sin nt$ fortschreitet ($n = 2\mu$ gesetzt). Lassen wir in der Doppelsumme

$$S_K = 2\sum_{n=1}^{K}\sum_{\lambda=0}^{K}(-1)^\lambda\frac{n^{n+2\lambda-1}}{(n+\lambda)\,!\;\lambda\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\lambda}\sin nt \tag{7}$$

$K\to\infty$ gehen, so haben wir (vorbehaltlich der absoluten Konvergenz von (7)) in der Tat die Entwicklung (4) nach $\sin nt$ mit den Koeffizienten

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\frac{n^{n+2\kappa-1}}{(n+\kappa)\,!\;\kappa\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\kappa}=\frac{1}{n}J_n(n\varepsilon)$$

und damit die Auflösung der Keplerschen Gleichung in der Lagrange-Besselschen Form.

3. Die absolute Konvergenz der Doppelsumme (7) und damit die Erlaubtheit der Einführung der Koeffizienten $J_n(n\varepsilon)$ läßt sich für hinreichend kleine ε schon elementar mit dem d'Alembertschen Kriterium erweisen.

In der Summe[5])

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|(-1)^\kappa\frac{(\nu+1)^{\nu+2\kappa}}{(\nu+1+\kappa)\,!\;\kappa\,!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+2\kappa+1}\sin(\nu+1)\,t\right|\leqq\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)^{\nu+2\kappa}}{(\nu+1+\kappa)!\;\kappa!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+2\kappa+1}$$

kann man, weil

$$\frac{(\nu+1)^{2\kappa}}{(\nu+1+\kappa)!\;\kappa!}=\frac{(\nu+1)^{2\kappa}}{(\nu+1)!\;(\nu+1+1)\ldots(\nu+1+\kappa)\;\kappa!}<\frac{(\nu+1)^{2\kappa}}{(\nu+1)!\;(\nu+1)^\kappa\;\kappa!}=\frac{(\nu+1)^\kappa}{(\nu+1)!\;\kappa!}$$

ist, setzen

---

[5]) Für wichtige Hinweise bei der nachfolgenden Majoratenabschätzung danke ich Herrn Prof. *Niethammer*.

$$(\nu+1)^\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)^{2\kappa}}{(\nu+1+\kappa)!\;\kappa!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\kappa}<$$

$$<\frac{(\nu+1)^\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)^\kappa\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa!}=\frac{(\nu+1)^\nu}{(\nu+1)!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}e^{(\nu+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.$$

Also wird die Doppelsumme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left|(-1)^\kappa\frac{(\nu+1)^{\nu+2\kappa}}{(\nu+1+\kappa)!\;\kappa!}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+2\kappa+1}\sin(\nu+1)t\right|<$$

$$<e^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)^\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}e^{\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}}{(\nu+1)!}.$$

Die Majorante konvergiert, wenn nur

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)^\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}e^{\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\nu!}{(\nu+1)!\;\nu^{\nu-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu e^{(\nu-1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}}\right|=\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{(\nu+1)^{\nu-1}}{\nu^{\nu-1}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)e^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right|<1$$

ist, d. h. für

$$e\cdot\frac{\varepsilon}{2}e^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}<1\,.$$

Der Konvergenzradius der Entwicklung ist also größer oder gleich ε_0, wo ε_0 durch

$$e\,\frac{\varepsilon_0}{2}e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2}=1\qquad\text{oder}\qquad\varepsilon_0\,e^{1+\frac{\varepsilon_0^2}{4}}=2\tag{8}$$

bestimmt ist[6]. $\varepsilon_0=0{,}660\ldots$ weicht um weniger als 0,003 von dem von Laplace angegebenen Wert $\varepsilon_1=0{,}6627\ldots$ für die Gültigkeit der Entwicklung (2) ab, der sich aus

$$1+\sqrt{1+\varepsilon_1^2}=\varepsilon_1\,e^{\sqrt{1+\varepsilon_1^2}}\tag{9}$$

ergibt, wie sich mit wesentlich höheren Hilfsmitteln zeigen läßt[7].

[6]) Unter dieser Schranke liegen die numerischen Exzentrizitäten der Planeten, Planetoiden und sogar mancher periodischer Kometen.

[7]) vgl. etwa *Tisserand*, Mécanique céleste, t. I, p. 265.

Mit der Substitution $\varepsilon_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ erhält man bekanntlich aus (9) zur Bestimmung des Laplaceschen Konvergenzradius die transzendente Gleichung

$$\cos \alpha_1 \operatorname{lognat} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = 1 \; ,$$

während man mit der Substitution $\frac{\varepsilon_0}{2} = \operatorname{tg} \alpha_0$ für ε_0 eine analoge Gleichung aus (8)

$$\cos^2 \alpha_0 \operatorname{lognat} \operatorname{ctg} \alpha_0 = 1$$

erhält[8]).

Während die Herleitung der Entwicklung (4) mit Hilfe des Reversionstheorems (2) von Lagrange eine Einschränkung der Bedingung $0 < \varepsilon < 1$ aus (1) zu $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = 0{,}6627\ldots$ erfordert, erlaubt die Anwendung des Fourierschen Entwicklungssatzes, die Gültigkeit der weiteren Bedingung $0 \leqq \varepsilon < 1$ zu zeigen. Die Besselsche Herleitung der Entwicklung (4) ist also für das ganze Intervall $0 < \varepsilon < 1$ gültig.

---

[8]) Beide Formeln $1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} = \varepsilon_1 e^{\sqrt{1+\varepsilon_1^2}}$ und $\varepsilon_0 e^{1 + \frac{\varepsilon_0^2}{4}} = 2$ liefern bis auf Größen von der Ordnung ε^3 als erste Näherungslösung

$$\varepsilon = \frac{2}{e} - \frac{\varepsilon^3}{4} \pm \cdots \; .$$

(Eingegangen den 25. Juli 1940.)