Zusatz zur Abhandlung:

Über die Bestimmung von Flächen aus ihrer Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien

Von Siegfried Grünbaum, Zürich

In der obigen Arbeit (Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 11, fasc. 4, in der Folge als „Abh." zitiert) ist bewiesen worden, daß eine analytische Fläche durch ihre Normalkrümmung längs einer Schar geodätischer Linien und durch geeignete Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist (Abh., 2. und 3. Satz). Dabei ergab sich als notwendige Bedingung für den analytischen Charakter der Fläche, daß die vorzugebende Normalkrümmung κ eine analytische Funktion der Bogenlänge u der geodätischen Linien der Schar (von einer Orthogonaltrajektorie $u = 0$ aus gemessen) und des geometrischen Scharparameters v (etwa der Bogenlänge der Kurve $u = 0$) sein muß. Die Frage, ob diese notwendige Bedingung auch hinreichend ist, d. h.: ob zu jeder analytischen Funktion $\kappa(u, v)$ und zu geeigneten Anfangsbedingungen auch immer eine Fläche gehört, blieb dabei offen, und es soll nun noch der Existenzbeweis geleistet werden.

Wir führen wie früher mit Hilfe der geodätischen Linien der Schar und ihrer Orthogonaltrajektorien ein geodätisches Parametersystem auf der Fläche ein, für welches gilt (Abh., p. 340):

$$E(u, v) \equiv 1\,, \tag{1}$$

$$F(u, v) \equiv 0\,, \tag{2}$$

$$L(u, v) \equiv \kappa(u, v)\,, \tag{3}$$

$$\frac{M(u, v)}{\sqrt{G(u, v)}} \equiv \tau(u, v)\,, \tag{4}$$

wobei E, F, G, L, M, N in üblicher Weise die Fundamentalgrößen der Fläche und κ, τ die Krümmung bzw. Torsion der geodätischen Linien $v =$ const. bezeichnen. Nach einem Satze von Bonnet[1]) bestimmen nun

[1]) *O. Bonnet:* Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Journal de l'Éc. polyt., cah. 42, Paris 1867, p. 31 ff.

sechs Funktionen E, F, G, L, M, N von u und v stets genau eine Fläche, wenn sie den drei Fundamentalgleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi[2]) genügen, die in unserm Spezialfalle entsprechend (1) bis (3) die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} &\kappa N - M^2 = -\sqrt{G} \cdot (\sqrt{G})_{uu} \,, \\ &2G(\kappa_v - M_u) - M G_u = 0 \,, \\ &2G(M_v - N_u) + G_u(\kappa G + N) - M G_v = 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Da nach Voraussetzung κ bekannt ist, reduziert sich unser Existenzbeweis auf den Nachweis, daß das partielle Differentialsystem (5) in unserm Falle stets reelle Lösungen G, M, N besitzt, so daß dann also nach dem Satz von Bonnet immer eine zugehörige Fläche existiert.

Wir formen das System (5) durch die Substitution:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{G} &= P \,, \\ (\sqrt{G})_u &= Q \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

in ein System 1. Ordnung um und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \kappa N - M^2 + PQ_u &= 0 \,, \\ P(\kappa_v - M_u) - MQ &= 0 \,, \\ P(M_v - N_u) + Q(\kappa P^2 + N) - MP_v &= 0 \,, \\ Q - P_u &= 0 \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Auf dieses System läßt sich das Existenztheorem von Sophie von Kowalevsky anwenden[3]). Dieses fordert die Auflösbarkeit des Systems mindestens nach den Ableitungen nach u oder nach denen nach v und Regularität dieser Ableitungen für die vorgeschriebenen Anfangswerte der gesuchten Funktionen M, N, P und Q. Diese Bedingungen sind hier erfüllt; denn wir finden aus (7):

$$\left.\begin{aligned} Q_u &= -\frac{1}{P}(\kappa N - M^2) \,, \\ M_u &= \frac{1}{P}(\kappa_v P - MQ) \,, \\ N_u &= \frac{1}{P}(PM_v - MP_v + \kappa P^2 Q + NQ) \,, \\ P_u &= Q \,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[2]) *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Berlin 1921, p. 79 (138), (139).

[3]) *Sophie v. Kowalevsky:* Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Journal für Mathematik 80, Berlin 1875, p. 1 ff.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind höchstens für $P = \sqrt{G} = 0$ singulär; dies kann aber nur im (weiter unten behandelten) Spezialfalle geodätischer Polarkoordinaten eintreten. Sonst sind die rechten Seiten in (8) stets regulär. Damit ist also die Existenz einer Lösung $M(u, v)$, $N(u, v)$, $P(u, v)$, $Q(u, v)$ gesichert, falls $\kappa(u, v)$ und die Anfangsbedingungen $M(0, v)$, $N(0, v)$, $P(0, v)$, $Q(0, v)$ regulär vorgeschrieben sind. Dann konvergiert die früher (Abh., (42)) eindeutig berechnete Reihe für $G = P^2$, und ferner wird nun für reelles $\kappa(u, v)$ und für reelle Anfangsbedingungen auch G reell und positiv. Damit ist schließlich die Fläche selbst reell; denn es gilt (Abh., (40)):

$$\tau(u, v) = \frac{1}{G(u, v)}\left[\int_0^u \kappa_v(u, v) \cdot \sqrt{G(u, v)} \cdot du + \tau(0, v)\right].$$

Die Anfangswerte für M, N, P, Q lassen sich nach der Entwicklung für G (Abh., (42)):

$$G(u, v) = 1 + u \cdot 2\kappa^* \sin\vartheta + u^2 \cdot \left[\kappa^{*2} \sin^2\vartheta - \kappa\kappa^* \cos\vartheta + \left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)^2\right]_{0,v} + \cdots \tag{9}$$

sowie nach (Abh., (37)):

$$\tau(0, v) = -\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right) \tag{10}$$

und nach den Formeln (4) bis (6) aus den Bestimmungsstücken $\kappa^*(v)$, $\tau^*(v)$ und $\vartheta(v)$ des Anfangsstreifens berechnen. Es ergibt sich also nach (6):

$$P(0, v) = \sqrt{G(0, v)} = 1,$$
$$Q(0, v) = \left(\sqrt{G(0, v)}\right)_u = \kappa^* \sin\vartheta,$$

ferner nach (4) und (10):

$$M(0, v) = \tau(0, v) \cdot \sqrt{G(0, v)} = -\left(\tau^* + \frac{d\vartheta}{dv}\right)$$

und schließlich nach (5):

$$N(0, v) = \left[\frac{M^2 - \sqrt{G} \cdot (\sqrt{G})_{uu}}{\kappa}\right]_{0,v} = \kappa^* \cos\vartheta .$$

Betrachten wir zum Schlusse den Spezialfall geodätischer Polarkoordinaten $(u, v) = (r, \varphi)$, so erhalten wir hier die Anfangswerte aus folgender Entwicklung (Abh., p. 347):

$$G(r,\varphi) = r^2 + r^4 \cdot \left[-\frac{1}{3}\kappa^2 + \frac{1}{12}\kappa_\varphi^2 - \frac{1}{6}\kappa\kappa_{\varphi\varphi}\right]_{0,\varphi} + \cdots$$

und aus (Abh., (23)):

$$\tau(0,\varphi) = -\frac{1}{2}\kappa_\varphi(0,\varphi) \ ,$$

also:

$$P(0,\varphi) = \sqrt{G(0,\varphi)} = 0 \ ,$$
$$Q(0,\varphi) = \lim_{r\to 0} (\sqrt{G})_r = 1 \ ,$$
$$M(0,\varphi) = \tau(0,\varphi)\cdot\sqrt{G(0,\varphi)} = 0 \ ,$$
$$N(0,\varphi) = \frac{1}{\kappa(0,\varphi)}\cdot\left[M^2(0,\varphi) - \lim_{r\to 0}\sqrt{G}\cdot(\sqrt{G})_{rr}\right] = 0 \ .$$

Ferner ergibt sich nach (6) und (8):

$$Q_r(0,\varphi) = \lim_{r\to 0} (\sqrt{G})_{rr} = 0 \ ,$$
$$M_r(0,\varphi) = \kappa_\varphi(0,\varphi) - \lim_{r\to 0}\frac{MQ}{P} = \frac{3}{2}\kappa_\varphi(0,\varphi) \ ,$$
$$N_r(0,\varphi) = M_\varphi(0,\varphi) + \lim_{r\to 0}\left[\frac{NQ}{P} - \frac{MP_\varphi}{P} + 2\kappa PQ\right] = 0 \ ,$$
$$P_r(0,\varphi) = Q(0,\varphi) = 1 \ .$$

Damit ist gezeigt, daß auch in diesem Spezialfalle die Voraussetzungen des Kowalevsky'schen Theorems erfüllt sind.

Es gilt also folgender

Satz: *Jede analytische Funktion* κ *zweier Variabler* u und v *läßt sich als Normalkrümmung einer analytischen Fläche längs einer Schar geodätischer Linien auffassen, wobei* u *die Bogenlänge der geodätischen Linien, von einer festen Orthogonaltrajektorie* $u = 0$ *aus gemessen, und* v *die Bogenlänge dieser Kurve bezeichnen. Die Fläche ist durch* $\kappa(u, v)$ *und den Anfangsstreifen* $u = 0$ *eindeutig bestimmt. Der Anfangsstreifen kann sich auch auf ein Flächenelement reduzieren, wobei dann* κ *dort noch der Euler'schen Formel genügen muß.*

(Eingegangen den 10. Juli 1939.)